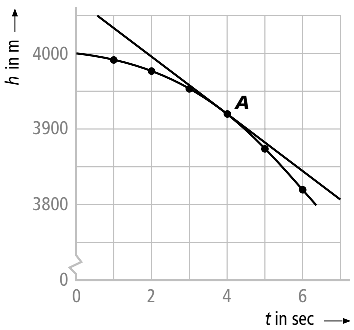
# Hoofdstuk 1 - Functies differentiëren

***bladzijde 12***

**V-1a** Na 45 seconden

**b**

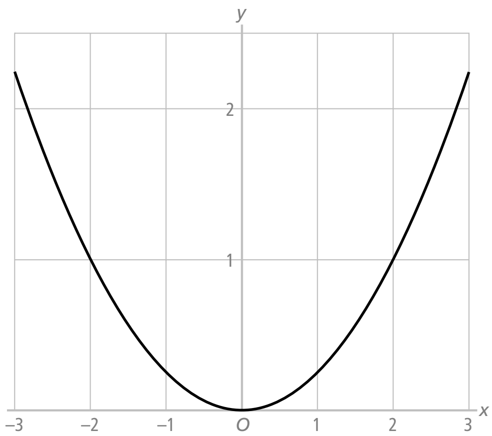



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{3850 - 3975}{6 - 2} \approx -31 \text{ m/s}$$

**c** $t = 20: \dfrac{\Delta h}{\Delta t} \approx \dfrac{1500 - 3000}{40 - 20} = \dfrac{-1500}{20} = -75 \text{ m/s}$

**d** $t = 180: \dfrac{\Delta h}{\Delta t} \approx \dfrac{0 - 500}{180 - 100} = \dfrac{-500}{80} = -6,25 \text{ m/s}$

**V-2a**




**b** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{4} \cdot 1,001^3 - \frac{1}{4} \cdot 1^3}{0,001} = 0,75$

**c** Voor $x = 1$ en voor $x = -1$ is de helling $0,75$.

**d** $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 3x^2 = \frac{3}{4}x^2$ en dus $f'(3) = \frac{3}{4} \cdot 3^2 = 6\frac{3}{4}$

***bladzijde 13***

**V-3a** $f'(x) = 100x^{99}$

**b** $g'(p) = 6 \cdot 3p^2 = 18p^2$

**c** $h'(x) = 1 + 0 = 1$

**d** $l'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 0 = 8x^3$

**e** $k'(a) = 0 - 0,3 \cdot 10a^9 = -3a^9$

**f** $m'(x) = 3 - 6 \cdot 5x^4 = 3 - 30x^4$

**V-4a** $s=(5t)^2=5t\cdot 5t=25t^2$, $\dfrac{ds}{dt}=25\cdot 2t=50t$

**b** $s=\frac{1}{3}(t^4-5)=\frac{1}{3}t^4-\frac{5}{3}$, $\dfrac{ds}{dt}=\frac{1}{3}\cdot 4t^3-0=1\frac{1}{3}t^3$

**c** $s=3(t+5)=3t+15$, $\dfrac{ds}{dt}=3+0=3$

**d** $s=(t+3)(t-3)=t^2-3t+3t-9=t^2-9$, $\dfrac{ds}{dt}=2t-0=2t$

**e** $s=(1-2t)^2=(1-2t)(1-2t)=1-2t-2t+4t^2=1-4t+4t^2$, $\dfrac{ds}{dt}=0-4+4\cdot 2t=-4+8t$

**V-5a** $\dfrac{dh}{dt}=0-4,9\cdot 2t=-9,8t$ en $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{t=2}=-9,8\cdot 2=-19,6$ m/s

**b** Na 2 seconden is de valsnelheid van de steen 19,6 m/s (de steen valt naar beneden, vandaar het minteken).

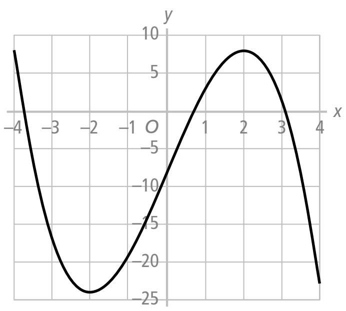
**c** $h=0$ oplossen:

$50-4,9t^2=0$ geeft $50=4,9t^2$ waaruit volgt $t^2=\dfrac{50}{4,9}=10,2$ en dus $\sqrt{\dfrac{50}{4,9}}\approx 3,2$ seconden.
De negatieve oplossing is niet van toepassing.
Conclusie: na 3,2 seconden is de steen op de grond gevallen.

**d** $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{t=3,2}=-9,8\cdot 3,2=-31,4$ m/s

**V-6a** $f'(x)=-3x^2+12$, $f'(x)=0$ oplossen:
$-3x^2+12=0$ geeft $x^2=4$ en dus $x=2$ of $x=-2$.

**b**

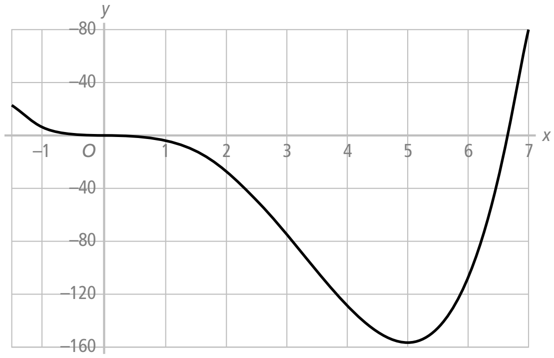



Voor $x=2$ en $x=-2$ geldt $f'(x)=0$, dat wil zeggen voor $x=2$ en $x=-2$ is de helling van de grafiek van $f$ gelijk aan 0. Met de grafiek volgt dan dat de grafiek dan een top heeft. Dus $x=2$ en $x=-2$ zijn de $x$-coördinaten van de toppen van de grafiek van $f$.

**c** Maximum: $f(2)=-2^3+12\cdot 2-8=8$ en minimum: $f(-2)=-(-2)^3+12\cdot -2-8=-24$

**V-7a** $g'(x) = 0,75 \cdot 4x^3 - 5 \cdot 3x^2 = 3x^3 - 15x^2$ , $g'(x) = 0$ oplossen:
$3x^3 - 15x^2 = 0$ geeft $3x^2(x-5) = 0$ waaruit volgt $3x^2 = 0$ of $x - 5 = 0$ en dus $x = 0$ of $x = 5$ .

**b**



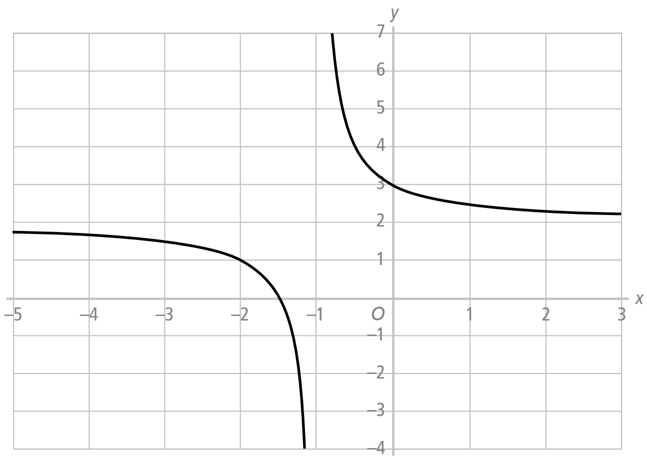

Voor $x = 5$ heeft de grafiek van $g$ een top, voor $x = 0$ niet.

**c** De uiterste waarde van $g$ is een minimum: $g(5) = -156,25$

**V-8a** $h'(t) = 4 \cdot 2t - 4 = 8t - 4$ , $h'(t) = 0$ oplossen:
$8t - 4 = 0$ geeft $8t = 4$ en dus $t = \frac{1}{2}$ .
$h(\frac{1}{2}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 4 = -5$
De uiterste waarde van $h$ is een minimum: $y = -5$ .

***bladzijde 14***

**1a**




**b** $x = -1$ is de verticale asymptoot. Dan is de noemer gelijk aan 0 en de teller niet.

**c** $y = 2$ is de horizontale asymptoot.

**d** $h(x) = \dfrac{3x+4}{x} = \dfrac{3x}{x} + \dfrac{4}{x} = 3 + \dfrac{4}{x}$

**e** $x = 0$ is de verticale asymptoot en $y = 3$ is de horizontale asymptoot.

**2a** $A(t) = \dfrac{5t-3}{t} = \dfrac{5t}{t} - \dfrac{3}{t} = 5 - \dfrac{3}{t}$

**b** $t = 0$ is de verticale asymptoot en $A = 5$ is de horizontale asymptoot.

**3a** $W(p)=\frac{6p^3+5p^2+p}{p}=\frac{6p^3}{p}+\frac{5p^2}{p}+\frac{p}{p}=6p^2+5p+1$

**b** $N(q)=\frac{-2q^{3,5}+4q^{2,1}+6}{2q}=\frac{-2q^{3,5}}{2q}+\frac{4q^{2,1}}{2q}+\frac{6}{2q}=-q^{2,5}+2q^{1,1}+3q^{-1}$

**c** $P(k)=\frac{6k^5+10k^3-2}{5k^2}=\frac{6k^5}{5k^2}+\frac{10k^3}{5k^2}-\frac{2}{5k^2}=1\frac{1}{5}k^3+2k-\frac{2}{5}k^{-2}$

**d** $w(q)=\frac{0,5q^2(4q+8)}{q}=\frac{2q^3+4q^2}{q}=\frac{2q^3}{q}+\frac{4q^2}{q}=2q^2+4q$

**4a** $x=1$ is de verticale asymptoot. Dan is de noemer gelijk aan 0 en de teller niet.

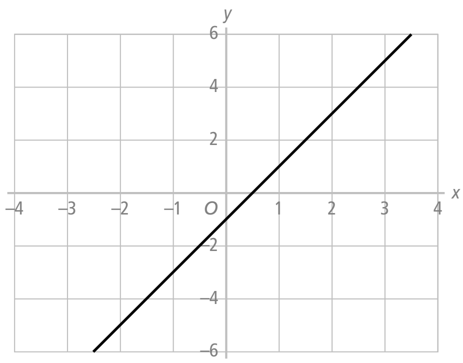
**b** De grafiek van *f* heeft geen horizontale asymptoten.

**c** $0,5x^2+2x=0$ geeft $x(0,5x+2)=0$ waaruit volgt $x=0$ of $0,5x+2=0$. De laatste vergelijking geeft $0,5x=-2$ en dus $x=-4$.

**d** $f(x)=\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$, $f(x)=0$ als de teller van *f* gelijk aan nul is, dat wil zeggen als $0,5x^2+2x=0$ (de vergelijking die je bij opdracht c opgelost hebt).

***bladzijde 15***

**5a**




**b** Voor $x=0$ bestaat de functie *g* niet.

**c** De grafiek heeft geen verticale asymptoot voor deze waarde van $x$.

**d** $g(x)=0$ als geldt $2x^2-x=0$. Dit geeft $x(2x-1)=0$ en dus $x=0$ of $2x-1=0$ waaruit volgt $2x=1$ en dus $x=\frac{1}{2}$.

Conclusie: $g(x)=0$ voor $x=\frac{1}{2}$. (De oplossing $x=0$ valt weg, omdat de noemer van *g* dan ook gelijk aan nul is, zie eventueel ook de grafiek van *g*.)

**6a** $\frac{2x}{x-1}=0$ als $2x=0$ en $x-1\neq 0$. Dit geeft $x=0$.

**b** $\frac{2P+5}{P}=0$ als $2P+5=0$ en $P\neq 0$. Dit geeft $2P=-5$ en dus $P=-2\frac{1}{2}$.

**c** $\frac{(w-2)(2w+4)}{w+2}=0$ als $(w-2)(2w+4)=0$ en $w+2\neq 0$. De vergelijking geeft

$w-2=0$ en $2w+4=0$, waaruit volgt $w=2$ en $w=-2$. Omdat $w\neq -2$ is de

oplossing $w=2$.

**d** $\frac{a^2+8a}{a+1}=0$ als $a^2+8a=0$ en $a+1\neq 0$. De vergelijking geeft $a(a+8)=0$, waaruit volgt $a=0$ en $a+8=0$ en dus $a=-8$.

**e** $\frac{(q^2-4)(q+1)}{q+2}=0$ als $(q^2-4)(q+1)=0$ en $q+2\neq 0$. De vergelijking geeft $q^2-4=0$ en $q+1=0$. De eerste vergelijking geeft $q^2=4$ en dus $q=2$ of $q=-2$.

De tweede vergelijking geeft $q=-1$. Omdat $q\neq -2$ zijn de oplossingen die

overblijven $q=2$ en $q=-1$.

**f** $\frac{B^2+2b-8}{B+4}=0$ als $B^2+2B-8=0$ en $B+4\neq 0$. De vergelijking geeft $(B+4)(B-2)=0$, waaruit volgt $B=-4$ en $B=2$. Omdat $B\neq -4$ is de oplossing

die overblijft $B=2$.

**7a** De grafiek van $GK$ heeft een verticale asymptoot $q=-10$. Deze asymptoot is niet van belang voor de producent om hij geen negatief aantal schaatsen kan produceren.

**b** $GK=200$ is de horizontale asymptoot. Dit betekent dat de prijs voor een paar klapschaatsen niet onder de 200 euro komt.

**c** $GK(20)=\frac{200\cdot 20+12\,000}{20+10}=\frac{16\,000}{30}\approx 533{,}33$ euro per paar schaatsen

**d** $TK(20)=GK(20)\cdot 20=533{,}333.....\cdot 20\approx 10\,666{,}67$ euro

**e** $TK=GK\cdot q=\frac{200q^2+12\,000q}{q+10}$

**f** $TK=25\,000$ oplossen met behulp van de rekenmachine.
Voer in $Y1=(200X\text{\^{}}2+12000X)/(X+10)$ en $Y2=25000$. De optie intersect geeft $q=80{,}52$, dus de producent kan 80 paar schaatsen produceren.

***bladzijde 16***

**8a** Met behulp van de optie d$y$/d$x$.

$x=1:\ \frac{dy}{dx}=-1$, $x=2:\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}$, $x=3:\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{9}$

**b** $f'(x)\ -1\cdot x^{-2}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

**c** Klopt

**9a**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx}$ | 6 | 0,375 | 0,074 | 0,023 |

**b** $g'(x) = 2 \cdot -3 \cdot x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

**c**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 6 | 0,375 | 0,074 | 0,023 |

Deze tabel komt overeen met de tabel van opdracht a.

**10a** $h'(x) = 0,7x^{-0,3}$

**b**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 0,7 | 0,569 | 0,503 | 0,462 | 0,432 | 0,409 |

**c** De functie van opdracht a kan de afgeleide van $h$ zijn.

**11a** $f'(x) = 1,9x^{0,9}$

**b** $TK'(q) = 0,5 \cdot 2q + 3 \cdot -1 \cdot q^{-2} = q - 3q^{-2}$

**c** $y' = 7 \cdot 0,3x^{-0,7} - 2 \cdot -1,6x^{-2,6} = 2,1x^{-0,7} + 3,2x^{-2,6}$

**d** $P'(t) = 3 \cdot -0,8t^{-1,8} = -2,4t^{-1,8}$

**e** $\frac{dA}{dg} = -10 \cdot 10,3g^{9,3} + -1g^{-2} = -103g^{9,3} - g^{-2}$

**f** $\frac{dN}{dp} = 2,4 \cdot -3,4p^{-4,4} - 0 = -8,16p^{-4,4}$

***bladzijde 17***

**12a** $f(x) = \sqrt{x} = x^{0,5}$

**b** $f'(x) = 0,5x^{0,5-1} = 0,5x^{-0,5}$

**c** $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

**d** $g'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

**13a** $S(p) = 3\sqrt{p} = 3p^{0,5},\ S'(p) = 3 \cdot 0,5p^{-0,5} = 1,5p^{-0,5} = \dfrac{1,5}{\sqrt{p}}$

**b** $g(d) = \dfrac{5}{d^3} + d^{2,5} = 5d^{-3} + d^{2,5},\ g'(d) = 5 \cdot -3d^{-4} + 2,5d^{1,5} = -15d^{-4} + 2,5d^{1,5} = \dfrac{-15}{d^4} + 2,5d\sqrt{d}$

**c** $y = \dfrac{2x^2 - 5}{x} = \dfrac{2x^2}{x} - \dfrac{5}{x} = 2x - 5x^{-1},\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - 5 \cdot -1x^{-2} = 2 + 5x^{-2} = 2 + \dfrac{5}{x^2}$

**d** $GK(q) = \dfrac{4q^5 + 3q^3 - 5q^2}{q^2} = \dfrac{4q^5}{q^2} + \dfrac{3q^3}{q^2} - \dfrac{5q^2}{q^2} = 4q^3 + 3q - 5,\ GK'(q) = 4 \cdot 3q^2 + 3 - 0 = 12q^2 + 3$

**e** $TW(q) = 4q^{0,3} + 2\sqrt{q} = 4q^{0,3} + 2q^{0,5}, TW'(q) = 4 \cdot 0,3q^{-0,7} + 2 \cdot 0,5q^{-0,5} = 1,2q^{-0,7} + q^{-0,5}$

**f** $p(t) = \dfrac{3}{t^2} = 3t^{-2},\ p'(t) = 3 \cdot -2t^{-3} = -6t^{-3} = -\dfrac{6}{t^3}$

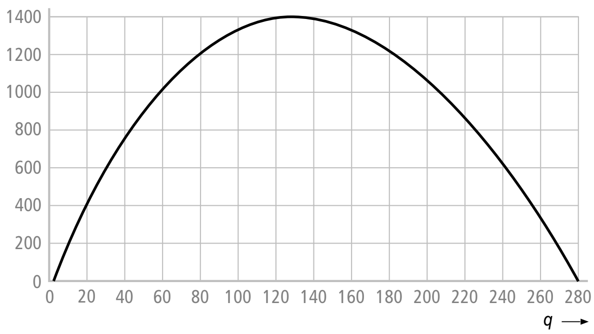
**g** $A = 4p^{0,5} - \dfrac{3}{p^2} = 4p^{0,5} - 3p^{-2},\ \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 4 \cdot 0,5p^{-0,5} - 3 \cdot -2p^{-3} = 2p^{-0,5} + 6p^{-3} = \dfrac{2}{\sqrt{p}} + \dfrac{6}{p^3}$

**h** $K = t^2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t^3} = t^2 \cdot t^{0,5} + t^{-3} = t^{2,5} + t^{-3},\ \dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = 2,5t^{1,5} - 3t^{-4} = 2,5t\sqrt{t} - \dfrac{3}{t^4}$

**14a** $TW = TO - TK = 30 \cdot 75 - (100 + 75^{1,6}) \approx 1149,77$ euro

**b** $TW = TO - TK = 30 \cdot q - (100 + q^{1,6}) = 30q - 100 - q^{1,6}$

**c**




Voor $q = 132$ is de winst maximaal, namelijk 1388 euro.

**d** $TW'(q) = 30 - 0 - 1,6q^{0,6} = 30 - 1,6q^{0,6}$

$TW'(q) = 0$ met behulp van de rekenmachine oplossen ($Y1 = 30 - 1.6q$ ^ $0.6$ en vervolgens de optie zero) levert $q = 132$ .

**e** $GK(q) = \dfrac{TK}{q} = \dfrac{100 + q^{1,6}}{q} = \dfrac{100}{q} + \dfrac{q^{1,6}}{q} = 100q^{-1} + q^{0,6}$

**f** $GK'(q) = 100 \cdot -1q^{-2} + 0,6q^{-0,4} = -100q^{-2} + 0,6q^{-0,4}$

$GK'(q) = 0$ met behulp van de rekenmachine oplossen

($Y1 = -100q$ ^ $-2 + 0.6q$ ^ $-0.4$ en vervolgens de optie zero) levert $q = 24,47 \approx 24$ .

**15a** Als de lengte $AB$ 25 meter is, is de breedte $BC$ gelijk aan $\frac{1125}{25} = 45$ meter.
Totale lengte: $25 + 5 + 20 = 50$ meter.
Totale breedte: $45 + 5 = 50$ meter.
De hoeveelheid grond die nodig is, is $50 \cdot 50 = 2500$ m$^2$.

**b** $y = \frac{1125}{x}$

**c** $O(x) = \text{lengte} \cdot \text{breedte} = (x + 20 + 5)(y + 5) = (x + 25)(\frac{1125}{x} + 5)$

$= 1125 + 5x + \frac{25 \cdot 1125}{x} + 125 = 5x + 1250 + \frac{28125}{x}$

**d** $O'(x) = 5 + 0 + 28125 \cdot -1x^{-2} = 5 - 28125x^{-2} = 5 - \frac{28125}{x^2}$

$O'(x) = 0$ geeft $5 = \frac{28125}{x^2}$, waaruit volgt $x^2 = \frac{28125}{5} = 5625$ en dus $x = 75$ of $x = -75$.
In deze situatie gaat het om de oplossing $x = 75$, dus de minimale afmetingen van het stuk grond zijn $75 + 5 + 20 = 100$ meter voor de lengte en $\frac{1125}{75} + 5 = 20$ meter voor de breedte.

***bladzijde 18***

**16a** $p'(3) = -2 \cdot 3 = -6$, deze uitkomst klopt niet met de waarde in de tabel.

**b** $p(x) = x^2(1 - x) = x^2 - x^3$, $p'(x) = 2x - 3x^2$

**c**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x) = 2x - 3x^2$ | 0 | –1 | –8 | –21 | –40 | –65 | –96 |

Deze waarden kloppen met de tabel in het boek.

**17a** $l'(t) = -2t + 3$ en $l'(1) = -2 + 3 = 1$. De helling is positief, dus de lengte neemt toe.
$b'(t) = -2t + 4$ en $b'(1) = -2 + 4 = 2$. De helling is positief, dus de breedte neemt toe.

**b** $\Delta l = l(1{,}1) - l(1) = (-1{,}1^2 + 3 \cdot 1{,}1 + 2) - (-1^2 + 3 \cdot 1 + 2) = 0{,}09$
$\Delta b = b(1{,}1) - b(1) = (-1{,}1^2 + 4 \cdot 1{,}1 + 1) - (-1^2 + 4 \cdot 1 + 1) = 0{,}19$

**c** $O = \text{lengte} \cdot \text{breedte}$, $t = 1{,}1$: $O = 4{,}09 \cdot 4{,}19 \approx 17{,}14$, $t = 1$: $O = 4 \cdot 4 = 16$, dus
$\Delta O = 17{,}14 - 16 = 1{,}14$

**d** $\Delta O$ = staande rechthoek + liggende rechthoek + kleine rechthoek
$= \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b$

**e** $\Delta O = \Delta l \cdot b + l \cdot \Delta b + \Delta l \cdot \Delta b = 0{,}09 \cdot 4 + 4 \cdot 0{,}19 + 0{,}09 \cdot 0{,}19 = 1{,}14$

**f** $\frac{\Delta O}{\Delta t} = \frac{1{,}14}{0{,}1} = 11{,}4$ cm$^2$/s

**g** Als je een heel klein tijdsinterval bekijkt, zijn zowel $\Delta l$ als $\Delta b$ heel klein. De vermenigvuldiging $\Delta l \cdot \Delta b$ wordt dan nog kleiner, waardoor de deling $\frac{\Delta l \cdot \Delta b}{\Delta t}$ te verwaarlozen is.

**h** Als je voor $\Delta t$ een heel klein getal kiest, nadert $\frac{\Delta O}{\Delta t}$ tot $\frac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t} = O'(t)$.

Als je voor $\Delta t$ een heel klein getal kiest nadert $\frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot b + l \cdot \frac{\Delta b}{\Delta t} + \frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta b}{\Delta t}$ tot

$l'(t) \cdot b(t) + l(t) \cdot b'(t)$ (waarbij de laatste term wegvalt, zie opdracht g).

Conclusie: $O'(t) = l'(t) \cdot b(t) + l(t) \cdot b'(t)$

**i** $O'(t) = l'(t) \cdot b(t) + l(t) \cdot b'(t) = (-2t+3)(-t^2+4t+1) + (-t^2+3t+2)(-2t+4)$

$O'(1) = (-2+3)(-1+4+1) + (-1+3+2)(-2+4) = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 12$

***bladzijde 19***

**18a** $f'(x) = (2x+4)(4x-10) + (x^2+4x) \cdot 4 = 8x^2 - 20x + 16x - 40 + 4x^2 + 16x = 12x^2 + 12x - 40$

**b** $f(x) = (x^2+4x)(4x-10) = 4x^3 - 10x^2 + 16x^2 - 40x = 4x^3 + 6x^2 - 40x$ , $f'(x) = 12x^2 + 12x - 40$

**c** Beide antwoorden zijn gelijk.

**19a** $f'(x) = 3x^2(x^2-1) + x^3 \cdot 2x = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 3x^2$

**b** $A'(t) = 2(t^3+2) + 2t \cdot 3t^2 = 2t^3 + 4 + 6t^3 = 8t^3 + 4$

**c** $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = (2x-3)(2x+5) + (x^2-3x) \cdot 2 = 4x^2 + 10x - 6x - 15 + 2x^2 - 6x = 6x^2 - 2x - 15$

**d** $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x(x^3+2x-8) + (3x^2-5)(3x^2+2) = 6x^4 + 12x^2 - 48x + 9x^4 + 6x^2 - 15x^2 - 10$

$= 15x^4 + 3x^2 - 48x - 10$

**e** $l'(q) = 2(3-5q^2) + (2q-7) \cdot -10q = 6 - 10q^2 - 20q^2 + 70q = -30q^2 + 70q + 6$

**f** $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}p} = (6p+1)(2-3p) + (3p^2+p-6) \cdot -3 = 12p - 18p^2 + 2 - 3p - 9p^2 - 3p + 18$

$= -27p^2 + 6p + 20$

**20a** $k(t) = 2t(t^{-1}+3t) = 2 + 6t^2$ , $k'(t) = 12t$

**b** $A'(p) = (2p+3)(5p-4) + (p^2+3p) \cdot 5 = 10p^2 - 8p + 15p - 12 + 5p^2 + 15p = 15p^2 + 22p - 12$

**c** $TK(q) = \frac{2q(q^2-5)}{q} = \frac{2q^3-10q}{q} = \frac{2q^3}{q} - \frac{10q}{q} = 2q^2 - 10$ , $TK'(q) = 4q$

**d** $S(t) = (t-1)(t+1) = t^2 + t - t - 1 = t^2 - 1$ , $S'(t) = 2t$

**e** $k(b) = 2b^3(\frac{1}{3}b^2+1) = \frac{2}{3}b^5 + 2b^3$ , $k'(b) = \frac{10}{3}b^4 + 6b^2$

**f** $P(x) = \frac{3x^2-15x+3}{x^2} = \frac{3x^2}{x^2} - \frac{15x}{x^2} + \frac{3}{x^2} = 3 - \frac{15}{x} + \frac{3}{x^2} = 3 - 15x^{-1} + 3x^{-2}$,

$P'(x) = 0 - 15 \cdot -1x^{-2} + 3 \cdot -2x^{-3} = 15x^{-2} - 6x^{-3} = \frac{15x}{x^2} - \frac{6}{x^3}$

**21a** $TK = p \cdot q = (10+5x^2) \cdot 100x^{-1} = \dfrac{1000+500x^2}{x}$

**b** $TK(1) = \dfrac{1000+500 \cdot 1^2}{1} = 1500$ euro, $TK(4) = \dfrac{1000+500 \cdot 16}{4} = 2250$ euro

**c** $TK = \dfrac{1000+500x^2}{x} = \dfrac{1000}{x} + \dfrac{500x^2}{x} = 1000x^{-1} + 500x$

$TK'(x) = -1000x^{-2} + 500 = -\dfrac{1000}{x^2} + 500$

$TK'(x) = 0$ geeft $-\dfrac{1000}{x^2} = -500$, waaruit volgt $x^2 = \dfrac{-1000}{-500} = 2$ en dus $x = \sqrt{2}$ of . $x = -\sqrt{2}$

In deze situatie is alleen de oplossing $x = \sqrt{2}$ van toepassing.

Conclusie: bij de oppervlakte $x = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ m² zijn de totale kosten minimaal.

**d** $TK = \dfrac{1000+500\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}} \approx 1414$ euro en $q = 100 \cdot (\sqrt{2})^{-1} \approx 71$ posters

***bladzijde 20***

**22a** $f(x) = \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x} = 1 + 2x^{-1}$, $f'(x) = 0 + 2 \cdot -1x^{-2} = -2x^{-2} = \dfrac{-2}{x^2}$

**b** $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^3} = \dfrac{x^3}{x^3} - \dfrac{x}{x^3} = 1 - x^{-2}$, $g'(x) = 0 - -2x^{-3} = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$

**23a** Je kunt de functie $g(x)$ niet schrijven als een som van machtsfuncties want de noemer bestaat uit twee termen.

**b**

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx}$ | 0,222 | 0,125 | 0,080 |

**c** $g'(x) = \dfrac{(x+2) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{x+2-x}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

**d**

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | 0,222 | 0,125 | 0,080 |

Deze waarden komen overeen met de tabel bij opdracht b.

**e** $f'(x) = \dfrac{x \cdot 1 - (x+2) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{x - x - 2}{x^2} = \dfrac{-2}{x^2}$

$g'(x) = \dfrac{x^3(3x^2-1) - (x^3-x)3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{3x^5 - x^3 - 3x^5 + 3x^3}{x^6} = \dfrac{2x^3}{x^6} = \dfrac{2}{x^3}$

***bladzijde 21***

**24a** $A'(x) = \dfrac{(x+2)\cdot 3-(3x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$

**b** $TK'(q) = \dfrac{(q^2+3)\cdot 2-(2q+8)2q}{(q^2+3)^2} = \dfrac{2q^2+6-4q^2-16q}{(q^2+3)^2} = \dfrac{-2q^2-16q+6}{(q^2+3)^2}$

**c** $f'(x) = \dfrac{(2-x^2)\cdot 0-5\cdot -2x}{(2-x^2)^2} = \dfrac{10x}{(2-x^2)^2}$

**d** $B'(t) = \dfrac{(t^2+2)\cdot 1-(t+1)2t}{(t^2+2)^2} = \dfrac{t^2+2-2t^2-2t}{(t^2+2)^2} = \dfrac{-t^2-2t+2}{(t^2+2)^2}$

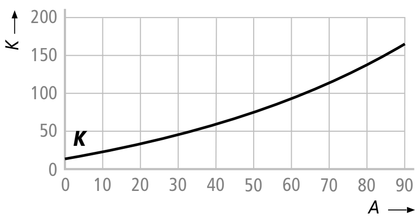
**25a** $A(p) = \dfrac{3p^2+5p}{p} = \dfrac{3p^2}{p}+\dfrac{5p}{p} = 3p+5$, $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 3$

**b** $A(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}} = \dfrac{1}{p^{\frac{1}{2}}} = p^{-\frac{1}{2}}$, $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = -\tfrac{1}{2}p^{-1\frac{1}{2}}$

**c** $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = \dfrac{(p^2-1)\cdot 0--7\cdot 2p}{(p^2-1)^2} = \dfrac{14p}{(p^2-1)^2}$

**d** $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = \dfrac{(p+3)\cdot 0-1\cdot 1}{(p+3)^2} = \dfrac{-1}{(p+3)^2}$

**26a**




De grafiek is stijgend, dus de kosten nemen toe als het werktempo hoger wordt.

**b** De functie $K$ bestaat uit een teller en een noemer. Als $A$ groter wordt, wordt de teller groter en de noemer kleiner. Als geheel wordt de uitkomst van de deling dan groter.

**c** $K = \dfrac{172A+2752}{200-A}$

$\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}A} = \dfrac{(200-A)\cdot 172-(172A+2752)\cdot -1}{(200-A)^2} = \dfrac{34400-172A+172A+2752}{(200-A)^2} = \dfrac{37152}{(200-A)^2}$

Als de kosten voor $A = 70$ twee keer zo snel stijgen als voor $A = 35$ zou moeten gelden: $K'(70) = 2\cdot K'(35)$.
$2\cdot K'(35) = 2\cdot 1{,}365 = 2{,}730$ en $K'(70) = 2{,}198$, dus de kosten stijgen niet twee keer zo snel.

**27a** $C'(t) = \dfrac{(t^2+4)\cdot 8 - 8t\cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \dfrac{8t^2+32-16t^2}{(t^2+4)^2} = \dfrac{-8t^2+32}{(t^2+4)^2}$

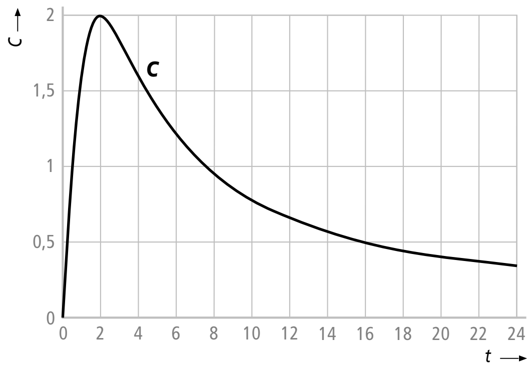
$C'(t) = \dfrac{-8t^2+32}{(t^2+4)^2} = 0$ als $-8t^2+32=0$. Dit geeft $t^2=4$ en dus $t=2$ of $t=-2$.

Conclusie: na twee uur is de concentratie in het bloed maximaal.

**b** $C'(0) = \dfrac{-8\cdot 0+32}{16} = 2$ mg/liter/uur

**c** $C'(5) = \dfrac{-8\cdot 5^2+32}{(5^2+4)^2} \approx -0{,}2$ mg/liter/uur

**d**

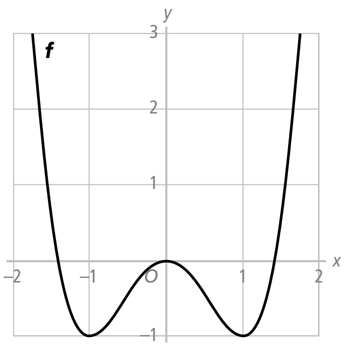



**e** De concentratie van het geneesmiddel nadert na verloop van tijd tot nul.

**f** De vergelijking $\dfrac{8t}{t^2+4} = 1$ met de GR oplossen ( $Y1 = (8X)/(X\,\hat{}\,2+4)$, $Y2 = 1$ en dan optie intersect) levert het tijdstip $t = 7{,}5$ uur. Conclusie: na ongeveer 7,5 uur moet er een tweede injectie gegeven worden.

***bladzijde 22***

**28a**




De toppen liggen bij $x=1$, $x=0$ en $x=-1$.

**b** $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x)=0$ oplossen geeft $4x^3-4x=0$ waaruit volgt $4x(x^2-1)=0$ en dus $4x=0$ of $x^2-1=0$.

Dit geeft de oplossingen $x=0$, $x=1$ en $x=-1$.

**c** De grafiek van *f* daalt voor $x<-1$ en voor $0<x<1$.

**d** De grafiek van *f* stijgt voor $-1<x<0$ en voor $x>1$.

**29a** Domein: Uit $2x-1 \geq 0$ volgt $2x \geq 1$ en dus $x \geq \frac{1}{2}$.
Bereik: $y \geq 0$.

**b** De grafiek heeft daar een verticale raaklijn.

**c** $\frac{dy}{dx} \approx 3,16$; $\frac{dy}{dx} \approx 7,08$ en $\frac{dy}{dx} \approx 22,36$

**d** De grafiek van $g$ heeft voor $x = 0,5$ een verticale raaklijn.

**30a** De functie bestaat niet voor $x = 1$, omdat voor deze waarde de noemer gelijk is aan nul.

**b** $f'(x) = \frac{(x-1)\cdot 0 - 2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

**c** $f'(0,9) = -200$ en $f'(1,1) = -200$.

**d** Voor $x = 1$ heeft de grafiek van $f$ een verticale asymptoot.

**e** $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$. De teller is altijd negatief en de noemer is vanwege het kwadraat altijd positief.
Als geheel is het resultaat altijd negatief. Als $f'(x)$ altijd negatief is, daalt de grafiek van $f$ links van $x = 1$ en rechts van $x = 1$. Merk op dat het geheel NIET dalend is.

***bladzijde 23***

**31a** $I = \frac{120}{(0,05t+1)^2}$ De teller is constant en de noemer wordt steeds groter. Als geheel wordt het resultaat van de deling dus steeds kleiner, dat wil zeggen de inhoud neemt af.

**b** $P'(x) = 0 - 15\cdot -1x^{-2} + 3\cdot -2x^{-3} = 15x^{-2} - 6x^{-3} = \frac{15x}{x^2} - \frac{6}{x^3}$,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{(0,0025t^2+0,1t+1)\cdot 0 - 120\cdot (0,005t+0,1)}{(0,0025t^2+0,1t+1)^2} = \frac{-0,6t-12}{(0,0025t^2+0,1t+1)^2}$$

Als de inhoud van het reservoir steeds langzamer afneemt, moet de afgeleide altijd negatief zijn en steeds dichter tot nul naderen. (Afnemend dalend)

Voor de afgeleide geldt dat de teller altijd negatief is en steeds kleiner wordt en dat de noemer altijd positief is (vanwege het kwadraat) en steeds groter wordt. Als geheel is de afgeleide dus altijd negatief en nadert de afgeleide voor grote waarden van $t$ tot nul.

**32a** Domein: $x \geq 0$, bereik: $y \geq 4$

**b** $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, domein: $x > 0$.

**c** $f'(0,1) = 1,58$, $f'(0,01) = 5$ en $f'(0,001) = 15,81$

**d** De raaklijn aan de grafiek van $f$ in het punt $(0, 4)$ loopt verticaal.

**33a** $f$ heeft twee nulpunten. Verder kun je aan de grafiek van $f$ zien dat links van het eerste nulpunt de grafiek van $f$ daalt, dat tussen de beide nulpunten de grafiek van $f$ stijgt en rechts van het tweede nulpunt de grafiek van $f$ daalt. De uitspraak is dus waar.

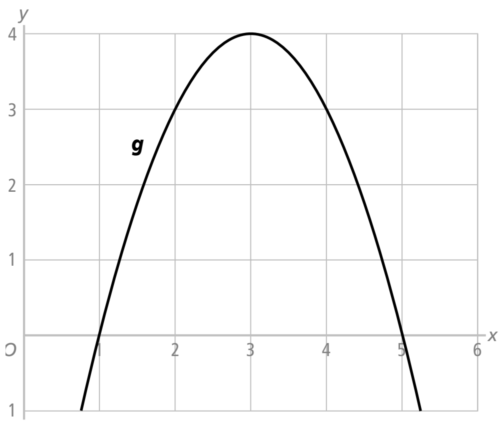
**b** $f'(x)$ is voor $x = 1$ maximaal, de uitspraak is dus waar.

**c** $f'(x)$ is een parabool, daar hoort een kwadratische functie bij. De functie $f$ is dus een derdemachtsfunctie. Een derdemachtsfunctie heeft 1, 2 of 3 nulpunten. De uitspraak kan dus waar zijn.

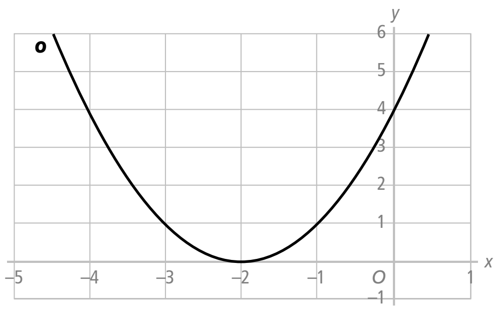
**d** De uitspraak kan waar zijn (zie opdracht c).

**e** De uitspraak is niet waar (zie opdracht c).

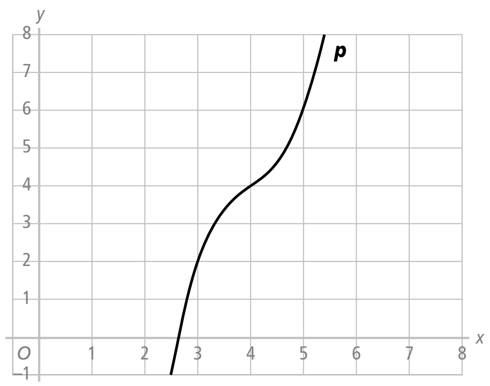
**34a**




**b**




**c**




***bladzijde 24***

**35a** $f'(t) = 3 \cdot -2t^{-3} - -1t^{-2} = -6t^{-3} + t^{-2} = -\dfrac{6}{t^3} + \dfrac{1}{t^2}$

**b** $G(p) = p^2\sqrt{p} + p^{-3} = p^2 p^{\frac{1}{2}} + p^{-3} = p^{2\frac{1}{2}} + p^{-3}$, $G'(p) = 2\tfrac{1}{2}\, p^{1\frac{1}{2}} - 3p^{-4} = 2\tfrac{1}{2}\, p\sqrt{p} - \dfrac{3}{p^4}$

**c** $TK'(q) = \dfrac{q(6q+2) - (3q^2+2q-5) \cdot 1}{q^2} = \dfrac{6q^2+2q-3q^2-2q+5}{q^2} = \dfrac{3q^2+5}{q^2} = 3 + \dfrac{5}{q^2}$

**d** $K'(x) = (2x+3)(2x-5) + (x^2+3x-1) \cdot 2 = 4x^2 - 10x + 6x - 15 + 2x^2 + 6x - 2 = 6x^2 + 2x - 17$

**e** $l(n) = \sqrt{n}(n+2) = n^{\frac{1}{2}}(n+2) = n^{1\frac{1}{2}} + 2n^{\frac{1}{2}}$, $l'(n) = 1\tfrac{1}{2}\, n^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\, n^{-\frac{1}{2}} = 1\tfrac{1}{2}\, n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

**g** $M'(q) = \dfrac{(q+1)(2q-3) - (q^2-3q) \cdot 1}{(q+1)^2} = \dfrac{2q^2-3q+2q-3-q^2+3q}{(q+1)^2} = \dfrac{q^2+2q-3}{(q+1)^2}$

**36a** De lengte neemt een uiterste waarde aan, want het is een kwadratische functie. De breedte niet want dat is een lineaire functie.

**b** $l'(t) = 2t - 2$ , $l'(t) = 0$ oplossen geeft $2t - 2 = 0$ dus $t = 1$ .
De uiterste waarde is $l(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$ .

**c** $O(t) = l(t) \cdot b(t) = (t^2 - 2t + 2)(t + 2) = t^3 + 2t^2 - 2t^2 - 4t + 2t + 4 = t^3 - 2t + 4$

**d** De oppervlakte neemt een uiterste waarde aan.
$O'(t) = 3t^2 - 2$ , $O'(t) = 0$ oplossen geeft $3t^2 - 2 = 0$ waaruit volgt $3t^2 = 2$ .
Dit levert $t^2 = \frac{2}{3}$ en dus $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ of $t = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ .
De uiterste waarde is $O(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 4 \approx 2{,}911$ .

**e** De tijdstippen komen niet overeen.

**37a** Snelheid $= \dfrac{\text{afstand}}{\text{tijd}} = \dfrac{4000}{9 \cdot 24} \approx 18{,}52$ km/uur

**b** $TK = BK + PK = 1150v^2 + 5000 \cdot t = 1150v^2 + 5000 \cdot \dfrac{4000}{v}$

$TK(45) = 1150 \cdot 45^2 + 5000 \cdot \dfrac{4000}{45} = 2\,773\,194$ euro

$TK(30) = 1150 \cdot 30^2 + 5000 \cdot \dfrac{4000}{30} \approx 1\,701\,667$ euro

$TK(18{,}52) = 1150 \cdot (18{,}52)^2 + 5000 \cdot \dfrac{4000}{18{,}52} \approx 1\,474\,352$ euro

**c** $TK(v) = BK + PK = 1150v^2 + 5000 \cdot t = 1150v^2 + 5000 \cdot \dfrac{4000}{v} = 1150v^2 + \dfrac{2 \cdot 10^7}{v}$

**d** $TK'(v) = 1150 \cdot 2v + 2 \cdot 10^7 \cdot -1v^{-2} = 2300v - \dfrac{2 \cdot 10^7}{v^2}$

$TK'(v) = 0$ oplossen

$2300v - \dfrac{2 \cdot 10^7}{v^2} = 0$

$2300v = \dfrac{2 \cdot 10^7}{v^2}$

$2300v^3 = 2 \cdot 10^7$

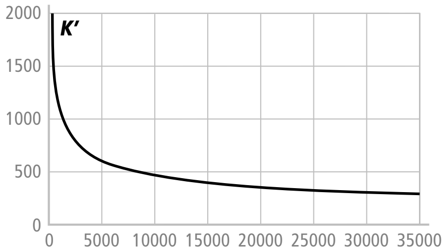
$v^3 = \dfrac{2 \cdot 10^7}{2300} = 8695{,}65$

$v = \sqrt[3]{8695{,}65} \approx 20{,}56$ km/uur

**e** $TK(20{,}56) = 1\,458\,883$ euro

***bladzijde 25***

**38a** $K' = 25\,000 \cdot 0{,}62P^{-0{,}38} = \dfrac{25\,000 \cdot 0{,}62}{P^{0{,}38}} = \dfrac{15\,500}{P^{0{,}38}}$

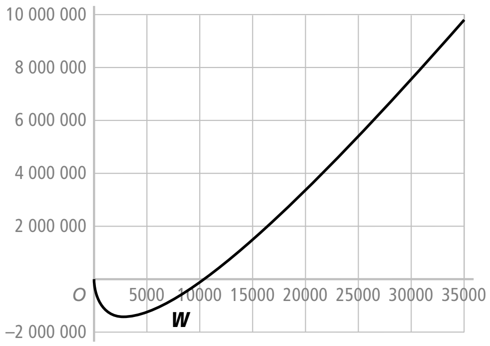



$K'$ neemt af als $P$ toeneemt.

**b** $K' = O'$ en $O' = 750$, dus $\dfrac{15\,500}{P^{0{,}38}} = 750$ oplossen met behulp van de rekenmachine.

De optie intersect levert $P \approx 2892$ ton per jaar.

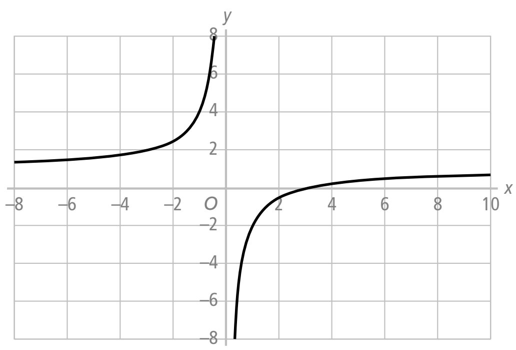
**c** $W = O - K = 750P - 25000P^{0{,}62}$




De winst stijgt als de productie toeneemt. Conclusie: de producent kan zijn productie het beste grootschalig inrichten.

***bladzijde 28***

**T-1a**




**b** De functie *f* bestaat niet voor $x = 0$ en $x = -3$, omdat de noemer dan nul is.

**c** De grafiek van *f* heeft de verticale asymptoot $x = 0$.

**d** $\dfrac{x^2 - 9}{x(x+3)} = 0$ als $x^2 - 9 = 0$ en $x(x+3) \neq 0$. De vergelijking geeft $x^2 = 9$ en dus $x = 3$ of $x = -3$. De ongelijkheid geeft $x \neq 0$ en $x \neq -3$. De oplossing die overblijft is $x = 3$.

**e** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x(x+3)} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} = \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{x}{x} - \dfrac{3}{x} = 1 - \dfrac{3}{x}$ (met $x \neq 0$ en $x \neq -3$)

**f** De lijn $y = 1$.

**T-2a** $f'(x) = 4 \cdot -3x^{-4} - 2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -12x^{-4} - x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{12}{x^4} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

**b** $f(x) = x(x^{1,3} + x^{-2}) = x^{2,3} + x^{-1}$ , $f'(x) = 2,3x^{1,3} - x^{-2}$

**c** $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{4x}{x} = 3x + 4$ , $f'(x) = 3$

**d** $f(x) = x^3\sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$ , $f'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}}$

**e** $f'(x) = -2x^{-3} + 0,7 \cdot 1,2x^{0,2} = -2x^{-3} + 0,84x^{0,2}$

**f** $f(x) = \frac{1}{x^2} + 5x = x^{-2} + 5x$ , $f'(x) = -2x^{-3} + 5$

**T-3a** $f'(x) = 2(x^2 + 2x) + (2x - 3)(2x + 2) = 2x^2 + 4x + 4x^2 + 4x - 6x - 6 = 6x^2 + 2x - 6$

**b** $f'(x) = 6x(4 - 5x) + 3x^2 \cdot -5 = 24x - 30x^2 - 15x^2 = -45x^2 + 24x$

**c** $f'(x) = (3x^2 + 2)(3x - 5) + (x^3 + 2x) \cdot 3 = 9x^3 - 15x^2 + 6x - 10 + 3x^3 + 6x = 12x^3 - 15x^2 + 12x - 10$

**d** $f'(x) = (2x + 2)(x - 3) + (x^2 + 2x + 3) \cdot 1 = 2x^2 - 6x + 2x - 6 + x^2 + 2x + 3 = 3x^2 - 2x - 3$

**T-4a** $A'(x) = \frac{(x+3) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{2x + 6 - 2x + 1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$

**b** $A'(k) = \frac{(1+k)(3k^2 - 2) - (k^3 - 2k) \cdot 1}{(1+k)^2} = \frac{3k^2 - 2 + 3k^3 - 2k - k^3 + 2k}{(1+k)^2} = \frac{2k^3 + 3k^2 - 2}{(1+k)^2}$

**c** $P'(q) = \frac{(q^2 + 3) \cdot 0 - 4 \cdot 2q}{(q^2 + 3)^2} = \frac{-8q}{(q^2 + 3)^2}$

**d** $S'(v) = \frac{v^2(3v^2) - (v^3 + 2)2v}{(v^2)^2} = \frac{3v^4 - 2v^4 - 4v}{v^4} = \frac{v^4 - 4v}{v^4} = 1 - \frac{4}{v^3}$

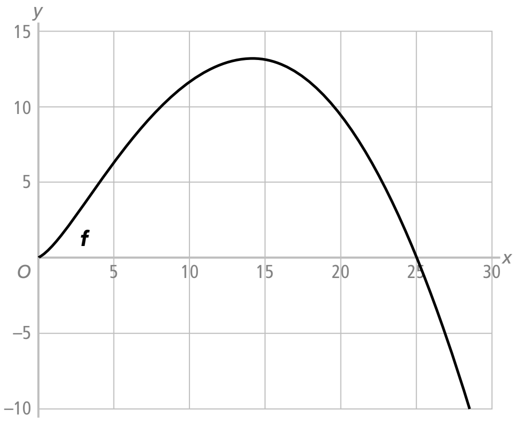
**e** $h'(x) = \frac{(x^2 + 3x) \cdot 1 - x(2x + 3)}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{x^2 + 3x - 2x^2 - 3x}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{-x^2}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{-1}{(x+3)^2}$

**f** $f'(t) = \frac{\sqrt{t} \cdot -2 - (3 - 2t)\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}^2} = \frac{-2\sqrt{t} - 1\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{t}}{t} = \frac{-1\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{t}}{t} = -\frac{3}{2t\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}$

***bladzijde 29***

**T-5a** Domein: $x \geq 0$

**b**




$x = 0$ en $x = 25$ zijn nulpunten van *f*, voor $x = 14$ heeft de grafiek van *f* een top.

**c** $f(x) = x\sqrt{x} - 0{,}2x^2 = x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 0{,}2x^2 = x^{1\frac{1}{2}} - 0{,}2x^2$, $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 0{,}4x = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - 0{,}4x$

**d** De grafiek heeft daar een horizontale raaklijn.

**e** In de buurt van $(0, 0)$ is niet te zien dat de grafiek daar een horizontale raaklijn heeft.

**T-6a** Groningen: $d = \dfrac{14\,000}{80} = 175$, $N = \dfrac{240 \cdot 175}{28 + 175} = 207$

Haren: $d = \dfrac{1800}{46} = 39$, $N = \dfrac{240 \cdot 39}{28 + 39} = 140$

**b** Groningen-Haren: $d = \dfrac{14\,000 + 1800}{80 + 46} = 125$, $N = \dfrac{240 \cdot 125}{28 + 125} = 196$

Conclusie: een gemeentelijke herindeling zou voor Haren nadelige gevolgen hebben. Deze gemeente moet dan namelijk meer leerlingen op een school hebben dan in de oude situatie om de school open te houden.

**c** $N'(d) = \dfrac{(28 + d) \cdot 240 - 240d \cdot 1}{(28 + d)^2} = \dfrac{6720 + 240d - 240d}{(28 + d)^2} = \dfrac{6720}{(28 + d)^2}$

De teller en noemer van $N'(d)$ zijn beide positief, dus $N'(d)$ is positief. Dat $N'(d)$ positief is betekent dat de helling van de grafiek van *N* groter dan nul is.
Conclusie: de grafiek van *N* is stijgend op $[0, \rightarrow\rangle$.

**d** De lijn $N = 240$ is de horizontale asymptoot. Dit betekent dat de opheffingsnorm nooit hoger dan 240 leerlingen is.

**e** Voorbeeld 1: een gemeente met oppervlakte 100 km$^2$ en 25 000 leerlingen heeft een leerlingendichtheid van 250 leerlingen per km$^2$. De opheffingsnorm is dan

$$N = \frac{240 \cdot 250}{28 + 250} = 216 .$$

Als er 50 leerlingen bij komen verandert de leerlingendichtheid, maar de opheffingsnorm blijft hetzelfde. Hetzelfde geldt als er 100 leerlingen bij komen. Deze paar extra leerlingen kunnen de school redden.

Voorbeeld 2: een gemeente met een oppervlakte van 20 km$^2$ en 600 leerlingen heeft een leerlingendichtheid van 30 leerlingen per km$^2$. De opheffingsnorm is dan

$$N = \frac{250 \cdot 30}{28 + 30} = 124 .$$

Als er 50 leerlingen bijkomen verandert zowel de leerlingendichtheid als de opheffingsnorm. Er geldt dan namelijk $N = 128$ . Deze extra leerlingen verhogen dus de opheffingsnorm, wat de situatie ongunstiger maakt.

Conclusie: de uitspraak klopt.

**T-7a** Voor oneven waarden van *n*. Na differentiëren is de macht van *x* dan even en dat betekent dat $f'(x)$ dan groter of gelijk aan nul is.

**b** Zie bijvoorbeeld de opdrachten 25a, 25b, T-2a.

In het algemeen: als je een quotiëntfunctie gemakkelijk als (som van) machtsfunctie(s) kunt schrijven.