Hoofdstuk 2 - De kettingregel

bladzijde 32

V-1a $P = -2(5-b)^2 - 10 = -2(25-10b+b^2) - 10 = -50 + 20b - 2b^2 - 10 = -2b^2 + 20b - 60$

b $W = \frac{1}{2t} + 1 = \frac{1}{2\left(\frac{2}{a^2}\right)} + 1 = \frac{1}{\frac{4}{a^2}} + 1 = \frac{a^2}{4} + 1$ voor $a \neq 0$

c $T = \sqrt{3u-5} = \sqrt{3(r^2-1)-5} = \sqrt{3r^2-3-5} = \sqrt{3r^2-8}$

d $R = \sqrt{y} - 4 = \sqrt{\log x + 5} - 4$

V-2a $u \cdot t = 4$ wordt $\frac{1}{3x} \cdot t = 4$ en dus $t = 4 \cdot 3x = 12x$

b $u \cdot t = 24$ wordt $\frac{1}{3}x \cdot t = 24$ en dus $t = \frac{24}{\frac{1}{3}x} = \frac{72}{x}$

V-3a A: $y = 3 \cdot 2^t = 3 \cdot 2^{3x-2} = 3 \cdot 2^{3x} \cdot 2^{-2} = 3 \cdot \left(2^3\right)^x \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \cdot 8^x$

b A: $y = 2t^3 = 2\left(2^x\right)^3 = 2 \cdot 2^{3x} = 2 \cdot \left(2^3\right)^x = 2 \cdot 8^x$

V-4a A: $y = 3 \cdot {}^2\log t = 3 \cdot {}^2\log 4x = 3({}^2\log 4 + {}^2\log x) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot {}^2\log x = 6 + 3 \cdot {}^2\log x$

b A: $y = 4t = 4({}^2\log 8x) = 4({}^2\log 8 + {}^2\log x) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot {}^2\log x = 12 + 4 \cdot {}^2\log x$

V-5 $y = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\sqrt{t}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{t}} = t$ met $t > 0$

bladzijde 33

V-6a $v = v_1 \cdot h^{0,25} = 6 \cdot 8^{0,25} \approx 10,09$, $P = 0,4v^3 = 0,4(10,09)^3 \approx 411$ Watt

b $P = 0,4v^3 = 0,4\left(v_1 \cdot h^{0,25}\right)^3 = 0,4 \cdot v_1^{\,3} \cdot h^{0,75}$

c Stel $P_1 = 0,4(v_1 \cdot h^{0,25})^3$. Dan is $P_2 = 0,4(v_1 \cdot (2h)^{0,25})^3 = (2^{0,75}) \cdot (v_1 \cdot h^{0,25})^3 \approx 1,68 \cdot P_1$.
Dus met ongeveer 68%.

d De vergelijking $700 = 0,4 \cdot v_1^{\,3} \cdot 10^{0,75}$ oplossen met de rekenmachine levert $v_1 \approx 6,78$ m/s.

V-7a $f'(t) = 2 \cdot (3-4t) + (2t-4) \cdot -4 = 6 - 8t - 8t + 16 = 22 - 16t$

b $g'(u) = 4 \cdot \sqrt{u} + (4u-2) \cdot \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{u} + 2\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}} = 6\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}$

c $R'(m) = 6m^2(m^{-2}+1) + (2m^3+4) \cdot -2m^{-3} = 6 + 6m^2 - 4 - 8m^{-3} = 6m^2 - \frac{8}{m^3} + 2$

V-8 $f(t) = (3t^2+t)(2t^2-1) = 6t^4 - 3t^2 + 2t^3 - t = 6t^4 + 2t^3 - 3t^2 - t$, $f'(t) = 24t^3 + 6t^2 - 6t - 1$

V-9a $T'(x)=\dfrac{(x+1)\cdot 4x-2x^2\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{4x^2+4x-2x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$

b $W'(q)=\dfrac{(2q+2)\cdot 3-(3q-1)\cdot 2}{(2q+2)^2}=\dfrac{6q+6-6q+2}{(2q+2)^2}=\dfrac{8}{(2q+2)^2}$

c $A'(p)=\dfrac{(2p^2+3p)\cdot 0-4\cdot(4p+3)}{(2p^2+3p)^2}=\dfrac{-16p-12}{(2p^2+3p)^2}$

V-10a $f(t)=\dfrac{7t^5-3t^3}{2t^2}=\dfrac{7t^5}{2t^2}-\dfrac{3t^3}{2t^2}=3\tfrac{1}{2}t^3-1\tfrac{1}{2}t$, $f'(t)=3\tfrac{1}{2}\cdot 3t^2-1\tfrac{1}{2}=10\tfrac{1}{2}t^2-1\tfrac{1}{2}$

b $g(t)=\dfrac{4t^4+3t+2}{t^2}=\dfrac{4t^4}{t^2}+\dfrac{3t}{t^2}+\dfrac{2}{t^2}=4t^2+3t^{-1}+2t^{-2}$, $f'(t)=8t-3t^{-2}-4t^{-3}=8t-\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{4}{t^3}$

c $h(t)=\dfrac{t^7+2\sqrt{t}}{t^3}=\dfrac{t^7}{t^3}+\dfrac{2t^{\frac{1}{2}}}{t^3}=t^4+2t^{-2\frac{1}{2}}$, $h'(t)=4t^3+2\cdot -2\tfrac{1}{2}t^{-3\frac{1}{2}}=4t^3-5t^{-3\frac{1}{2}}=4t^3-\dfrac{5}{t^3\sqrt{t}}$

bladzijde 34

1a $V(0)=0{,}01\cdot 0^2+400=400$ liter, $h(400)=\sqrt{2{,}5\cdot 400}\approx 31{,}6$ cm

b De vergelijking $80=\sqrt{2{,}5\cdot V}$ geeft $6400=2{,}5\cdot V$ en dus $V=\dfrac{6400}{2{,}5}=2560$ liter.
De vergelijking $2560=0{,}01t^2+400$ geeft $0{,}01t^2=2560-400=2160$, waaruit volgt $t^2=\dfrac{2160}{0{,}01}=216\,000$ en dus $t\approx 464{,}8$ seconden.

c $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=\dfrac{V(600)-V(0)}{600-0}=\dfrac{4000-400}{600}=6$ liter per seconde

d $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=\dfrac{V(100)-V(0)}{100-0}=\dfrac{0{,}01\cdot 100^2+400-400}{100}=1$ liter per seconde

$\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=\dfrac{V(600)-V(500)}{600-500}=\dfrac{4000-(0{,}01\cdot 500^2+400)}{100}=11$ liter per seconde

e $\dfrac{\Delta h}{\Delta V}=\dfrac{h(4000)-h(400)}{4000-400}=\dfrac{\sqrt{2{,}5\cdot 4000}-\sqrt{2{,}5\cdot 400}}{3600}\approx 0{,}02$ cm per liter

2a Het antwoord van opdracht 1c geeft aan hoeveel liter er per seconde bij komt en het antwoord van opdracht 1e geeft aan hoeveel cm er per liter bij komt. Samen geeft dit aan hoeveel cm er per seconde bij komt, dat wil zeggen wat de gemiddelde stijgsnelheid is.

b 6 liter per seconde en 0,02 cm per liter, dus $6\cdot 0{,}02=0{,}12$ cm per seconde.

c De eerste 100 seconden: 1 liter per seconde (zie opgave 1d) en
$\dfrac{\Delta h}{\Delta V}=\dfrac{h(500)-h(400)}{500-400}\approx 0{,}037$ cm per liter, dus $1\cdot 0{,}037\approx 0{,}04$ cm per seconde.
De laatste 100 seconden: 11 liter per seconde (zie opdracht 1d) en
$\dfrac{\Delta h}{\Delta V}=\dfrac{h(4000)-h(2900)}{4000-2900}\approx 0{,}014$ cm per liter, dus $11\cdot 0{,}014=0{,}15$ cm per seconde.
Conclusie: de stijgsnelheid is gedurende de eerste 100 seconden kleiner dan gedurende de laatste 100 seconden van het vulproces.

d $h(t)=\sqrt{2,5\cdot V}=\sqrt{2,5\cdot(0,01t^2+400)}=\sqrt{0,025t^2+1000}$

e $\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(100)-h(0)}{100-0}=\frac{35,36-31,62}{100}\approx 0,04$ cm per seconde

$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(600)-h(500)}{600-500}=\frac{100-85,15}{100}\approx 0,15$ cm per seconde

bladzijde 35

3a $u=x+0,5$ en $y=\frac{1}{u}$

b $u=\frac{1}{x}$ en $y=u+0,5$

c De grafiek van f heeft $x=-0,5$ als verticale asymptoot en $y=0$ als horizontale asymptoot. De grafiek van g daarentegen heeft $x=0$ als verticale asymptoot en $y=0,5$ als horizontale asymptoot.

d Als je eerst getallen optelt en daarna gaat delen, krijg je een andere uitkomst dan als je eerst deelt en daarna gaat optellen. Dus de volgorde van de schakels heeft invloed op de uitkomst van de functie.

4 $k: u=2^q+19$ en $y=\sqrt{u}$, $s: u=3t+6$ en $y=0,7\cdot u^2$, $w: u=2x-5$ en $y=\frac{3}{u}$

5a 60 cm = 6 dm, $O=2\cdot L^2=2\cdot 6^2=72$ dm²

b $V=0,1\cdot L^3=0,1\cdot 6^3=21,6$ dm³, $G=0,2\cdot V=0,2\cdot 21,6=4,32$ kg

c $G=0,2\cdot V=0,2\cdot 0,1\cdot L^3=0,02\cdot L^3$

d De vergelijking $80=0,02\cdot L^3$ geeft $L^3=\frac{80}{0,02}=4000$ en dus $L=\sqrt[3]{4000}\approx 15,874$.

Dit geeft $O=2\cdot L^2=2\cdot 15,874^2=503,98$ dm².

6a $h(V)$: $h(400)=\sqrt{2,5\cdot 400}\approx 31,62$ cm, $h(t)$: $h(400)=\sqrt{2,5\cdot(0,01\cdot 400^2+400)}\approx 70,71$ cm

b In het eerste geval betekent $h(400)$ de hoogte van het water in het reservoir als het volume van het water 400 liter is. In het tweede geval betekent $h(400)$ de hoogte van het water in het reservoir na 400 seconden.

bladzijde 36

7a $\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V(20)-V(10)}{20-10}=\frac{135-55}{10}=8$ liter per seconde

b $\frac{\Delta h}{\Delta V}=\frac{h(135)-h(55)}{135-55}=\frac{58,5-49,5}{80}\approx 0,11$ cm per liter

c $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ is dan $8\cdot 0,11\approx 0,9$ cm per seconde

d Als je weet hoeveel liter er per seconde bijkomt en als je weet hoeveel cm er per liter bijkomt, moet je deze twee getallen vermenigvuldigen om te berekenen hoeveel cm er per seconde bijkomt. In formulevorm: $\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta V}$

Ook de eenheden kloppen: $\frac{\text{liter}}{\text{seconde}}\cdot\frac{\text{cm}}{\text{liter}}=\frac{\text{cm}}{\text{seconde}}$

e $t = 10$: $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(11) - V(9)}{11 - 9} = \frac{60 - 50}{2} = 5$ liter per seconde,

$\frac{\Delta h}{\Delta V} = \frac{h(60) - h(50)}{60 - 50} = \frac{50,3 - 48,5}{10} = 0,18$ cm per liter,

dus $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta h}{\Delta V} = 5 \cdot 0,18 = 0,9$ cm per seconde.

8a $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(20) - V(10)}{20 - 10} = \frac{450 - 150}{10} = 30$ liter per seconde

$\frac{\Delta h}{\Delta V} = \frac{h(450) - h(150)}{450 - 150} = \frac{42,426 - 24,495}{300} = 0,06$ cm per liter

$\frac{\Delta h}{\Delta t}$ is dan $30 \cdot 0,06 = 1,8$ cm per seconde

b $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta h}{\Delta V} = \frac{V(10,001) - V(10)}{10,001 - 10} \cdot \frac{h(V(10,001)) - h(V(10))}{V(10,001) - V(10)}$

$= \frac{150,02 - 150}{0,001} \cdot \frac{24,49653 - 24,49490}{150,02 - 150} \approx 1,63$ cm per seconde

c $V' = 2t$ dus $V'(10) = 2 \cdot 10 = 20$, $h' = 2 \cdot \frac{1}{2} V^{-\frac{1}{2}} = V^{-\frac{1}{2}}$ en dus (met $V(10) = 150$)
$h'(150) = 150^{-\frac{1}{2}} = 0,08165$.
De stijgsnelheid van het water op $t = 10$ is dus $20 \cdot 0,08165 = 1,63$ cm per seconde.

9a $\frac{du}{dx} = -3$ en $\frac{dy}{du} = 4u^3$

b $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = -3 \cdot 4u^3 = -12u^3$ en dus $f'(x) = -12(2 - 3x)^3$

bladzijde 37

10a $u = 3t^2 + 8$ en $y = u^{1,5}$, $\frac{du}{dt} = 6t$ en $\frac{dy}{du} = 1,5u^{0,5}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{du} = 6t \cdot 1,5u^{0,5} = 9tu^{0,5}$ en dus
$h'(t) = 9t(3t^2 + 8)^{0,5}$

b $u = 7x^2 - 32$ en $y = \sqrt{u}$, $\frac{du}{dx} = 14x$ en $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = 14x \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = 7xu^{-\frac{1}{2}}$ en dus
$k'(x) = 7x(7x^2 - 32)^{-\frac{1}{2}}$

c $u = \frac{1}{2}x - 1$ en $y = u^2$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{du} = 2u$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} \cdot 2u = u$ en dus $f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$

d $u = x^3 + 7x$ en $y = u^3$, $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 7$ en $\frac{dy}{du} = 3u^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = (3x^2 + 7) \cdot 3u^2$ en dus

$g'(x) = (3x^2 + 7) \cdot 3 \cdot (x^3 + 7x)^3 = (9x^2 + 21) \cdot (x^3 + 7x)^3$

e $u = 1 + p^2$ en $y = \sqrt{u}$, $\frac{du}{dp} = 2p$ en $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dp} \cdot \frac{dy}{du} = 2p \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = pu^{-\frac{1}{2}}$ en dus
$h'(p) = p(1 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$

f $u = 5x - 12$ en $y = u^6$, $\frac{du}{dx} = 5$ en $\frac{dy}{du} = 6u^5$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du} = 5 \cdot 6u^5 = 30u^5$ en dus
$k'(x) = 30 \cdot (5x - 12)^5$

11a Toepassen van de regel $f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ geeft $f(x)=\frac{1}{(2x+4)^2}=(2x+4)^{-2}$.

b $u=2x+4$ en $y=u^{-2}$, $\frac{du}{dx}=2$ en $\frac{dy}{du}=-2u^{-3}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}=2\cdot-2u^{-3}=-4u^{-3}$ en dus

$f'(x)=-4\cdot(2x+4)^{-3}=\frac{-4}{(2x+4)^3}$

c $w(t)=\frac{3}{t^2+1}=3\cdot(t^2+1)^{-1}$, $u=t^2+1$ en $y=3u^{-1}$, $\frac{du}{dt}=2t$ en $\frac{dy}{du}=3\cdot-1u^{-2}=-3u^{-2}$,

$\frac{dy}{dt}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dy}{du}=2t\cdot-3u^{-2}=-6tu^{-2}$ en dus $h'(t)=-6t(t^2+1)^{-2}=\frac{-6t}{(t^2+1)^2}$

$g(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+p}}=(p^2+p)^{-\frac{1}{2}}$, $u=p^2+p$ en $y=u^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{du}{dp}=2p+1$ en $\frac{dy}{du}=-\frac{1}{2}u^{-1\frac{1}{2}}$,

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dp}\cdot\frac{dy}{du}=(2p+1)\cdot-\frac{1}{2}u^{-1\frac{1}{2}}=(-p-\frac{1}{2})\cdot u^{-1\frac{1}{2}}$ en dus $g'(p)=(-p-\frac{1}{2})(p^2+p)^{-1\frac{1}{2}}$

12a $f(x)=(3x+5)^2=(3x+5)(3x+5)=9x^2+15x+15x+25=9x^2+30x+25, f'(x)=18x+30$

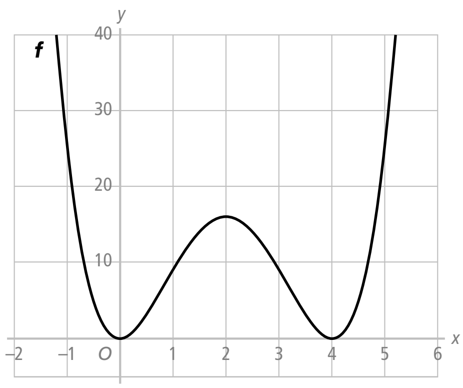
b $u=3x+5$ en $y=u^2$, $\frac{du}{dx}=3$ en $\frac{dy}{du}=2u$, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}=3\cdot 2u=6u$ en dus

$f'(x)=6\cdot(3x+5)=18x+30$. Dit klopt met het antwoord bij 12a.

c $f'(x)=3\cdot(3x+5)+(3x+5)\cdot 3=9x+15+9x+15=18x+30$. Dit klopt met de antwoorden bij 12a en 12b.

bladzijde 38

13a



De grafiek van f heeft 3 toppen.

b Met behulp van de rekenmachine (via calc en de optie minimum/maximum): de grafiek van f heeft uiterste waarden voor $x=0$, $x=2$ en $x=4$.

c $f'(x)=2(x^2-4x)(2x-4)$

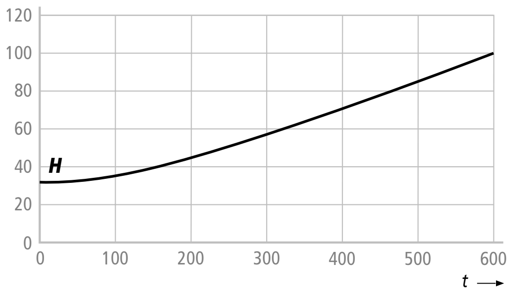
d $f'(x)=0$ oplossen geeft $x^2-4x=0$ of $2x-4=0$. De eerste vergelijking geeft $x(x-4)=0$ en dus $x=0$ of $x=4$. De tweede vergelijking geeft $2x=4$ en dus $x=2$.
Conclusie: deze oplossingen kloppen met het antwoord bij opdracht b.

14a Met behulp van de rekenmachine (via calc en de optie minimum): de functie is minimaal voor $x=3$ en het minimum is $y=1$.

b $g'(x)=\frac{1}{2}(x^2-6x+10)^{-\frac{1}{2}}(2x-6)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10)}}$

$g'(x)=0$ oplossen geeft $2x-6=0$ waaruit volgt $2x=6$ en dus $x=3$.
Conclusie: de functie g heeft inderdaad slechts één uiterste waarde.

15a



b $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(0{,}025t^2 + 1000)^{-\frac{1}{2}}(0{,}05t)$

c 5 minuten = 300 seconden, 10 minuten = 600 seconden

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{t=300} = \tfrac{1}{2}(0{,}025 \cdot 300^2 + 1000)^{-\frac{1}{2}} \cdot 0{,}05 \cdot 300 \approx 0{,}132 \text{ cm/s}$$

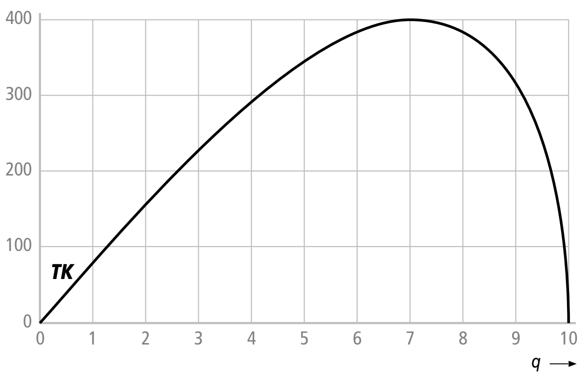
$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{t=600} = \tfrac{1}{2}(0{,}025 \cdot 600^2 + 1000)^{-\frac{1}{2}} \cdot 0{,}05 \cdot 600 \approx 0{,}15 \text{ cm/s}$$

d Voor $t = 600$ loopt de grafiek iets steiler dan voor $t = 300$.

16a $h(t) = 3t \cdot (t^2 + 4t)^{0,5}, h'(t) = 3 \cdot (t^2 + 4t)^{0,5} + 3t \cdot 0{,}5 \cdot (t^2 + 4t)^{-0,5} \cdot (2t + 4) = 3\sqrt{t^2 + 4t} + \dfrac{3t(t+2)}{\sqrt{t^2 + 4t}}$

b $w(q) = 3q \cdot (2q^2 + 4)^{0,5}, w'(q) = 3 \cdot (2q^2 + 4)^{0,5} + 3q \cdot 0{,}5 \cdot (2q^2 + 4)^{-0,5} \cdot 4q = 3\sqrt{2q^2 + 4} + \dfrac{6q^2}{\sqrt{2q^2 + 4}}$

17a



$0 < q < 10$ zijn realistische waarden voor q.

b Met behulp van de rekenmachine (via calc en de optie maximum): $q \approx 7{,}07$

c $TK'(q) = 8 \cdot (100 - q^2)^{0,5} + 8q \cdot 0{,}5 \cdot (100 - q^2)^{-0,5} \cdot -2q = 8 \cdot (100 - q^2)^{0,5} - 8q^2 \cdot (100 - q^2)^{-0,5}$

d $TK'(7{,}07) \approx 0$, dus de in opdracht b gevonden waarde van q klopt.

bladzijde 39

18a $H(1) = 1506; H(2) = 1512; H(3) = 1518$

b $H = 1500 + 6t$

c $p(1506) = 1013 - 6 \cdot 0{,}095 = 1012{,}43; p(1512) = 1013 - 12 \cdot 0{,}095 = 1011{,}86;$
$p(1518) = 1013 - 18 \cdot 0{,}095 = 1011{,}29$
$p(H) = 1013 - (H - 1500) \cdot 0{,}095 = 1013 - 0{,}095H + 142{,}5 = 1155{,}5 - 0{,}095H$

d $p(t) = 1155{,}5 - 0{,}095 \cdot (1500 + 6t) = 1155{,}5 - 142{,}5 - 0{,}57t = 1013 - 0{,}57t$

e $p'(t) = -0{,}57$, dus per seconde daalt de luchtdruk 0,57 millibar.

19a $k'(t) = \dfrac{(2t+4)^2 \cdot 3 - 3t \cdot 2(2t+4) \cdot 2}{((2t+4)^2)^2} = \dfrac{(2t+4)^2 \cdot 3 - 3t \cdot 2(2t+4) \cdot 2}{(2t+4)^4}$

b $k'(t) = \dfrac{(2t+4)^2 \cdot 3 - 3t \cdot 2(2t+4) \cdot 2}{(2t+4)^4} = \dfrac{(4t^2+16t+16) \cdot 3 - 12t \cdot (2t+4)}{(2t+4)^4}$

$= \dfrac{12t^2+48t+48-24t^2-48}{(2t+4)^4} = \dfrac{-12t^2+48t}{(2t+4)^4}$

20a Xmin = 0, Xmax = 20, Ymin = 0, Ymax = 0,03

b Met de rekenmachine (via calc en de optie maximum): $t = 2$ en $C = 0{,}02$.

c Met de rekenmachine (Y2 = 0,01 en intersect): $t \approx 11{,}66$

d $C'(t) = \dfrac{(10t+20)^2 \cdot 16 - 16t \cdot 2 \cdot (10t+20) \cdot 10}{(10t+20)^4} = \dfrac{(10t+20)^2 \cdot 16 - 320t \cdot (10t+20)}{(10t+20)^4}$

Grafiek van C' plotten en het maximum berekenen. Conclusie: er wordt voldaan aan de eis.

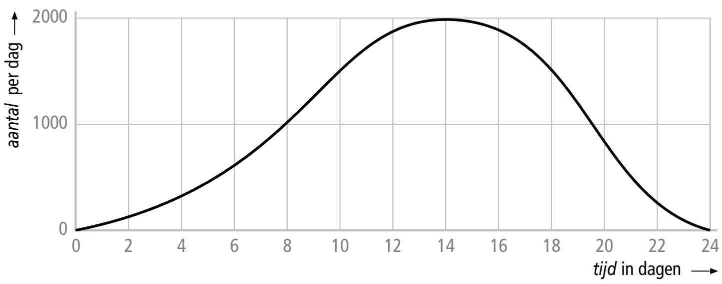
bladzijde 40

21a Vanaf dag 1 tot en met dag 14 is er sprake van toenemende stijging.
Vanaf dag 15 tot en met dag 24 is er sprake van afnemende stijging.

b $t = 14$

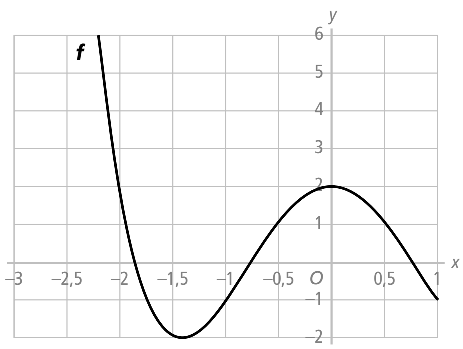
c $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} \approx \dfrac{10\,000 - 2000}{16-12} = 2000$ per dag

d



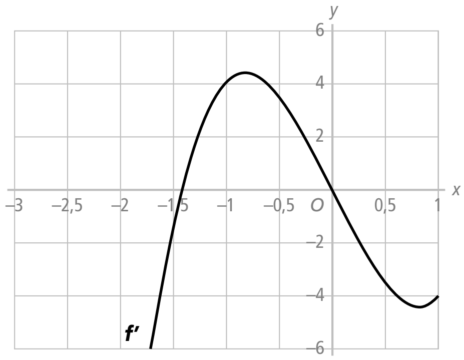
e De top van de grafiek van de afgeleide (14, 2000) hoort bij de maximale groeisnelheid van opdracht b.

22a



De helling is maximaal voor $x \approx -0{,}8$.

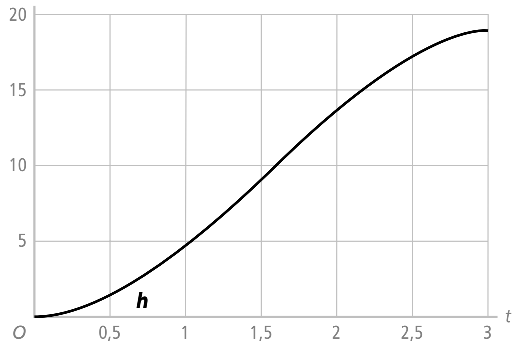
b $f'(x) = 2 \cdot (x^2 - 2) \cdot 2x = 4x^3 - 8x$



Met behulp van de rekenmachine (via calc en de optie maximum) volgen de coördinaten (–0,82; 0,22) voor de top van de grafiek van de helling van f.

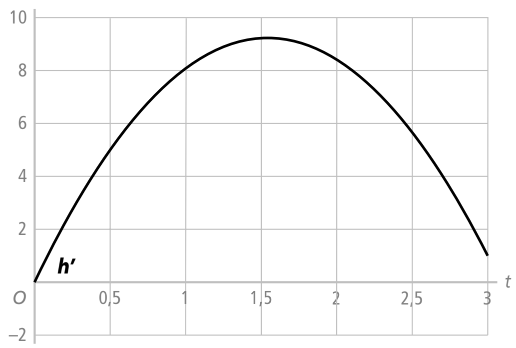
23a $h'(t) = 12t - 3{,}9t^2$, $h'(3) = 12 \cdot 3 - 3{,}9 \cdot 3^2 = 0{,}9$ cm/minuut.

b



De stijgsnelheid is maximaal voor $t \approx 1{,}5$.

c



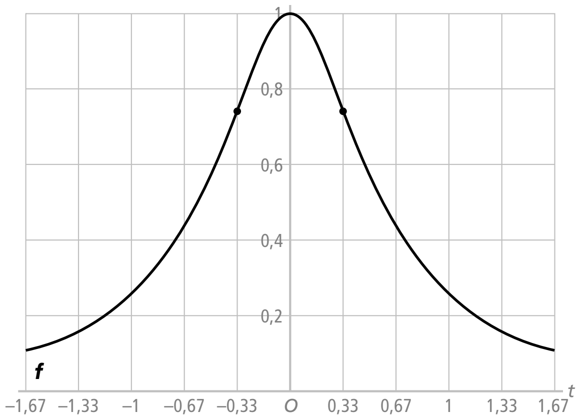
De top van de grafiek van de afgeleide hoort bij de maximale groeisnelheid van opdracht b.

d Met de rekenmachine (via calc en de optie maximum): $t = 1{,}54$.

e $h'(1{,}54) = 12{,}47$ cm/minuut en $h(3) \approx 9{,}5$ cm.

bladzijde 41

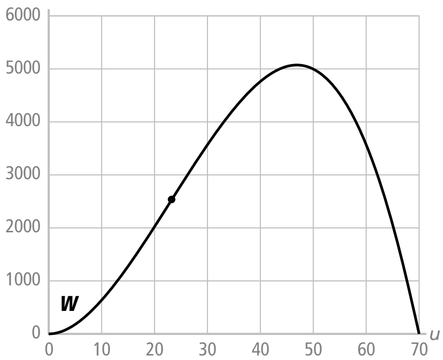
24a,b



c $f(t)=(3t^2+1)^{-1}, f'(t)=-(3t^2+1)^{-2}\cdot 6t=\dfrac{-6t}{(3t^2+1)^2}$

d De grafiek van f' plotten en het maximum en minimum berekenen levert $t=-\frac{1}{3}$ en $t=\frac{1}{3}$
Dit geeft de buigpunten $(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ en $(\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$.

25a,b



c $f'(u)=-0{,}3u^2+14u$, De grafiek van f' plotten en het maximum berekenen levert $u=23\frac{1}{3}$.
Dit geeft het buigpunt $(23\frac{1}{3};\ 2540{,}74)$.

d Op dit punt slaat de stijging van de winst om: van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

26a f' heeft 3 nulpunten, dus f heeft 3 toppen.

b Links van een minimum is er sprake van daling, rechts van een minimum is er sprake van stijging.
Bij daling is de afgeleide kleiner dan nul, bij stijging is de afgeleide groter dan nul.
Dus is er een minimum voor $x=-4$ en $x=3$.

c f' heeft één maximum en één minimum, dus f heeft twee buigpunten.

d De grafiek van g heeft een horizontale raaklijn als geldt $g'(x)=0$. Dit is het geval voor $x=-1$ en $x=1$.

e De grafiek van de afgeleide *raakt* de x-as voor $x=1$. Dat wil zeggen: de grafiek stijgt op het interval $\langle -1, 1\rangle$, heeft een horizontale raaklijn voor $x=1$ en stijgt op het interval $\langle 1, \rightarrow\rangle$ weer verder. Er is dus geen top.

f g' is maximaal voor $x=-1$ en minimaal voor $x=1$. De helling in de buigpunten is respectievelijk 4 en 0.

bladzijde 42

27a De stut staat $\sqrt{6{,}5^2 - 6^2} = 2{,}5$ meter van de muur af.

b De afstand tot de muur kan beschreven worden met een lineaire formule. De beginwaarde is 2,5 meter (zie opdracht a) en per seconde wordt de afstand tot de muur 1 cm = 0,01 m groter.
De formule is dus $u = 2{,}5 + 0{,}01t$.

c $h = \sqrt{6{,}5^2 - u^2} = \sqrt{42{,}25 - u^2}$

d $h = \sqrt{42{,}25 - u^2} = \sqrt{42{,}25 - (2{,}5 + 0{,}01t)^2} = \sqrt{42{,}25 - (6{,}25 + 0{,}05t + 0{,}0001t^2)}$
$= \sqrt{36 - 0{,}05t - 0{,}0001t^2}$

e $h'(t) = \frac{1}{2} \cdot (36 - 0{,}05t - 0{,}0001t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-0{,}05 - 0{,}0002t) = \dfrac{-0{,}05 - 0{,}0002t}{2\sqrt{36 - 0{,}05t - 0{,}0001t^2}}$

Als de stut op de grond ligt, is u = 6,5 meter en is $h = 0$. Het tijdstip dat hierbij hoort is t = 400.
$h'(400)$ bestaat niet, want in de noemer komt nul te staan. $h'(399)$ is een erg grote waarde. De snelheid is in dit model oneindig groot.

28a Als er 120 mensen per minuut de tunnel verlaten hebben zij ongeveer $0{,}25\ \text{m}^2$ of ongeveer $1{,}75\ \text{m}^2$ tot hun beschikking.

b Bij de snelheid van 50 m/min is het beschikbare vloeroppervlak ongeveer $0{,}65\ \text{m}^2$.

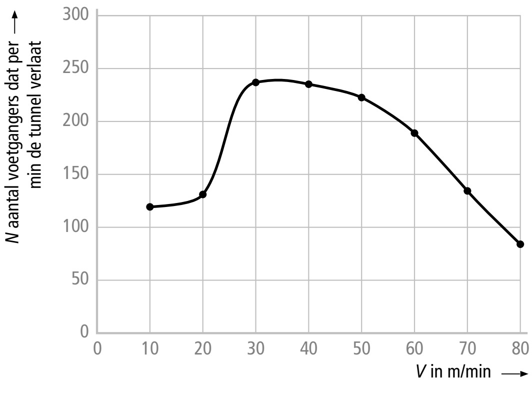
c Bij vloeroppervlak $0{,}65\ \text{m}^2$ verlaten ongeveer 220 mensen per minuut de tunnel.

d Bij vloeroppervlak $0{,}4\ \text{m}^2$ verlaten de meeste mensen per minuut de tunnel. Dan is de snelheid 30 m/min.

e

V	10	20	30	40	50	60	70	80
M	0,25	0,3	0,4	0,5	0,65	0,85	1,45	2,8
N	120	130	240	235	225	190	135	85

f



Toelichting: Als de snelheid laag is, verlaten er ongeveer 120 mensen per minuut de tunnel. Het vloeroppervlak is per voetganger dan redelijk klein, maar door de lage snelheid is het aantal mensen dat de tunnel per minuut verlaat nog niet zo groot.
Als de snelheid gemiddeld is, is het aantal mensen dat per minuut de tunnel verlaat maximaal. Het vloeroppervlak per voetganger is nog niet groot, maar de snelheid is al wel zo hoog dat het aantal mensen dat de tunnel per minuut verlaat maximaal is.
Als de snelheid hoog is, wordt het aantal mensen dat de tunnel per minuut verlaat steeds kleiner. Dit komt doordat er per voetganger steeds meer vloeroppervlak nodig is.

g Als er 75 mensen per minuut de tunnel verlaten hebben zij $0{,}25\,\text{m}^2$ of $3{,}25\ \text{m}^2$ tot hun beschikking.
In de spits gaat het om de eerste. Als je de tunnel groter maakt wordt M groter. Dan gaat de snelheid V omhoog. En in de N-M grafiek zie dat dan N groter wordt. Dus gaat het aantal mensen dat per minuut de tunnel kan verlaten omhoog. Conclusie: het is zinvol om de tunnel groter te maken.

bladzijde 43

29a Oplossing 1 (geheel door het bos):

$\sqrt{5000^2+2000^2}=5385$ meter leiding nodig. Kosten: $25\cdot 5385=134\,629$ euro.

Oplossing 2 (geheel langs de weg):
7000 meter leiding nodig. Kosten: $20\cdot 7000=140\,000$ euro.
Conclusie: geheel door het bos is goedkoper.

b Als $PQ=1$ km, dan is $CP=4$ km $=4000$ m en $PH=\sqrt{1000^2+2000^2}=2002$ m.

Dan geldt voor de aanlegkosten $AK=20\cdot 4000+25\cdot 2002=130\,050$ euro.

c Domein: $0\le x\le 5000$

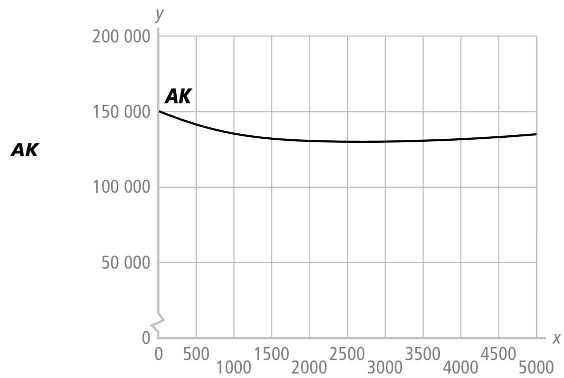
d $PQ=x,\ CP=5000-x,\ PH=\sqrt{x^2+2000^2}=\sqrt{x^2+4\,000\,000}$

$AK=20\cdot(5000-x)+25\cdot\sqrt{x^2+4\,000\,000}=100\,000-20x+25\cdot\sqrt{x^2+4\,000\,000}$

e $AK'=-20+25\cdot\frac{1}{2}(x^2+4\,000\,000)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=-20+25x\cdot(x^2+4\,000\,000)^{-\frac{1}{2}}$

$AK'=0$ oplossen geeft $x=2667$ m

f



Het bij opdracht e gevonden antwoord levert inderdaad de minimale aanlegkosten op.

g $x=PQ=2667$ m, $CP=5000-2667=2333$ m en $PH=\sqrt{2667^2+4\,000\,000}=3334$ m

Er is $2333+3334=5667$ m leiding nodig en dit kost $130\,000$ euro.

bladzijde 44

I-1a $t=5$ dagen: $V=950\ \text{m}^3$

b $V=950\ \text{m}^3$: $H=15{,}05$ dm

c De tijd-hoogtegrafiek bevat het punt $(5;15{,}05)$.

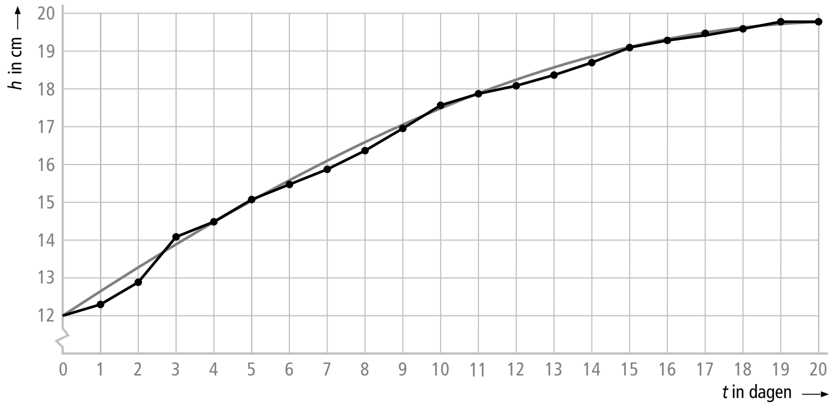
d $t=10$ dagen: $H=17{,}6$ dm, $t=15$ dagen: $H=19{,}1$ dm

e In één assenstelsel kun je maar twee variabelen weergeven, terwijl je hier te maken hebt met drie variabelen, namelijk tijd, volume en hoogte.

I-2a $t = 5$ dagen $\rightarrow V = 937{,}5\ \text{m}^3 \rightarrow H = 15{,}1$ dm
$t = 10$ dagen $\rightarrow V = 3000\ \text{m}^3 \rightarrow H = 17{,}5$ dm
Deze antwoorden komen goed overeen met die uit opdracht I-1.

b De formule voor V invullen levert $H = 0{,}1\sqrt{V} = +12 = 0{,}1\sqrt{45t^2 - 1{,}5t^3} + 12$.

c



De grafiek die bij de formule hoort is vloeiender, maar komt verder goed overeen met de grafiek van de meetgegevens.

bladzijde 45

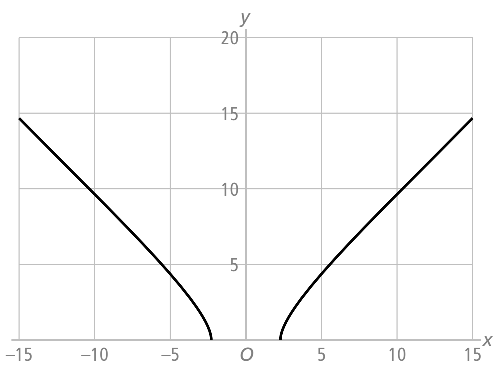
3a $u = x + 0{,}5$ en $y = \dfrac{1}{u}$

b $u = \dfrac{1}{x}$ en $y = u + 0{,}5$

c De grafiek van *f* heeft $x = -0{,}5$ als verticale asymptoot en $y = 0$ als horizontale asymptoot. De grafiek van *g* daarentegen heeft $x = 0$ als verticale asymptoot en $y = 0{,}5$ als horizontale asymptoot.
De functie *f* heeft geen nulpunten maar *g* wel.

d Als je eerst getallen optelt en daarna gaat delen, krijg je een andere uitkomst dan als je eerst deelt en daarna gaat optellen. Dus de volgorde van de schakels heeft invloed op de uitkomst van de functie.

I-4a



b $y = \sqrt{u} = \sqrt{x^2 - 4}$. De grafiek van deze functie is dezelfde als bij opdracht a.

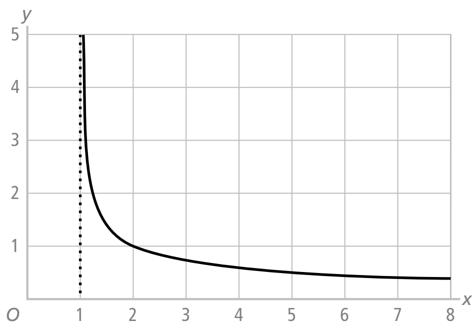
c Het domein van de kettingfunctie is $x \leq -2$ of $x \geq 2$. Dit kun je uit de grafiek van de eerste schakel aflezen doordat de grafiek op dat domein groter of gelijk aan nul is.

I-5a $y=\frac{1}{u}=\frac{1}{x^2+2x}$

b De grafiek van de kettingfunctie heeft verticale asymptoot $u=0$.
Oplossen van $x^2+2x=0$ geeft $x(x+2)=0$ en dus $x=0$ en $x=-2$.
Conclusie: de grafiek van de kettingfunctie heeft verticale asymptoten $x=0$ en $x=-2$.

c De functie $y=\frac{1}{u}$ is maximum als u minimaal is. Het minimum van u bepaal je met behulp van de afgeleide: $u'(x)=2x+2$. Dan geldt $u'(x)=0$ als $x=-1$.
Plotten van de grafiek van u laat zien dat de grafiek voor $x=-1$ een minimum heeft.
Conclusie: voor $x=-1$ heeft de kettingfunctie een maximum.

I-6a $y=\frac{1}{u}$ en $u=\sqrt{x-1}$

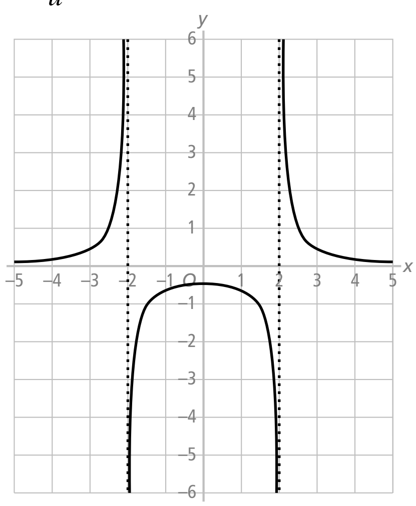


De grafiek van de kettingfunctie heeft een verticale asymptoot als geldt $u=0$.

Oplossen van de vergelijking $\sqrt{x-1}=0$ geeft $x=1$.

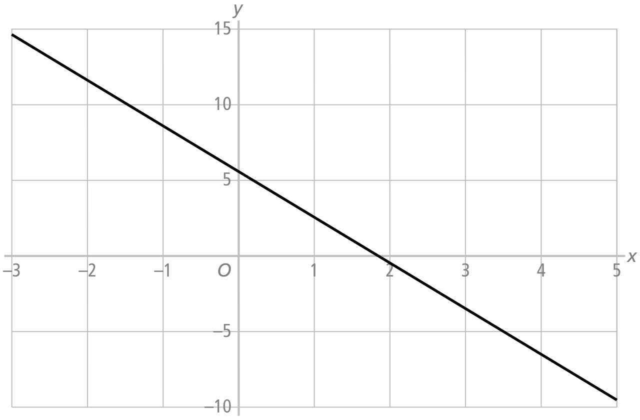
Dit zie je terug in de rode stippellijn in het assenstelsel.

b $y=\frac{2}{u}$ en $u=x^2-4$

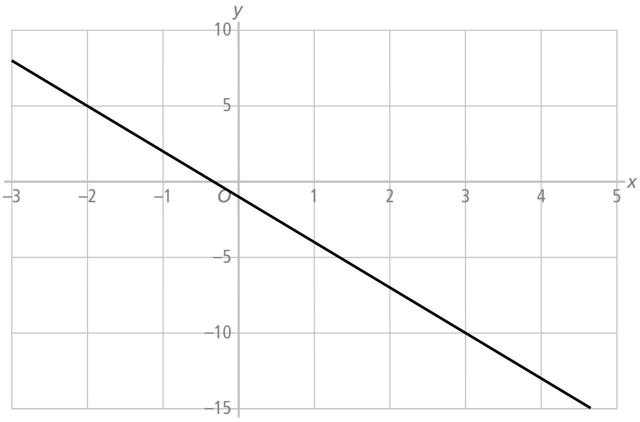


De grafiek van de kettingfunctie heeft verticale asymptoten als geldt $u=0$. Oplossen van de vergelijking $x^2-4=0$ levert $x=2$ en $x=-2$. Dit zie je terug in de rode stippellijnen in het assenstelsel.

I-7a $y = 1 - 1,5u = 1 - 1,5 \cdot (2x - 3) = 1 - 3x + 4,5 = 5,5 - 3x$



b $y = 2u - 3 = 2 \cdot (1 - 1,5x) - 3 = 2 - 3x - 3 = -1 - 3x$



c De richtingscoëfficiënt van beide functies is gelijk, maar het begingetal is verschillend: bij opdracht a is $b = 5,5$ en bij opdracht b is $b = -1$.

I-8 Voorbeeld 1: $y = 3u$ en $u = 2x$.
Voorbeeld 2: $y = u - 5$ en $u = x + 3$.

bladzijde 48

T-1a $u = a^2 - 5,\ y = u^3$

b $u = a^3, y = u^2 - 5$, dus $f(a) = (a^3)^2 - 5 = a^6 - 5$

T-2a $h'(t) = 4 \cdot (2t + 3)^3 \cdot 2 = 8(2t + 3)^3$

b $K(p) = (2p^2 - 5p)^{\frac{1}{2}}, K'(p) = \frac{1}{2} \cdot (2p^2 - 5p)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4p - 5) = \dfrac{2p - 2\frac{1}{2}}{\sqrt{2p^2 - 5p}}$

c $w(q) = 2 \cdot (3q + 6)^{-1}, w'(q) = 2 \cdot -1 \cdot (3q + 6)^{-2} \cdot 3 = \dfrac{-6}{(3q + 6)^2}$

d $f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot (x^2 + 10) \cdot 2x = 8x \cdot (x^2 + 10) = 8x^3 + 80x$

e $g(t) = (3t + 4)^{\frac{1}{2}}, g'(t) = \frac{1}{2} \cdot (3t + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \dfrac{1,5}{\sqrt{3t + 4}}$

f $h(p) = 3 \cdot (2p - 1)^{-1}, h'(p) = 3 \cdot -1 \cdot (2p - 1)^{-2} \cdot 2 = \dfrac{-6}{(2p - 1)^2}$

T-3a V in liters, dus $a = 0,9$ (want 900 cm^3 = 0,9 dm^3).

b $H = (V+1)^{\frac{1}{3}} - 1 = (0,9t+1)^{\frac{1}{3}} - 1$

c $H' = \frac{1}{3} \cdot (0,9t+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,9 = 0,3 \cdot (0,9t+1)^{-\frac{2}{3}}$

$H'(0) = 0,3 \cdot (0,9 \cdot 0 + 1)^{-\frac{2}{3}} = 0,3$ dm/min = 30 mm/min = 0,5 mm/s

d $H'(2) = 0,3 \cdot (0,9 \cdot 2 + 1)^{-\frac{2}{3}} = 0,151$ dm/min = 15,1 mm/min = 0,25 mm/s

e Situatie 1: $H_1 = (0,9t+1)^{\frac{1}{3}} - 1$ en $H_1' = 0,3 \cdot (0,9t+1)^{-\frac{2}{3}}$

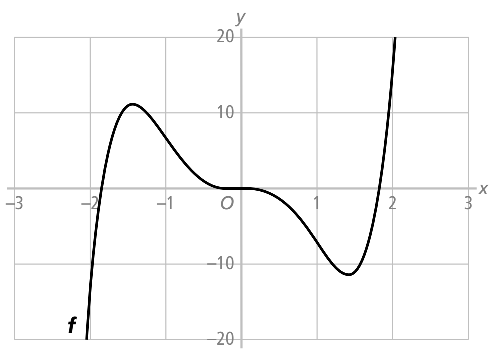
Situatie 2: $V_2 = 2 \cdot 0,9t = 1,8t$ en dus $H_2 = (1,8t+1)^{\frac{1}{3}} - 1$ en

$H_2' = \frac{1}{3} \cdot (1,8t+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 1,8 = 0,6(1,8t+1)^{-\frac{2}{3}}$

Als Erik gelijk heeft moet gelden $2 \cdot H_1'(t) = H_2'(t)$.

$2 \cdot H_1'(t) = 0,6 \cdot (0,9t+1)^{-\frac{2}{3}} \neq 0,6 \cdot (1,8t+1)^{-\frac{2}{3}} = H_2'(t)$, dus Erik heeft ongelijk.

T-4a



b $f'(x) = 3 \cdot 5x^4 - 10 \cdot 3x^2 = 15x^4 - 30x^2$

c Plotten laat zien dat de grafiek van f' drie toppen heeft, dus f heeft drie buigpunten.

d De grafiek van f' heeft toppen voor $x = -1$, $x = 0$ en $x = 1$.
Dit geeft de buigpunten $(-1, 7)$, $(0, 0)$ en $(1, -7)$.

bladzijde 49

T-5a Met de rekenmachine (Y1 =… en Y2 =… en via calc de optie intersect) volgt $q = 500$.

b $O' = 20\,000 \cdot (q+500)^{-1} + 20\,000q \cdot -1 \cdot (q+500)^{-2} = 20\,000 \cdot (q+500)^{-1} - 20\,000q \cdot (q+500)^{-2}$

c Als de opbrengst maximaal is voor $q = 500$ moet gelden $O'(500) = 0$.

$O' = 20\,000 \cdot (500+500)^{-1} - 20\,000 \cdot 500 \cdot (500+500)^{-2} = 10$

Conclusie: een opbrengst van 10 000 euro is nog niet maximaal.

d $O' = 0$ oplossen.

$$\frac{20\,000}{q+500} = \frac{20\,000q}{(q+500)^2}$$

$20\,000(q+5)^2 = 20\,000q(q+5)$
$20\,000(q+500) = 20\,000q$
$20\,000q + 10\,000\,000 = 20\,000q$
geen oplossing
Conclusie: er is geen aantal waarvoor de opbrengst maximaal is.

T-6a Elke minuut 0,5 mm korter, dus in 6 minuten 3 mm korter. De beginlengte is 10 cm = 100 mm, dus na zes minuten is de lengte van een ribbe 97 mm. Het volume is dan $97^3 = 912\,673\ \text{mm}^3 = 912{,}673\ \text{cm}^3$.

b $r = 100 - 0{,}5t$ mm

c $V' = 3 \cdot (100 - 0{,}5t)^2 \cdot -0{,}5 = -1{,}5 \cdot (100 - 0{,}5t)^2$

d $V = r^3 = (100 - 0{,}5t)^3$ mm³

e $V'(0) = -1{,}5 \cdot (100 - 0)^2 = -15000$ mm³/min, $\frac{-15\,000}{3} = -5000$ mm³/min, $V' = -5000$ oplossen met de rekenmachine geeft $t = 84{,}5$ minuut.

T-7a De beginwaarde is 0 cm² en de groeisnelheid is 5 cm² per seconde. Samen geeft dit $O = 5t + 0 = 5t$.

b Voor de oppervlakte van een cirkel geldt $O = \pi R^2$. Dit geeft $R^2 = \frac{O}{\pi}$ en dus $R = \sqrt{\frac{O}{\pi}}$.

c De oppervlakte wordt steeds groter, dus de uitkomst van $\frac{O}{\pi}$ wordt ook steeds groter.

De wortel maakt dat de straal afnemend groeit. Denk maar aan de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$.

d $R = \sqrt{\frac{O}{\pi}} = \sqrt{\frac{5t}{\pi}}$

e $R' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5t}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = 2\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5t}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$R' = 0{,}15$ oplossen met de rekenmachine geeft $t \approx 174{,}5$ seconden.

T-8a Een functie heeft een buigpunt als de afgeleide een minimum of maximum heeft. Bij een tweedegraadsfunctie is de afgeleide een eerstegraadsfunctie. Een eerstegraadsfunctie heeft geen minimum of maximum, dus een tweedegraadsfunctie heeft geen buigpunt.

b Een functie heeft een buigpunt als de afgeleide een minimum of maximum heeft. Bij een derdegraadsfunctie is de afgeleide een tweedegraadsfunctie. Een tweedegraadsfunctie heeft altijd een minimum of maximum, dus een derdegraadsfunctie heeft altijd een buigpunt.

c $f(x) = x^4$, want $f'(x) = 4x^3$ en deze functie heeft geen minimum of maximum.