Extra oefening bij hoofdstuk 1

1a $(2-3x)(4-x^2)=0$
$(2-3x)=0$ of $(4-x^2)=0$
$2-3x=0$ of $x^2=4$
$x=\frac{2}{3}$ of $x=-2$ of $x=2$

b $(3+2x^3)\cdot x^{0,6}=0$
$(3+2x^3)=0$ of $x^{0,6}=0$
$2x^3=-3$ of $x=0$
$x^3=-\frac{3}{2}$ of $x=0$
$x=-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ of $x=0$

c $\dfrac{x^3+5x^2}{x^2}=0$
$x^3+5x^2=0$ en $x\neq 0$
$x^2(x+5)=0$ en $x\neq 0$
$x+5=0 \Rightarrow x=-5$

d $3x+24x^2=0$
$3x(1+8x)=0$
$x=0$ of $1+8x=0$
$x=0$ of $x=-\frac{1}{8}$

e $2x^3=-3x^2$
$2x^3+3x^2=0$
$x^2(2x+3)=0$
$x=0$ of $x=-1\frac{1}{2}$

f $\dfrac{x^2-4}{x}=0$
$x^2-4=0$ en $x\neq 0$
$x^2=4 \Rightarrow x=-2$ of $x=2$

2a $f(x)=4x^{\frac{1}{2}}-3x^3 \Rightarrow f'(x)=2x^{-\frac{1}{2}}-9x^2=\dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}}-9x^2=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-9x^2$

b $p(t)=3,5+2t^{0,8} \Rightarrow p'(t)=1,6t^{-0,2}=\dfrac{1,6}{t^{0,2}}$

c $K(q)=3q^{0,25}-2q^{1,5} \Rightarrow K'(q)=0,75q^{-0,75}-3q^{0,5}=\dfrac{0,75}{q^{0,75}}-3q^{0,5}$

d $A(p)=5p^{-2}-3p^{-1} \Rightarrow A'(p)=-10p^{-3}+3p^{-2}=\dfrac{-10}{p^3}+\dfrac{3}{p^2}$

3a $p(x)=(9x-2)(-2x+3) \Rightarrow$
$p'(x)=9\cdot(-2x+3)+(9x-2)\cdot -2=-18x+27-18x+4=-36x+31$

b $p(x)=(9x-2)(-2x+3)=-18x^2+27x+4x-6=-18x^2+31x-6 \Rightarrow$
$p'(x)=-36x+31$

c Beide uitkomsten zijn gelijk.

4a $f(x)=2x^3(4-x) \Rightarrow f'(x)=6x^2(4-x)+2x^3\cdot -1=24x^2-6x^3-2x^3=-8x^3+24x^2$

b $g(x)=(x^4-6x)(x^2+3) \Rightarrow$
$g'(x)=(4x^3-6)(x^2+3)+(x^4-6x)(2x)=$
$4x^5+12x^3-6x^2-18+2x^5-12x^2=6x^5+12x^3-18x^2-18$

c $h(x)=(6x+2)(x^3-4) \Rightarrow h'(x)=6\cdot(x^3-4)+(6x+2)\cdot 3x^2=$
$6x^3-24+18x^3+6x^2=24x^3+6x^2-24$

d $j(x)=4x^2(3x-4) \Rightarrow j'(x)=8x(3x-4)+4x^2\cdot 3=24x^2-32x+12x^2=36x^2-32x$

5a $TW(t)=\dfrac{4}{t^2+3} \Rightarrow TW'(t)=\dfrac{0\cdot (t^2+3)-4\cdot 2t}{(t^2+3)^2}=\dfrac{-8t}{(t^2+3)^2}$

b $p(x)=\dfrac{2x+3}{x-1} \Rightarrow p'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x+3)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$

c $A(p)=\dfrac{3p^2+6}{2p-3} \Rightarrow$

$A'(p)=\dfrac{6p(2p-3)-(3p^2+6)\cdot 2}{(2p-3)^2}=\dfrac{12p^2-18p-6p^2-12}{(2p-3)^2}=\dfrac{6p^2-18p-12}{(2p-3)^2}$

d $R(q)=\dfrac{3q^3-4q}{q^2} \Rightarrow$

$R'(q)=\dfrac{(9q^2-4)\cdot q^2-(3q^3-4q)\cdot 2q}{q^4}=\dfrac{9q^4-4q^2-6q^4+8q^2}{q^4}=\dfrac{3q^4+4q^2}{q^4}=\dfrac{3q^2+4}{q^2}$

6a $M(g)=2{,}94\cdot g^{\frac{2}{3}}-g \Rightarrow M'(g)=\frac{2}{3}\cdot 2{,}94g^{-\frac{1}{3}}-1=1{,}96g^{-\frac{1}{3}}-1$

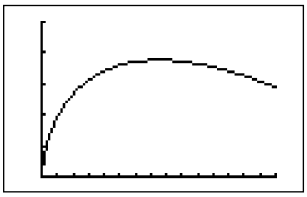
b $M'(g)=0 \Rightarrow 1{,}96g^{-\frac{1}{3}}-1=0$

$1{,}96g^{-\frac{1}{3}}=1$

$g^{-\frac{1}{3}}\approx 0{,}510$

$g\approx 0{,}510^{-3}\approx 7{,}53$ gram.

Dus wanneer 7,53 gram van het preparaat dagelijks wordt toegediend zal de melkproductie maximaal zijn. Een plot van de functie M.



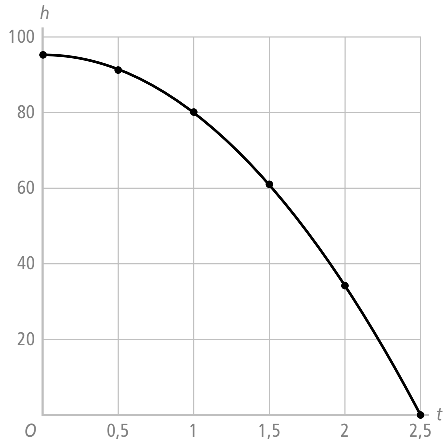
c Wanneer de dagelijkse hoeveelheid van het preparaat beperkt wordt tot 6 gram dan zal de melkproductie niet maximaal zijn maar beperkt blijven tot $M(6)=2{,}94\cdot 6^{\frac{2}{3}}-6\approx 3{,}71$ kg.

Extra oefening bij hoofdstuk 2

1a

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
h	95	91,25	80	61,25	35	1,25

b



c Vervang in de formule voor h de v door de uitdrukking in t.
$h = 100 - 5v = 100 - 5(3t^2 + 1) = 95 - 15t^2$
Grafieken komen goed overeen.

2a $g(x) = \dfrac{3}{4m-5} = 3 \cdot (4m-5)^{-1} \Rightarrow g'(x) = -3 \cdot (4m-5)^{-2} \cdot 4 = \dfrac{-12}{(4m-5)^2}$

b $k(t) = 3t \cdot (2t-1)^2 \Rightarrow k'(t) = 3 \cdot (2t-1)^2 + 3t \cdot 2 \cdot (2t-1) \cdot 2 =$

$3 \cdot (4t^2 - 4t + 1) + 12t \cdot (2t-1) =$

$12t^2 - 12t + 3 + 24t^2 - 12t = 36t^2 - 24t + 3$

c $g(p) = \sqrt{3p^2 + 19} = (3p^2 + 19)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3p^2 + 19)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6p = \dfrac{3p}{\sqrt{3p^2 + 19}}$

d $g(x) = (1 + 2x)^2 - 2 \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot (1 + 2x) \cdot 2 = 4 + 8x$

e $p(t) = \sqrt{t^3 + t} = (t^3 + t)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow p'(t) = \frac{1}{2} \cdot (t^3 + t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3t^2 + 1) = \dfrac{3t^2 + 1}{2\sqrt{t^3 + t}}$

f $Q(p) = \sqrt{2p - 5} = (2p - 5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q'(p) = \frac{1}{2}(2p - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2p - 5}}$

g $f(w) = (w^2 - 2)^4 \Rightarrow f'(w) = 4 \cdot (w^2 - 2)^3 \cdot 2w = 8w \cdot (w^2 - 2)^3$

3a De gemiddelde vulsnelheid in de eerste minuut is $\dfrac{200}{60} \approx 3{,}33$ l/s.

De gemiddelde vulsnelheid in de tweede minuut is $\dfrac{600 - 200}{60} \approx 6{,}66$ l/s.

b De olie stijgt de eerste minuut 52 cm. De gemiddelde stijgsnelheid is dus

$\dfrac{52}{200} = 0{,}26$ cm/l.

Gedurende de tweede minuut stijgt de olie van 52 cm naar 100 cm.

De gemiddelde stijgsnelheid is dan $\dfrac{100 - 52}{400} = 0{,}12$ cm/l.

c De gemiddelde stijgsnelheid gedurende de eerste minuut is $3{,}33 \cdot 0{,}26 = 0{,}87$ cm/s.
De gemiddelde stijgsnelheid gedurende de tweede minuut is $6{,}66 \cdot 0{,}12 \approx 0{,}80$ cm/s.

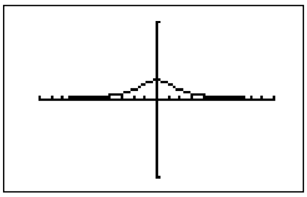
4a $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$ is samengesteld uit de schakels: $u=x^2+4$ en $y=\dfrac{1}{u}$.

b De schakel u heeft een minimum dus de schakel y heeft dan een maximum, dus f heeft een maximum.

c $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}=(x^2+4)^{-1} \Rightarrow f'(x)=-1(x^2+4)^{-2}\cdot 2x=\dfrac{-2x}{(x^2+4)^2}$

$f(x)=0$ geeft $-2x=0$ dus $x=0$.
De grafiek van f heeft een maximum $f(0)=\frac{1}{4}$ voor $x=0$.

d



Het antwoord klopt.

Oefentoets bij hoofdstuk 1 en 2

1a De functie bestaat uit de schakels $u = 4x^2 + 1$ en $y = u^3$.

b $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3 \cdot (4x^2+1)^2 \cdot 8x = 24x \cdot (4x^2+1)^2$

c $g(x) = 4\left(x^3\right)^2 + 1 = 4x^6 + 1$

2a $K(t) = 13t^4 - 6t^2 + 18 \Rightarrow K'(t) = 52t^3 - 12t$

b $TW = 0{,}001p^{4,5} + 2{,}33p^{-0,3} \Rightarrow TW' = 0{,}0045p^{3,5} - 0{,}699p^{-1,3}$

c $f(x) = (x^3+5x)(4x^2-8x) \Rightarrow f'(x) = (3x^2+5)(4x^2-8x) + (x^3+5x)(8x-8) =$

$12x^4 - 24x^3 + 20x^2 - 40x + 8x^4 - 8x^3 + 40x^2 - 40x = 20x^4 - 32x^3 + 60x^2 - 80x$

d $P(q) = \dfrac{q^2 - 3q + 1}{q} \Rightarrow$

$P'(q) = \dfrac{(2q-3) \cdot q - (q^2-3q+1) \cdot 1}{q^2} = \dfrac{2q^2 - 3q - q^2 + 3q - 1}{q^2} = \dfrac{q^2-1}{q^2}$

e $H(t) = (t^{2,1}+1)(t^{3,4}-2t) \Rightarrow H'(t) = 2{,}1t^{1,1} \cdot (t^{3,4}-2t) + (t^{2,1}+1)(3{,}4t^{2,4}-2) =$

$2{,}1t^{4,5} - 4{,}2t^{2,1} + 3{,}4t^{4,5} - 2t^{2,1} + 3{,}4t^{2,4} - 2 = 5{,}5t^{4,5} + 3{,}4t^{2,4} - 6{,}2t^{2,1} - 2$

f $f(x) = (-3x+1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (-3x+1)^2 \cdot -3 = -9 \cdot (-3x+1)^2$

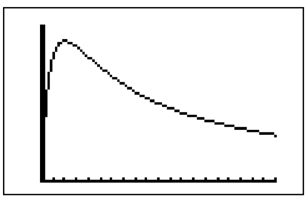
g $P(t) = \sqrt{t^2-4t+1} = (t^2-4t+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow P'(t) = \frac{1}{2} \cdot (t^2-4t+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2t-4) = \dfrac{t-2}{\sqrt{t^2-4t+1}}$

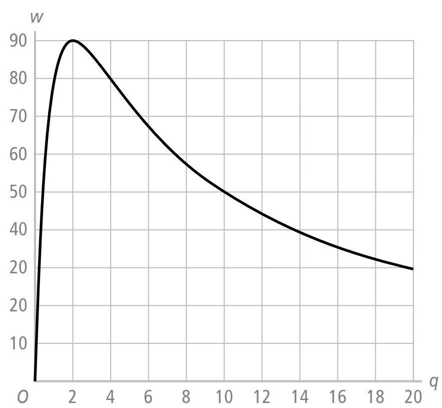
h $g(x) = 4 \cdot (100-x^4)^3 \Rightarrow g'(x) = 12 \cdot (100-x^4)^2 \cdot -4x^3 = -48x^3(100-x^4)^2$

i $K(v) = \dfrac{13}{v^2+1} = 13 \cdot (v^2+1)^{-1} \Rightarrow K'(v) = -13(v^2+1)^{-2} \cdot 2v = \dfrac{-26v}{(v^2+1)^2}$

j $j(p) = -3(4p^7-7p-3)^{3,5} \Rightarrow j'(p) = -10{,}5 \cdot (4p^7-7p-3)^{2,5} \cdot (28p^6-7)$

3a





b $W'(q) = \dfrac{180 \cdot (0{,}5q+1)^2 - 180q \cdot 2 \cdot (0{,}5q+1) \cdot 0{,}5}{(0{,}5q+1)^4} =$

$\dfrac{180 \cdot (0{,}5q+1) \cdot \left((0{,}5q+1) - q\right)}{(0{,}5q+1)^4} = \dfrac{180 \cdot (1-0{,}5q)}{(0{,}5q+1)^3}$

c $W'(4) = \dfrac{180 \cdot (1-2)}{(2+1)^3} = \dfrac{-180}{27} \approx -6{,}67$

Deze uitkomst betekent dat de winst afneemt met 6,67 per eenheid wanneer $q = 4$.

d De winst is maximaal als $W'(q) = 0$, dus $1 - 0{,}5q = 0$. Dit geeft $q = 2$.

e De winst is maximaal voor $q = 2$, de winst is dan $W(2) = \dfrac{360}{2^2} = 90$.

4a $Z'(t)=\dfrac{200\cdot(2t+10)\cdot(t+10)^2-200\cdot(t^2+10t+100)\cdot 2\cdot(t+10)\cdot 1}{(t+10)^4}=$

$Z'(0)=\dfrac{200\cdot 10\cdot 10^2-200\cdot 100\cdot 2\cdot 10}{10^4}=\dfrac{200000-400000}{10000}=$

$\dfrac{-200000}{10000}=-20<0$. Dus het zuurstofgehalte daalt op $t=0$.

b $Z'(0)=-20$. Het zuurstofgehalte neemt dus af met een snelheid van 20 cm^3 per liter.

c Los met de rekenmachine op: $\dfrac{200(t^2+10t+100)}{(t+10)^2}=155$.

Dit geeft $t\approx 5{,}2$ en $t\approx 19{,}2$. Dus gedurende ongeveer 14 minuten was het zuurstofgehalte minder dan 155 cm^3 per liter.

5a Het aantal auto's dat bij die snelheid per minuut passeert is

$A(40)=\dfrac{1680\cdot 40}{400+40^2}=33{,}6\approx 34$.

In 15 minuten passeren er dan $15\cdot 33{,}6=504$ auto's.

b $A'(v)=\dfrac{1680\cdot(400+v^2)-1680v\cdot 2v}{(400+v^2)^2}=\dfrac{672000+1680v^2-3360v^2}{(400+v^2)^2}=\dfrac{-1680v^2+672000}{(400+v^2)^2}$

$A'(v)=0$

$-1680v^2+672000=0$

$1680v^2=672000$

$v^2=400\Rightarrow v=20$.

De doorstroming is dus maximaal bij de snelheid van 20 km/uur.

c Bij een optimale doorstroming passeren er per minuut $A(20)=\dfrac{1680\cdot 20}{(400+20^2)}=42$ auto's.

6a $\dfrac{2x+8}{x-5}=0$

$2x+8=0$ en $x-5\neq 0$

$2x=-8$ en $x\neq 5$

$x=-4$

b $\dfrac{(3p-1)(p+2)}{p}=0$

$(3p-1)(p+2)=0$ en $p\neq 0$

$3p-1=0$ of $p+2=0$

$p=\frac{1}{3}$ of $p=-2$

c $\dfrac{t^2-81}{2t+18}=0$

$t^2-81=0$ en $2t+18\neq 0$

$t^2=81$ en $t\neq -9$

$t=9$ of $t=-9$ en $t\neq -9\Rightarrow t=9$

7a Inhoud = $\pi\cdot 3{,}6^2\cdot 12\approx 488{,}6$ cm^3.

b $O(r)=2\cdot\pi\cdot r^2+977\cdot r^{-1}\Rightarrow$

$O'(r)=4\cdot\pi\cdot r-977\cdot r^{-2}=4\pi r-\dfrac{977}{r^2}$.

c $O'(r)=0$ oplossen met je rekenmachine geeft $r\approx 4{,}3$ cm. Dus wanneer het blik een straal heeft van 4,3 cm is de oppervlakte van het blik minimaal.

d De inhoud van het blik is ongeveer 488,6 cm^3 gebleven, dus geldt:

$\pi\cdot 4{,}3^2\cdot h=488{,}6\Rightarrow h=\dfrac{488{,}6}{\pi\cdot 4{,}3^2}\approx 8{,}4$ cm.

Extra oefening bij hoofdstuk 3

1a Tijd is een continue variabele.

b Discreet. De temperatuur is een continue variabele. Door de weergave in een eindig aantal cijfers neem je stappen en wordt de variabele discreet.

c Continu. Bij een kwikthermometer is er geen stapgrootte in de aflezing dus blijft de variabele continu.

d Continu. De longinhoud kent geen stapgrootte dus de variabele is continu.

2a De stochast X kan de waarden 2 tot en met 4 aannemen, want je hebt minimaal twee testen nodig om de twee defecte lampen te vinden en na maximaal 4 testen weet je of de laatste goed of defect is.

$$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(d,d)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10};$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(g,d,d)+\mathrm{P}(d,g,d)+\mathrm{P}(g,g,g)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{10};$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(g,g,d,d)+\mathrm{P}(g,d,g,d)+\mathrm{P}(d,g,g,d)+\mathrm{P}(d,g,g,g)+\mathrm{P}(g,d,g,g)+\mathrm{P}(g,g,d,g)=$$

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{10}.$$

De kansverdeling is:

x	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

b $\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{6}{10}=\frac{35}{10}=3,5$.
Met de rekenmachine bereken je $\sigma(X)$. Voer X in bij List1 of L1 en de kansen bij List2 of L2. dit geeft $\sigma(X)=0,67$.

3 De tweede vuistregel zegt dat 95% van de waarnemingen ligt tussen $\overline{X}-2\sigma$ en $\overline{X}+2\sigma$.
Hier betekent dat dus dat 95% ligt tussen $50,5-2\cdot 0,3=49,9$ cl en
$50,5+2\cdot 0,3=51,1$ cl.
2,5% bevat dus minder dan 49,9 cl.

4a Als c = een munt van 50 eurocent en e = een munt van één euro, dan kan X de volgende waarden aannemen:
$X=1$: e (het aantal beurten is 1)met $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
$X=1{,}5$: ce (het aantal beurten is 2)met $\mathrm{P}(X=1{,}5)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$
$X=2$: cce (het aantal beurten is 3) met $\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$
$X=2{,}5$: ccce (het aantal beurten is 4) met $\mathrm{P}(X=2{,}5)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$
$X=3$: cccce (het aantal beurten is 5) met $\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{15}$
De kansverdeling wordt dus:

x	1	1,5	2	2,5	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

b $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 2{,}5 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{25}{15} = 1\frac{2}{3} \approx 1{,}67$.
Bereken $\sigma(X)$ met de rekenmachine, dit geeft $\sigma(X) \approx 0{,}62$ euro.

c *B* kan de waarden 1 tot en met 5 aannemen, met dezelfde kansen als *X*.
De kansverdeling van *B*:

b	1	2	3	4	5
$P(B = b)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(B) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{35}{15} = 2\frac{1}{3}$
$\sigma(B) \approx 1{,}25$

5a Voor één pak suiker geldt $E(X) = 1000$ gram. Voor 20 pakken geldt
$E(T) = 20 \cdot E(X) = 20 \cdot 1000 = 20\,000$ gram.

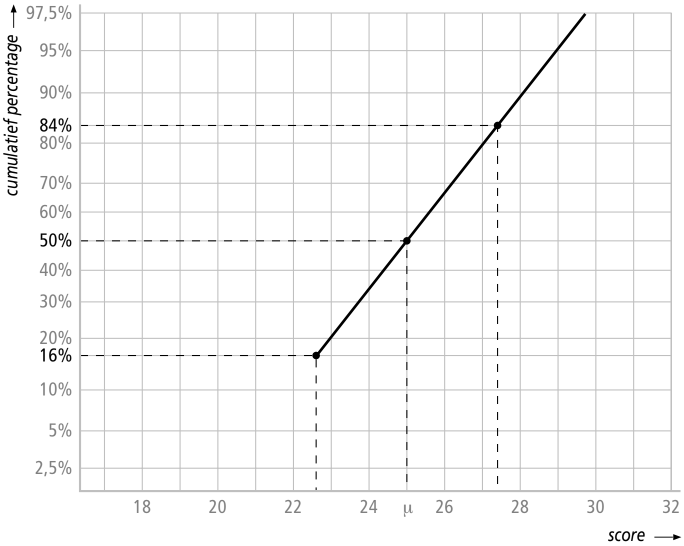
b $\sigma(T) = \sqrt{20} \cdot \sigma(X) = \sqrt{20} \cdot 12 \approx 53{,}67$ gram.

c Voor de verwachtingswaarde van het gemiddelde gewicht van de 20 pakken suiker geldt:
$E(G) = E(X) = 1000$ gram en de standaardafwijking $\sigma(G) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{20}} = \dfrac{12}{\sqrt{20}} \approx 2{,}68$ gram.

d Voor 100 pakken geldt de standaardafwijking van het gemiddelde gewicht
$\sigma(G) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} = \dfrac{\sigma}{10}$ dat is 10 keer kleiner dan de standaardafwijking σ van het gewicht van één pak.

Extra oefening bij hoofdstuk 4

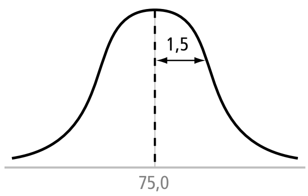
1a De grafiek is een rechte lijn dus je mag aannemen dat de scores normaal verdeeld zijn.



b Voor het gemiddelde kijk je bij 50% dus $\mu \approx 24,5$.
Voor de standaardafwijking kijk je bij 16%, want 16% van de scores is lager dan $\mu - \sigma$. Je leest dan af 22,3.
Dus $24,5 - \sigma = 22,3$ daaruit volgt $\sigma \approx 2,2$.

c De lijn wordt minder steil, want de standaardafwijking is twee keer zo groot, dus 16 % komt nu te liggen bij $24,5 - 4,4 = 20,1$. De lijn gaat nog wel door het punt (24,5; 50) omdat μ hetzelfde gebleven is, de lijn gaat dus vlakker lopen.

2a



b Voer in op je rekenmachine:
TI: DISTR normalcdf(72, 78.4, 75, 1.5)
Casio: MENU STAT DIST NORM Ncd met linkergrens 72; rechtergrens 78,4; $\mu = 75$; $\sigma = 1,5$
De uitkomst is ≈ 0,9655 dus 96, 55% van de pakjes heeft een gewicht tussen 72,0 en 78,4 gram.

c Voer in linkergrens 72,5; rechtergrens 10^{99}; $\mu = 75$; $\sigma = 1,5$ en de uitkomst is 0,9522 dus 95,22% van de pakjes zal meer dan 72,5 gram hebben.

d Voer in linkergrens 73,5; rechtergrens 78; $\mu = 75$; $\sigma = 1,5$ en de uitkomst is 0,8186 dus 81,66% van de pakjes zal een gewicht tussen 73,5 en 78,0 gram hebben.

e Voer in linkergrens -10^{99}; rechtergrens 74; $\mu = 75$; $\sigma = 1,5$ en de uitkomst is 0,2525 dus 25,25% zal minder dan 74 gram zijn.

f Voer in linkergrens -10^{99}; rechtergrens 74; $\mu = 76$; $\sigma = 1,5$ en de uitkomst is 0,0912 dus nu heeft 9,12% een gewicht onder 74 gram.

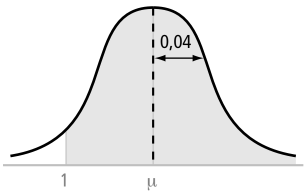
3a Je moet hier de continuïteitscorrectie toepassen omdat het alleen een geheel aantal pitten kan zijn.

b P(aantal pitten meer dan 105) = P($X \geq 105,5$)
Voer in linkergrens 105,5; rechtergrens 10^{99}; $\mu = 120$; $\sigma = 1,5$ en de uitkomst is 0,8498.
Dus de kans op meer dan 105 pitten is 84,98%.

c Voor stochast T geldt dat deze normaal verdeeld is met:
$\mu_T = 7000 \cdot 120 = 840\,000$ en $\sigma_T = \sqrt{n} \cdot \sigma(X) = \sqrt{7000} \cdot 14 \approx 1171$.

d P(minder dan 838 000 pitten) = P($X \leq 837999,5$): linkergrens -10^{99}; rechtergrens 837999,5; $\mu = 840000$; $\sigma = 1171$ en de uitkomst is 0,0438 dat is 4,38%.

4a



P(Inh $\geq 1) = 0,98$
Voer in Y1 = normalcdf (1, 10^{99}, X, 0,04) en Y2 = 0,98.
Plot de grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $X = 1,082$.
De vulmachine staat dus ingesteld op een gemiddelde inhoud van 1,08 liter.

b Voer in: linkergrens 1,05; rechtergrens 10^{99}; $\mu = 1,082$; $\sigma = 0,04$ en de uitkomst is 0,7881 dus 78,81% van de pakken bevat meer dan 1,05 liter.

c P(Inh $\geq X$) = 0,05
Voer in Y1 = normalcdf (X, 10^{99}, 1,082, 0,04) en Y2 = 0,05.
Plot de grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $X = 1,148$.
De inhoud van het pak vla is minimaal 1,14 liter.

Extra oefening bij hoofdstuk 5

1a De volgende hypothesen passen bij de probleemstelling:
$H_0: p = 0{,}25$ en $H_1: p \neq 0{,}25$ omdat je tweezijdig toetst.
Er bestaat twijfel over de getallen, maar je weet niet of er meer of minder witte bloemen verwacht worden.

b X is het aantal witte bloemen.
$H_0: p = 0{,}25$ en $H_1: p \neq 0{,}25$ en onder H_0 is X Bin(50; 0,25)-verdeeld.
Je toetst tweezijdig.
Omdat er 18 planten met witte bloemen in zitten bereken je $P(X \geq 18)$ omdat 18 meer is dan verwacht.
$P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) = 0{,}0551$. De rechter overschrijdingskans is 0,0551.

c $P(X \geq 18) = 0{,}0551 > 0{,}025$ dus het resultaat is niet significant te noemen, H_0 wordt niet verworpen.

2a Omdat de toetsafnemers zich afvragen of de gemiddelde score *lager* is dan gebruikelijk, toets je hier links éénzijdig.

b Je gebruikt de toets voor het gemiddelde.
X is de gemiddelde score die behaald wordt.
$H_0: \mu = 25{,}7$ tegen $H_1: \mu < 25{,}7$ en onder H_0 is X Norm(25,7; 5,5)-verdeeld.
Je toetst éénzijdig en er is dus sprake van een linkeroverschrijdingskans.
$P(X < 17{,}6) = 0{,}0704 > 0{,}05$ dus H_0 wordt niet verworpen.

c Het linkergebied moet dan 0,05 zijn.
Dus $P(X < s) < 0{,}05$.
Voer in Y1 = normalcdf (10^{-99} ; X ; 25,7 ; 5,5) en Y2 = 0,05.
Plot de grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $X = 16{,}65$.
Dus bij een gemiddelde score van 16,65 punten of lager kun je stellen dat de toets significant slechter is gemaakt.

3a Het gaat hier om een éénzijdig toetsprobleem omdat ze vindt dat er wel erg weinig vieren gegooid worden.

b X is hier het aantal keren dat er een vier gegooid wordt.
$H_0: p = 0{,}25$ en $H_1: p < 0{,}25$ en onder H_0 is X Bin(30; 0,25)-verdeeld.
Je toetst éénzijdig. Omdat er bij dertig worpen vier keer een aantal van vier ogen geworpen wordt.

c Bereken $P(X \leq 4) = 0{,}098 < 0{,}10$, dus er is sprake van een significante afwijking.
Er is dus reden om aan de zuiverheid van de dobbelsteen te twijfelen.

4a X is hier de gemiddelde lengte van de staven.
$H_0: \quad = 18$ tegen $H_1: \quad < 18$.
Je toetst eenzijdig omdat getoetst moet worden of het gemiddelde 18 meter is en te kort erg is.
Noem het gemiddelde in de steekproef g en $\sigma = \dfrac{0{,}2}{\sqrt{64}} = 0{,}025$.
Er is sprake van een linker overschrijdingskans.
$P(X < g) < 0{,}05$
Voer in Y1 = normalcdf (-10^{99} ; X ; 18 ; 0,025) en Y2 = 0,05.

Plot de grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $X \approx 17{,}92$.
Dus wanneer het gemiddelde in de steekproef onder 17,92 meter komt moet geconcludeerd worden dat het gemiddelde geen 18 meter meer is.

Oefentoets bij hoofdstuk 3, 4 en 5

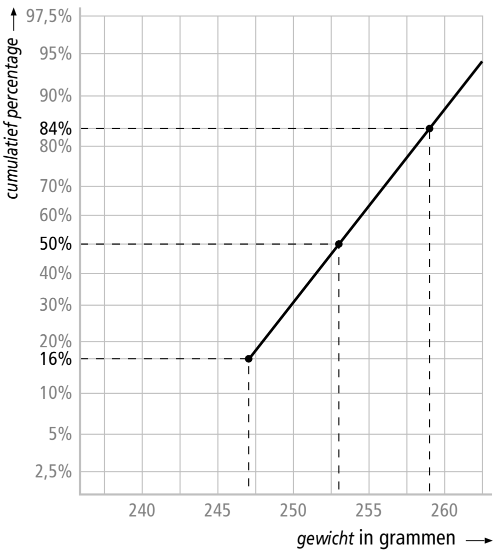
1a G is het gewicht van een pakje thee.
G is normaal verdeeld met gemiddelde 102, 0 en standaardafwijking 2,2.
Dus $P(G < 100)$ moet berekend worden.
Voer als linkergrens in -10^{99}, als rechtergrens 100, $= 102$ en $\sigma = 2,2$.
Je vindt dan $P(G < 100) = 0,1817$. Dus 18,17% van de pakjes heeft een gewicht onder 100 gram.
In de doos zullen dus $0,1817 \cdot 80 \approx 15$ pakjes met minder dan 100 gram thee zitten.

b Het gemiddelde μ moet zodanig bepaald worden dat $P(G < 100) < 0,05$.
Voer in Y1 = normalcdf (-10^{99} ; 100 ; X ; 2,2) en Y2 = 0,05.
Window $X_{min} = 100$; $X_{max} = 120$; $Y_{min} = 0$; $Y_{max} = 0,10$.
Plot de grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $X = 103,6$.
De vulmachine moet dus op 103,6 gram worden ingesteld.

c De standaardafwijking σ moet zodanig bepaald worden dat $P(G < 100) < 0,05$.
Voer in Y1 = normalcdf (-10^{99} ; 100 ; 102 ; X) en Y2 = 0,05.
Window $X_{min} = 0$; $X_{max} = 3$; $Y_{min} = 0$; $Y_{max} = 0,10$.
Plot de grafieken en bepaal het snijpunt. Je vindt $X = 1,2$.
De nieuwe machine moet dan een standaardafwijking hebben van 1,2 gram.

2a $2 + 9 + 13 = 24$ van de 100 pakken weegt minder dan 250 gram. Dit is dus 24%.

b



Hierboven zie je de figuur die je krijgt wanneer de gegevens uitgezet worden op normaal waarschijnlijkheidspapier. De grafiek is zo goed als een rechte lijn.

c Bij 50% lees je het gemiddelde af, hier is dat $\mu \approx 253$ gram en bij 84% lees je af $\mu + \sigma \approx 259$, dus $\sigma \approx 6$ gram.

3a Bereken met de rekenmachine $P(G > 85) \approx 0,0165$. Dus 1,65% van de gekeurde jongemannen is zwaarder dan 85 kg.

b G is het gewicht. Getoetst moet worden H_0 : $= 73,7$ tegen H_1 : $> 73,7$. Een rechtseenzijdige toets.
Het gemiddelde G van het gewicht van deze 50 jongens is onder H_0 normaal verdeeld met $= 73,7$ en $\sigma = \frac{5,3}{\sqrt{50}} \approx 0,7495$.
Met de rekenmachine vind je dan $P(G > 75,4) \approx 0,0117 < 0,05$.
De conclusie moet dus zijn dat H_0 verworpen moet worden. Het gemiddelde gewicht is significant gestegen.

4a De balletjes kunnen de waarden 10 en 25 hebben.

U_1	10	25
$P(U_1 = u_1)$	0,8	0,2

U_2	10	25
$P(U_2 = u_2)$	0,2	0,8

$\text{P}(T = 20) = \text{P}(U_1 = 10,\ U_2 = 10) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$
$\text{P}(T = 35) = \text{P}(U_1 = 10,\ U_2 = 25 \text{ of } U_1 = 25, U_2 = 10\ ) = 0,8 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,68$
$\text{P}(T = 50) = \text{P}(U_1 = 10,\ U_2 = 25) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$

$T = U_1 = U_2$	10	25
$P(T = T)$	0,8	0,2

b $\text{E}(U_1) = 10 \cdot\ 0,8 + 25 \cdot\ 0,2 = 13$
$\text{E}(U_2) = 10 \cdot\ 0,2 + 25 \cdot\ 0,8 = 22$
$\text{E}(T) = 20 \cdot\ 0,16 + 35 \cdot\ 0,68 + 50 \cdot\ 0,16 = 35$

c Voer de kansverdelingen in in de rekenmachine en bereken zo
$\sigma(U_1) = 6$; $\sigma(U_2) = 6$; $\sigma(T) \approx 8,49$.
Ook kun je $\sigma(T)$ berekenen met: $\sigma(T) = \sqrt{\sigma(U_1)^2 + \sigma(U_1)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} \approx 8,49.$

5a Gebruik een tekentoets. X is het aantal dagen boven 430.
$\text{H}_0 : p = 0,5$ en $\text{H}_1 : p > 0,5$ Onder H_0 is X Bin(20, 0,5).
Het aantal dagen boven 430 is 13, aantal dagen onder 430 is 7.
$\text{P}(X \geq 13) = 1 - \text{P}(X \leq 12) \approx 1 - 0,8684 \approx 0,1316 > 0,05$.
Er is dus geen sprake van een significant verschil.

b Neem aan dat het aantal geboorten op a dagen in augustus kleiner dan 430 was. Er gold dus blijkbaar $\text{P}(X \geq a) < 0,05$.
Maak een tabel van de verdeling van X onder H_0 , Bin(20, 0,5).

a	11	12	13	14	15
$\text{P}(X \geq a) = 1 - \text{P}(X \leq a - 1)$	0,4119	0,2517	0,1316	0,0577	0,0207

Uit de tabel blijkt dat in de 20 dagen voorafgaand aan 4 augustus het aantal geboorten op 15 of meer dagen onder de 430 was.

c X is het aantal geboorten per dag in New York. X is Norm(430, 40).
Met de rekenmachine bereken je: ondergrens -10^{99}, bovengrens 379, $= 430$, $\sigma = 40$
$\text{P}(X < 379) \approx 0,10$.

d Z is het aantal zondagen met minder dan 379 geboorten. Z is Bin(50, 0,10) verdeeld.
$\text{H}_0 : p = 0,1$ en $\text{H}_1 : p > 0,1$
$\text{P}(Z \geq 10) = 1 - \text{P}(Z \leq 9) \approx 1 - 0,9755 \approx 0,0245 < 0,05$.
Dus het aantal van 10 zondagen met minder dan 379 geboorten is significant hoog.

Extra oefening bij hoofdstuk 6

1a $u_{n+1} = 1,2u_n - 200$ met $u_0 = 300$. Bij deze recursievergelijking hoort een directe formule van de vorm $u_n = M + (u_0 - M) \cdot a^n$, met $M = \frac{-200}{1-1,2} = 1000$.
De directe formule wordt $u_n = 1000 + (300 - 1000) \cdot 1,2^n = 1000 - 700 \cdot 1,2^n$.
$X(t+1) = 0,8 \cdot X(t) + 100$. Ook bij de vergelijking hoort een directe formule van de vorm $X(t) = M + (X(0) - M) \cdot a^t$. Met $M = \frac{100}{1-0,8} = 500$.
Dus $X(t) = 500 + (300 - 500) \cdot 0,8^t = 500 - 200 \cdot 0,8^t$.

b De rij begint met u_0, dus de twintigste term is u_{19}.
$u_{19} = 1000 - 700 \cdot 1,2^{19} \approx -21363,6$; $X(19) = 500 - 200 \cdot 0,8^{19} \approx 497,1$

c Met beginwaarde 1000, wordt de rij $u_n = 1000$, dus $u_{19} = 1000$.
De rij $X(t) = 500 + 500 \cdot 0,8^t$, dus $X(19) = 500 + 500 \cdot 0,8^{19} \approx 507,2$.

d Bij beginwaarde 1500 wordt de rij $u_n = 1000 + (1500 - 1000) \cdot 1,2^n = 1000 + 500 \cdot 1,2^n$, dus exponentieel stijgend.
De rij $X(t) = 500 + (1500 - 500) \cdot 0,8^t = 500 + 1000 \cdot 0,8^t$ vertoont asymptotisch gedrag en daalt naar de evenwichtswaarde 500.

e De rijen u_n zullen altijd “weglopen” van de evenwichtswaarde wanneer de startwaarde ongelijk is aan de evenwichtswaarde 1000, vanwege de “groeifactor” 1,2. Naar plus-oneindig als de startwaarde groter is dan 1000 en naar min-oneindig als de startwaarde kleiner is dan 1000. Alleen wanneer de startwaarde 1000 is zal de rij constant 1000 zijn.
De rijen $X(t)$ zullen, vanwege de “groeifactor” 0,8 altijd naar de evenwichtswaarde 500 dalen als de startwaarde groter is dan 500 en stijgen als de startwaarde kleiner is dan 500.

2a $u(t+1) = 10 - 0,6u(t)$ heeft als evenwichtswaarde $M = \frac{10}{1+0,6} = 6,25$.

b $u(t+1) = 0,3u(t) + 2$ heeft als evenwichtswaarde $M = \frac{2}{1-0,3} = 2\frac{6}{7} \approx 2,86$.

c $u(t+1) = 0,8u(t)$ heeft als evenwichtswaarde $M = \frac{0}{1-0,8} = 0$.

3a Om te voorkomen dat de populatie verder groeit moet je deze op 1400 houden, dus elk jaar 40% van 1400 vangen, om de groei op te vangen. Je moet dus elk jaar $0,4 \cdot 1400 = 560$ ratten vangen.

b De recursievergelijking wordt $R(t+1) = 1,4 \cdot R(t) - 600$ met $R(0) = 1400$. Met de rekenmachine vind je $R(5) \approx 962$. Dus na 5 jaar minder dan 1000 ratten.

c Om het aantal na 5 jaar op ongeveer 1000 te houden, moet je vanaf dat moment 400 ratten (40%) per jaar vangen.

4a De directe formule bij deze recursievergelijking is van de vorm
$X(t) = \frac{b}{1-a} + (X(0) - \frac{b}{1-a}) \cdot a^t$. Dus $a = 0,7$.

b De evenwichtswaarde $M = \frac{b}{1-a} \Rightarrow 1000 = \frac{b}{1-0,7} \Rightarrow b = 300$.

c $X(0) - 1000 = 500 \Rightarrow X(0) = 1500$

d Dat de waarden van $X(t)$ de evenwichtswaarde naderen komt door de waarde van $a = 0,7 < 1$.

5a Recursievergelijking: $B(t) = 1{,}036 \cdot B(t-1) - 450$ met $B(0) = 10\,000$ en t de tijd in jaren.

Differentievergelijking: $\Delta B(t) = 1{,}036 \cdot B(t) - 450 - B(t) = 0{,}036 \cdot B(t) - 450$.

b De differentie heeft de betekenis van de afname per jaar van het saldo.

6a $B(t+1) = 0{,}2 \cdot B(t) + 12$ met $B(0) = 0$ en B in gr/cm^2.

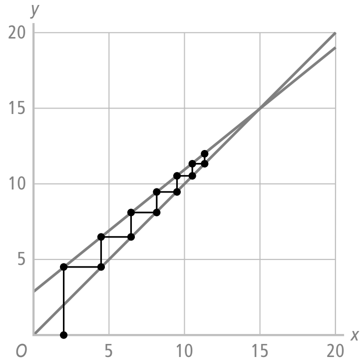
Hieruit volgt de differentievergelijking $\Delta B(t) = 12 - 0{,}8B(t)$.

b Wanneer de beginwaarde 60 gram/cm^2 is, dan is de grenswaarde $M = \dfrac{12}{1-0{,}2} = 15$ gr/cm^2.

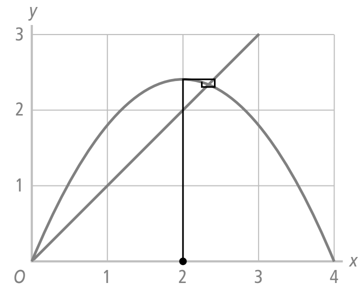
(De beginwaarde is bij dit proces overigens niet van belang).

Extra oefening bij hoofdstuk 7

1a Teken de lijnen $y = x$ en $y = 0{,}8x + 3$.
Teken vervolgens de webgrafiek met startwaarde 2 door vanuit het punt $(0, 2)$ verticaal naar de lijn $y = 0{,}8x + 3$ te gaan, vanuit dat snijpunt horizontaal naar de lijn $y = x$ en dan weer verticaal naar de lijn $y = 0{,}8x + 3$ enz.
De rij convergeert monotoon naar het punt $(15, 15)$.

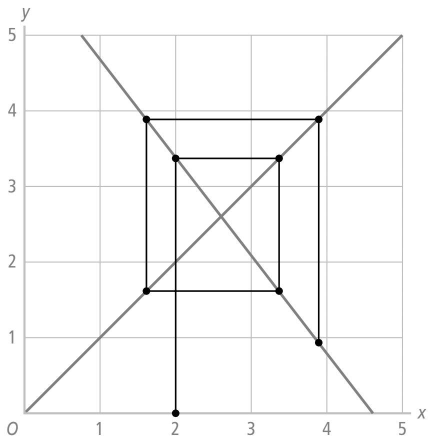


b Teken de lijnen $y = x$ en de parabool $y = 0{,}6x \cdot (4 - x)$.
Teken vervolgens de webgrafiek met startwaarde 2 door vanuit het punt $(0, 2)$ verticaal naar de parabool $y = 0{,}6x \cdot (4 - x)$ te gaan, vanuit dat snijpunt naar de lijn $y = x$ en dan weer verticaal naar de parabool $y = 0{,}6x \cdot (4 - x)$. enz.
De rij convergeert alternerend naar het punt $(2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3})$.



c Teken de lijnen $y = x$ en $y = -1{,}3x + 6$.
Teken vervolgens de webgrafiek met startwaarde 2 door vanuit het punt $(0, 2)$ verticaal naar de lijn $y = -1{,}3x + 6$ te gaan, vanuit dat snijpunt horizontaal naar de lijn $y = x$ en dan weer verticaal naar de lijn $y = -1{,}3x + 6$. enz.
De rij is alternerend divergent.

d Zie a,b en c.



2a $d = a + c$
$d = a + 0{,}5a$
$d = 1{,}5a$

b $e + f = 0{,}8c + 2b$
$e + f = 0{,}8 \cdot (0{,}5a) + 2 \cdot a$
$e + f = 0{,}4a + 2a$
$e + f = 2{,}4a$

c $f = 2b$
$f = 2a$
$f = 2 \cdot 2c$
$f = 4c$

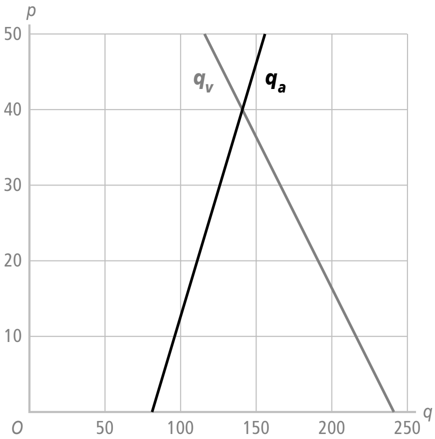
d $g = d - e$
$g = a + c - 0{,}8c$
$g = 2c + c - 0{,}8c$
$g = 2{,}2c$

3a De evenwichtsvoorwaarde is $q_a = q_v$.
Dus $1,5p + 80 = -2,5p + 240$
$4p = 160$
$p = 40$
De evenwichtsprijs is dus 40 en de evenwichtshoeveelheid is dan
$q = 1,5 \cdot 40 + 80 = 140$.

b Om de grafieken te kunnen tekenen met *p* langs de verticale as, moet je de formules omzetten.

$q_a = 1,5p + 80 \Rightarrow 1,5p = q_a - 80 \Rightarrow p = \frac{2}{3}q_a - 53\frac{1}{3}$ en

$q_v = -2,5p + 240 \Rightarrow 2,5p = -q_v + 240 \Rightarrow p = -\frac{2}{5}q_v + 96$



c $q_a = 1,5p + 80 = 1,5 \cdot 48 + 80 = 152$
De aangeboden hoeveelheid is 152.

d $q_v = -2,5p + 240$

$152 = -2,5p(1) + 240$

$2,5p(1) = 88 \Rightarrow p(1) = 35,20$.
Dus bij deze hoeveelheid hoort een prijs $p(1) = 35,20$.

e $q_a(2) = 1,5p(1) + 80 = 1,5 \cdot 35,20 + 80 = 132,8$

f

t	$q_a(t)$	$q_v(t)$	$p(t)$
0			48
1	152	152	35,20
2	132,8	132,8	42,88
3	144,3	144,3	38,27
4	137,4	137,4	41,04

g $q_a(t) = 1,5 \cdot p(t-1) + 80$ en $q_v(t) = -2,5p(t) + 240$.

$q_a(t) = q_v(t) \Rightarrow 1,5 \cdot p(t-1) + 80 = -2,5p(t) + 240$

$2,5p(t) = -1,5p(t) + 160$
Dit geeft de recursievergelijking $p(t) = -0,6p(t-1) + 64$.

Oefentoets bij hoofdstuk 6 en 7

1a Neem aan dat mevr. Opdam op 1 januari 300 000 euro stort, want ze neemt 30 000 op voor dat jaar.
Dan krijgt ze op 1 januari van het volgend jaar 3,5% rente, dit is 10 500 euro, ze neemt 30 000 euro op en heeft dan na de opname op haar rekening
300 000 + 10 500 – 30 000 = 280 500 euro.
Na twee jaar heeft zij na de opname $1{,}035 \cdot 280\,500 - 30\,000 = 260\,317{,}50$ euro.

b $S_t = 1{,}035 \cdot S_{t-1} - 30\,000$ met $S_0 = 300\,000$.

c Voer de recursievergelijking in op de rekenmachine. Uit een tabel volgt dat zij na 12 jaar voor de laatste keer 30 000 euro kan opnemen. Ze kan op deze manier dus 13 jaar van haar gespaarde geld leven.

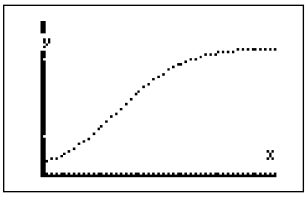
d De directe formule is van de vorm $S_t = M + (S_0 - M) \cdot a^t$, met $M = \dfrac{-30000}{1 - 1{,}035} = 857142{,}86$.
Dus $S_t = 857142{,}86 + (300000 - 857142{,}86) \cdot 1{,}035^t$
$S_t = -557142{,}86 \cdot 1{,}035^t + 857142{,}86$

e De hoeveelheid spaargeld die zij nodig heeft, zodat haar geld na de opname niet minder is geworden is de evenwichtswaarde, want dan daarmee beginnen geeft een constante rij.
Zij moet dan dus 857142,86 euro hebben.

f Het rentebedrag over de 300 000 euro zou dan 30 000 euro moeten zijn, dus 10% rente.

2a De recursievergelijking $m(t+1) = m(t) + 0{,}14 \cdot m(t) \cdot \left(1 - 0{,}02m(t)\right)$ geeft de groeivoet 0,14.
Voor het verzadigingsniveau M geldt $\dfrac{M - m(t)}{M} = 1 - 0{,}02m(t)$.
$1 - 0{,}02m(t) = 0{,}02(50 - m(t)) = \dfrac{1}{50} \cdot (50 - m(t)) = \dfrac{50 - m(t)}{50}$.
Het verzadigingsniveau is dus 50 muggen.

b



c In de tabel die bij de grafiek hoort zie je dat de muggenpopulatie na 16 dagen op de helft van het verzadigingsniveau zit.

d De groeifactor is 1,75 dus de groeivoet is dan 0,75.
De differentievergelijking wordt:
$\Delta m(t) = 0{,}75 \cdot m(t) \cdot \left(\dfrac{80 - m(t)}{80}\right) = 0{,}75 \cdot m(t) \cdot (1 - 0{,}0125 \cdot m(t))$.

3a Invoeren van de recursievergelijking in de rekenmachine en bekijken van de tabel geeft dat Arkema na 44 dagen een gewicht heeft onder de 82 kg.

b Een directe formule is van de vorm $W_k = M + (W_0 - M) \cdot a^k$, met $M = \dfrac{0,16}{1 - 0,996} = 40$.

Een directe formule is dus $W_k = 40 + (90 - 40) \cdot 0,996^k = 40 + 50 \cdot 0,996^k$

c De directe formule wordt bij onbekend begingewicht $W_k = 40 + (W_0 - 40) \cdot 0,996^k$.

Volgens de advertentie geldt dat $W_{14} = 0,97 \cdot W_0$, dus moet gelden:

$40 + 0,996^{14} \cdot W_0 - 40 \cdot 0,996^{14} = 0,97 \cdot W_0$

$(0,996^{14} - 0,97)W_0 = 40 \cdot 0,996^{14} - 40$

$-0,02457 \cdot W_0 = -2,18268$

$W_0 = \dfrac{-2,18268}{-0,02457} \approx 88,8$

De advertentie geldt dus voor begingewicht van 88,8 kg of meer.

4

$u(t) = 5 + 0,6u(t-1)$

De rij is monotoon en convergeert naar het evenwichtpunt.

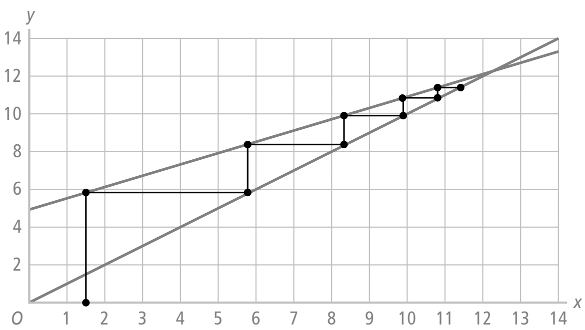
De evenwichtswaarde volgt uit

$u = 5 + 0,6u$

$0,4u = 5$

$u = 12,5$

Het evenwicht is stabiel.



$u(t+1) = 0,4u(t) \cdot (8 - u(t))$

De rij convergeert niet naar een bepaalde waarde, maar schommelt tussen twee waarden.

De evenwichtswaarden volgen uit:

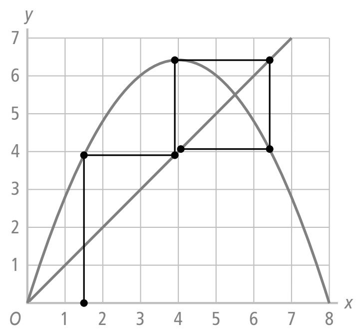
$u = 3,2u - 0,4u^2$

$0,4u^2 - 2,2u = 0$

$0,4u(u - 5,5) = 0$

$u = 0$ of $u = 5,5$

Het evenwicht is niet stabiel.



$u_{t+1} = 4 - 1,8u_t$

De rij divergeert.

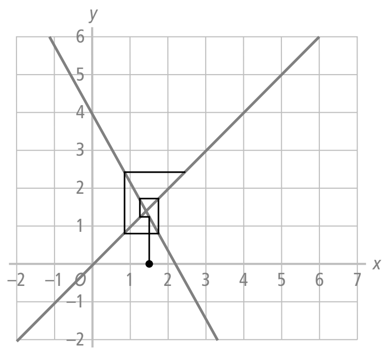
De evenwichtswaarde volgt uit:

$u = 4 - 1,8u$

$2,8u = 4$

$u \approx 1,43$

Er is sprake van een instabiel evenwicht.

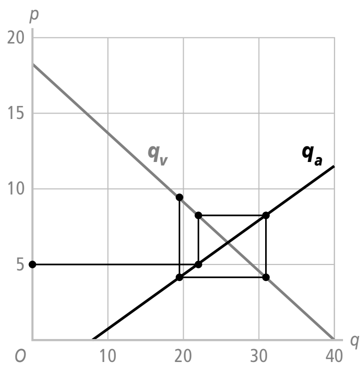


5a De evenwichtsprijs is de oplossing van de vergelijking $q_a = q_v$.
$2{,}8p + 8 = -2{,}2p + 40$
$5p = 32$
$p = 6{,}4$ De evenwichtsprijs is dus 6,4.
De grootte van het aanbod is $q_a = 2{,}8 \cdot 6{,}4 + 8 = 25{,}92$.

b Voor de evenwichtsprijs geldt nu $5p = 24 \Rightarrow p = 4{,}8$.
De nieuwe evenwichtsprijs wordt dus lager.

c $q_a(t) = 2{,}8 \cdot p(t-1) + 8$ en $q_v(t) = -2{,}2p(t) + 40$.
Voor de recursievergelijking voor de prijs moet gelden:
$q_a(t) = q_v(t) \Rightarrow 2{,}8 \cdot p(t-1) + 8 = -2{,}2p(t) + 40$
$2{,}2p(t) = -2{,}8p(t) + 32$
$p(t) = -1\frac{3}{11} \cdot p(t-1) + 14\frac{6}{11} \approx -1{,}27p(t-1) + 14{,}55$ met $p(0) = 5$

d



e Nee, er is geen beginprijs waarvoor de prijs zich implosief zal ontwikkelen. Bij elke beginprijs ontwikkeld de prijs zich explosief. Alleen bij een beginprijs van 6,4, de evenwichtsprijs, blijft de prijs constant.

f Een directe formule voor de prijs wordt : $p(t) = 6{,}4 + (5 - 6{,}4) \cdot (-1\frac{3}{11})^t$
$\approx 6{,}4 - 1{,}4 \cdot (-1{,}27)^t$.

6a $Y(t) = C(t) + I(t) = 0{,}35 \cdot Y(t-1) + 53 + 12$, dus $Y(t) = 0{,}35 \cdot Y(t-1) + 65$ met $Y(0) = 125$.

b De evenwichtswaarde van het nationaal inkomen is $Y = \dfrac{65}{1 - 0{,}35} = 100$.

c De evenwichtswaarde van het nationaal inkomen is $Y = \dfrac{53 + I}{1 - 0{,}35} > 120$, dus $53 + I > 120 \cdot 0{,}65$, dit geeft $I > 25$. De constante investering moet dus meer dan 25 miljard zijn.

d $Y(t) = C(t) + I(t) = 0{,}35 \cdot Y(t-1) + 53 + 0{,}2 \cdot \big(Y(t) - Y(t-1)\big) + 12$
$Y(t) = 0{,}35 \cdot Y(t-1) + 53 + 0{,}2 \cdot Y(t) - 0{,}2 \cdot Y(t-1) + 12$
$0{,}8 \cdot Y(t) = 0{,}15 \cdot Y(t-1) + 65$
$Y(t) = 0{,}1875 \cdot Y(t-1) + 81{,}25$.

e Eerste model: $Y(t) = 0{,}35 \cdot Y(t-1) + 65$.
Directe formule: $Y(t) = 100 + (125 - 100) \cdot 0{,}35^t = 100 + 25 \cdot 0{,}35^t$.
Tweede model: de evenwichtswaarde is nu $Y = \dfrac{81{,}25}{1 - 0{,}1875} = 100$.
De directe formule $Y(t) = 100 + (125 - 100) \cdot 0{,}1875^t = 100 + 25 \cdot 0{,}1875^t$.
De 'groeifactor' is bij de formule met niet-constante investering kleiner, dus zal eerder de evenwichtswaarde worden bereikt.

7a Per week blijft 80% van de gezonden gezond en blijft 56% van de zieken ziek.

b De coëfficiënten van G (0,8 en 0,2) en Z (0,44 en 0,56) zijn samen 1, daaruit volgt dat alle bewoners in leven blijven.

c $G(0) = 10\,000 - 1700 = 8300$ en $Z(0) = 1700$.
$G(1) = 0,8 \cdot 8300 + 0,44 \cdot 1700 = 7388 \Rightarrow Z(1) = 10\,000 - 7388 = 2612$
$G(2) = 0,8 \cdot 7388 + 0,44 \cdot 2612 = 7060 \Rightarrow Z(2) = 10\,000 - 7060 = 2940$
$G(3) = 0,8 \cdot 7060 + 0,44 \cdot 2940 = 6941 \Rightarrow Z(3) = 10\,000 - 6941 = 3059$
Natuurlijk kun je ook de vergelijkingen invoeren en een tabel maken.

d In een stabiele situatie is het aantal mensen dat ziek wordt even groot als het aantal mensen dat gezond wordt, dus moet gelden $0,2 \cdot G = 0,44 \cdot Z$. Omdat het totaal aantal constant blijft geldt dus ook $G + Z = 10\,000$. combineren van beide vergelijking geeft: $0,2 \cdot G = 0,44 \cdot (10\,000 - G)$
$0,2 \cdot G = 4400 - 0,44 \cdot G$
$0,64 \cdot G = 4400$
$G = 6875$
De stabiele verdeling is dus 6875 gezonde mensen en 3125 zieke mensen.
Uit een tabel blijkt dat de stabiele situatie na ongeveer 8 weken optreedt.

e De coëfficiënten van Z (0,44 en 0,25) zijn nu samen geen 1. Dit betekent dat er mensen overlijden.
Omdat de eerste vergelijking hetzelfde blijft betekent dit dat de bevolking op den duur zal uitsterven.