# Hoofdstuk 6 - Recursie en differenties

***bladzijde 154***

**V-1a** 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243 ; 729 ; .....
10 ; 7 ; 4 ; 1 ; –2 ; –5 ; –8 ; ......
2 ; 3,5 ; 5 ; 6,5 ; 8 ; 9,5 ; 11 ; .....
400 ; 200 ; 100 ; 50 ; 25 ; 12,5 ; 6,25 ; ....

**b** Rij 2: nieuwe waarde = oude waarde – 3.
Rij 3: nieuwe waarde = oude waarde + 1,5.
Rij 3: nieuwe waarde = oude waarde $\cdot$ 0,5.

**V-2a** De rijen 2 en 3 zijn rekenkundig, want daar vind je de volgende term door er steeds hetzelfde getal bij op te tellen of vanaf te trekken.
De rijen 1 en 4 zijn meetkundig, want daar vind je de volgende term door steeds met hetzelfde getal te vermenigvuldigen.

**b** Rij 1: recursieformule $u_n = 3 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 1$; rangnummerformule $u_n = 3^{n-1}$.
Rij 2: recursieformule $u_n = u_{n-1} - 3$ met $u_1 = 10$; rangnummertformule $u_n = 3n + 7$.
Rij 3: recursieformule $u_n = u_{n-1} + 1,5$ met $u_1 = 2$; rangnummerformule $u_n = 1,5n + 0,5$.
Rij 4: recursieformule $u_n = 0,5 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 400$; rangnummerformule $u_n = 400 \cdot (0,5)^{n-1}$.

**c** Je moet de waarde van één van de termen geven omdat een recursieformule aangeeft hoe je een term vindt uit een vorige term. Je moet dus weten waarmee je moet beginnen.

**V-3a** $K_1 = 3$ ; $K_2 = 6$ ; $K_3 = 12$ ; $K_4 = 24$ ; $K_5 = 48$.
Rangnummerformule: $K_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

**b** $u_1 = 500$ ; $u_2 = 0,8 \cdot 500 = 400$ ; $u_3 = 320$ ; $u_4 = 256$ ; $u_5 = 204,8$.
Rangnummerformule: $u_n = 500 \cdot u^{n-1}$.

**c** $u_1 = 20$ ; $u_2 = 20 - 2,2 = 17,8$ ; $u_3 = 15,6$ ; $u_4 = 13,4$ ; $u_5 = 11,2$.
Rangnummerformule: $u_n = -2,2n + 22,2$.

**d** $p_1 = -5$ ; $p_2 = -5 + 3 = -2$ ; $p_3 = 1$ ; $p_4 = 4$ ; $p_5 = 7$.
Rangnummerformule: $p_n = 3n - 8$.

***bladzijde 155***

**V-4a** Het is een rekenkundige rij, dus er komt steeds hetzelfde getal bij, zeg $v$. Dan geldt
$k_8 = k_7 + v = k_6 + 2 \cdot v = k_5 + 3 \cdot v = k_4 + 4 \cdot v$ dus
$24 = 10 + 4 \cdot v$
$4v = 14$
$v = 3\frac{1}{2}$
Dan is dus $k_5 = 10 + 3\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$.

**b** Recursieformule: $k_n = k_{n-1} + 3\frac{1}{2}$ met $k_1 = -\frac{1}{2}$.
Rangnummerformule: $k_n = 3\frac{1}{2}n - 4$.

**V-5a** De reden van de rij is het getal waarmee steeds vermenigvuldigd wordt, *r*.

Dus $v(3) = r \cdot v(2) = r^2 \cdot v(1)$

$90 = r^2 \cdot 40$

$r^2 = \frac{90}{40} = 2{,}25 \Rightarrow r = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

**b** Recursieformule: $v(n) = 1{,}5 \cdot v(n-1)$ met $v(1) = 40$.

Rangnummerformule: $v(n) = 40 \cdot 1{,}5^{n-1}$.

**c** $u_6 = r^3 \cdot u_3$

$486 = r^3 \cdot 18$

$r^3 = \frac{486}{18} = 27$

$r = \sqrt[3]{27} = 3$

Recursieformule: $u_n = 3 \cdot u_{n-1}$ met $u_1 = 2$.

Rangnummerformule: $u_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

**V-6a** Er is sprake van een rekenkundige rij met $u_1 = 20$ en $u_{12} = -24$ dus

$$s_{12} = \sum_{k=1}^{12} u_k = \tfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot (20 + (-24)) = 6 \cdot -4 = -24 \ .$$

**b** Er is sprake van een meetkundige rij met $u_1 = 5 \cdot 2^0 = 5$ en reden $r = 2$ dus

$$s_{12} = \sum_{k=1}^{12} u_k = 5 \cdot \frac{1-2^{12}}{1-2} = 20475 \ .$$

**V-7a** Er is sprake van een meetkundige rij met beginterm 20 en reden $r = \frac{1}{2}$ dus

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} u_k = 20 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \approx 39{,}96 \ .$$

**b** Er is sprake van een rekenkundige rij met $u_1 = 0{,}8$ en $u_{10} = 0{,}8 + 9 \cdot 0{,}4 = 4{,}4$ dus

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} u_k = \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0{,}8 + 4{,}4) = 5 \cdot 5{,}2 = 26 \ .$$

**V-8a** Meetkundige rij met $K_1 = 3$ en reden $r = 2$. $s_{16} = 3 \cdot \dfrac{1-2^{16}}{1-2} = 196605$.

**b** Meetkundige rij met $u_1 = 500$ en reden $r = 0{,}8$. $s_{16} = 500 \cdot \dfrac{1-0{,}8^{16}}{1-0{,}8} \approx 2429{,}63$.

**c** Rekenkundige rij met $u_1 = 20$ en $u_{16} = -2{,}2 \cdot 16 + 22{,}2 = -13$.

$s_{16} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (20 + (-13)) = 8 \cdot 7 = 56$.

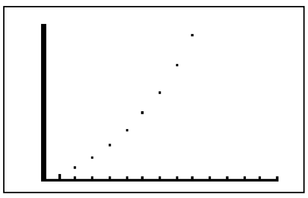
**d** Rekenkundige rij met $p_1 = -5$ en $p_{16} = 3 \cdot 16 - 8 = 40$.

$s_{16} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (-5 + 40) = 8 \cdot 35 = 280$.

**V-9a**

| n | u(n) |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 16 |
| 3 | 29.2 |
| 4 | 45.04 |
| 5 | 64.048 |
| 6 | 86.858 |
| 7 | 114.23 |

n=7



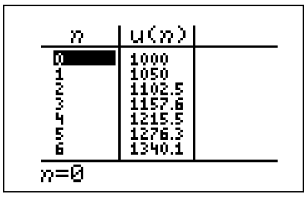
**b** Uit de tabel lees je af dat vanaf $n = 14$ $u_n$ groter is dan 500.

***bladzijde 156***

**1a** $B_0$ geeft het bedrag aan het begin van de spaarperiode, dus na 0 jaar aan.

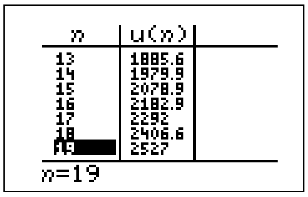
**b** De groeifactor is 1,05, dus Thomas krijgt 5% rente op het spaargeld.

**c**



| n | u(n) |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 1 | 1050 |
| 2 | 1102.5 |
| 3 | 1157.6 |
| 4 | 1215.5 |
| 5 | 1276.3 |
| 6 | 1340.1 |

n=0

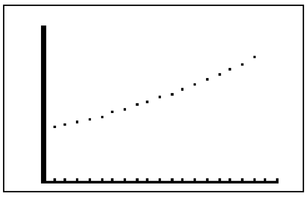


| n | u(n) |
|---|---|
| 13 | 1885.6 |
| 14 | 1979.9 |
| 15 | 2078.9 |
| 16 | 2182.9 |
| 17 | 2292 |
| 18 | 2406.6 |
| 19 | 2527 |

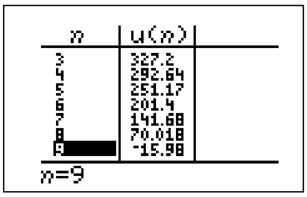
n=19

Thomas heeft op zijn 18e verjaardag het bedrag van 2406,60 euro staan.

**d**



**2a**

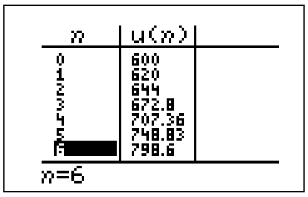


| n | u(n) |
|---|---|
| 3 | 327.2 |
| 4 | 292.64 |
| 5 | 251.17 |
| 6 | 201.4 |
| 7 | 141.68 |
| 8 | 70.018 |
| 9 | -15.98 |

n=9

Uit de tabel blijkt dat de populatie op $t = 9$ niet meer bestaat.

**b**

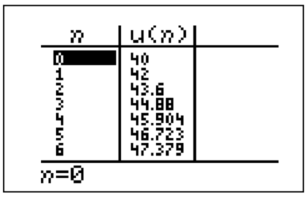


| n | u(n) |
|---|---|
| 0 | 600 |
| 1 | 620 |
| 2 | 644 |
| 3 | 672.8 |
| 4 | 707.36 |
| 5 | 748.83 |
| 6 | 798.6 |

n=6

Uit de tabel blijkt dat de populatie toeneemt.

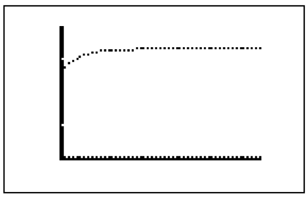
**3a**



| n | u(n) |
|---|---|
| 0 | 40 |
| 1 | 42 |
| 2 | 43.6 |
| 3 | 44.88 |
| 4 | 45.904 |
| 5 | 46.723 |
| 6 | 47.379 |

n=0

**b**



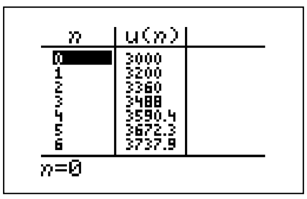
$u_{10} = 48{,}926$ ; $u_{20} = 49{,}885$ ; $u_{30} = 49{,}988$

**c** Vanaf $t = 45$ veranderen de waarden van $u_t$ niet meer. Dan geldt $u_t = 50$ .

***bladzijde 157***

**4a** Begin 1999 is $t = 0$, de recurrente betrekking is dan $u_n = 0{,}8 \cdot u_{n-1} + 800$ met $u_0 = 3000$ .

**b**



| n | u(n) |
|---|---|
| 0 | 3000 |
| 1 | 3200 |
| 2 | 3360 |
| 3 | 3488 |
| 4 | 3590.4 |
| 5 | 3672.3 |
| 6 | 3737.9 |

n=0

Dus begin 2000 zijn er 3200 bomen, begin 2001 zijn er 3360 bomen, begin 2002 zijn er 3488 bomen, begin 2003 zijn er 3590 bomen, begin 2004 zijn er 3672 bomen en begin 2005 zijn er 3738 bomen.

**c** De tabel doorlopen geeft dat er op den duur 4000 bomen op het perceel staan.

**d** De recurrente betrekking met beginwaarde 2000 geeft op den duur ook 4000 bomen.

**5a** Invullen van de recursievergelijking en de tabel bekijken geeft dat deze tuinder op den duur 2000 bomen op het perceel heeft staan.

**b** $B = 0,85B + 300$
$0,15B = 300$
$B = \frac{300}{0,15} = 2000$

**c** Dan verandert het aantal bomen niet want hij kapt 15%, dus 300 bomen en plant er ook weer 300.

**6a** $K = 1,3K - 90$
$-0,3K = -90$
$K = \frac{-90}{-0,3} = 300$ De evenwichtswaarde is 300.

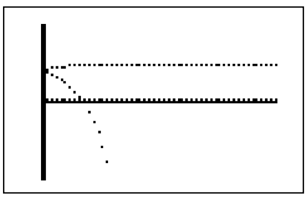
**b** $u = 0,99u + 10$
$0,01u = 10$
$u = 1000$ De evenwichtswaarde is 1000.

**7** Om de evenwichtswaarde te vinden moet je de vergelijking $X = aX + b$ oplossen.
$X = aX + b$
$X - aX = b$
$(1-a)X = b$
$X = \dfrac{b}{1-a}$

**8a** De evenwichtswaarde $v = \dfrac{-10}{1-1,2} = \dfrac{-10}{-0,2} = 50$.

De evenwichtswaarde $u = \dfrac{10}{1-0,8} = \dfrac{10}{0,2} = 50$.

**b**



Uit de grafiek blijkt dat de termen van de rij $v_t$, wanneer deze een startwaarde heeft die kleiner is dan de evenwichtswaarde, steeds kleiner worden. Voor de rij $u_t$ geldt dit niet, de termen daarvan gaan op den duur naar de evenwichtswaarde.

***bladzijde 158***

**9a** De straling neemt elk jaar met 3% af, dus wordt er elk jaar vermenigvuldigd met 0,97.
Recursievergelijking: $S(t) = 0,97S(t-1)$ met $S(0) = 100$.
Rangnummerformule: $S(t) = 100 \cdot 0,97^t$.

**b** Dit gaat het eenvoudigst met de rangnummerformule.
$S(80) = 100 \cdot 0,97^{80} \approx 8,74$.
Na 80 jaar is er nog 8,74% van de straling over.

**10a** De evenwichtswaarde $X = \frac{500}{1-0,75} = 2000$.

**b**

| $t$ | $X(t)$ | $X(t)$-ew.waarde |
|---|---|---|
| 0 | 5000 | 5000 – 2000 = 3000 |
| 1 | 4250 | 4250 – 2000 = 2250 |
| 2 | 3688 | 3688 – 2000 = 1688 |
| 3 | 3266 | 3266 – 2000 = 1266 |
| 4 | 2949 | 2949 – 2000 = 949 |
| 5 | 2712 | 2712 – 2000 = 712 |

**c** $\frac{2250}{3000} = 0,75$ ; $\frac{1688}{2250} \approx 0,75$ ; $\frac{1266}{1688} = 0,75$ ; $\frac{949}{1266} \approx 0,75$ ; $\frac{712}{949} \approx 0,75$ ~

De rij neemt exponentieel af met groeifactor 0,75.

**d** De rij verschillen is exponentieel met groeifactor 0,75 en beginwaarde 3000.

Bij $t = 10$ geldt $3000 \cdot 0,75^{10} \approx 169$.

**e** In de laatste kolom staat $X(10) - 2000 = 3000 \cdot 0,75^{10}$, dus geldt

$X(10) = 2000 + 3000 \cdot 0,75^{10}$.

**f** $X(20) = 2000 + 3000 \cdot 0,75^{20} \approx 2010$

**11a** De evenwichtswaarde $u = \frac{-63}{1-0,7} = -210$.

**b** Een directe formule wordt dan $u_n = -210 + (1000 - (-210)) \cdot 0,7^n$ dus $u_n = -210 + 1210 \cdot 0,7^n$.

**c** $u_{15} = -210 + 1210 \cdot 0,7^{15} \approx -204$

**12a** De evenwichtswaarde $X = \frac{600}{1-0,92} = 7500$.

**b** Een directe formule wordt dan $X(t) = 7500 + (200 - 7500) \cdot 0,92^t = 7500 - 7300 \cdot 0,92^t$.

**c** $X(100) = 7500 - 7300 \cdot 0,92^{100} \approx 7498$

***bladzijde 159***

**13a** Recursievergelijking: $s(t) = 1,04 \cdot s(t-1) + 200$ met $s(0) = 200$.

**b** Directe formule: $s(t) = \frac{200}{1-1,04} + (200 - \frac{200}{1-1,04}) \cdot 1,04^t = -5000 + 5200 \cdot 1,04^t$.

**c** $s(10) = -5000 + 5200 \cdot 1,04^{10} \approx 2627,27$ euro.

**d** Wanneer ze elk jaar 300 euro spaart dan wordt de directe formule:

$s(t) = \frac{300}{1-1,04} + (300 - \frac{300}{1-1,04}) \cdot 1,04^t = -7500 + 7800 \cdot 1,04^t$ en is

$s(10) = -7500 + 7800 \cdot 1,04^{10} \approx 4045,91$. Nu spaart ze genoeg.

**14a** De directe formule is $X(t) = \frac{b}{1-a} + (X(0) - \frac{b}{1-a}) \cdot a^t$. Dus $a = 0,7$.

**b** Er geldt $\frac{b}{1-0,7} = 1000$. Uit $\frac{b}{0,3} = 1000$ volgt $b = 300$.

**c** $X(0) = 1000 + 500 \cdot 0,7^0 = 1500$

**15a** $u_n = 10 \cdot 0{,}9^n$

**b** $u_n < 0{,}01$, dus $10 \cdot 0{,}9^n < 0{,}01$. Beide formules invoeren in de rekenmachine en het snijpunt bepalen geeft $n \approx 65{,}6$. Dus vanaf $n = 66$ is $u_n < 0{,}01$.

**c** $s_{20} = 10 \cdot \dfrac{1 - 0{,}9^{20}}{1 - 0{,}9} \approx 87{,}84$

**d** $\displaystyle\sum_{n=0}^{70} u_n = s_{71} = 10 \cdot \frac{1 - 0{,}9^{71}}{1 - 0{,}9} \approx 99{,}94$

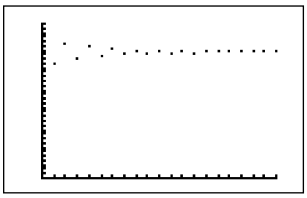
**e** Wanneer $n$ heel groot wordt, dan wordt $0{,}9^n$ heel klein. De breuk nadert dus tot

$\dfrac{1 - 0}{1 - 0{,}9} = 10$ en de som nadert dan tot $10 \cdot 10 = 100$.

**16a**

| $t$ | $W(t)$ |
|---|---|
| 0 | 32,00 |
| 1 | 26,00 |
| 2 | 30,50 |
| 3 | 27,13 |
| 4 | 29,66 |
| 5 | 27,76 |
| 6 | 29,18 |
| 7 | 28,11 |
| 8 | 28,92 |
| 9 | 28,31 |
| 10 | 28,77 |

**b**



**c** De prijs van het aandeel stabiliseert op $\dfrac{50}{1 - (-0{,}75)} \approx 28{,}57$.

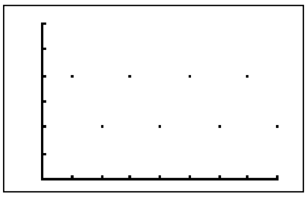
**d** $W(t) = \dfrac{50}{1 - -0{,}75} + (32 - \dfrac{50}{1 - -0{,}75}) \cdot (-0{,}75)^t \approx 28{,}57 + 3{,}43(-0{,}75)^t$

**e** Het grondtal van het exponentiële deel is negatief en daaruit volgt dat de waarden van $W$ afwisselend boven en onder de evenwichtsprijs liggen.

**17a** De recursieformule is $u_{n+1} = -u_n + 6$ met $u_0 = 2$.

Een directe formule is $u_n = \dfrac{6}{1--1} + (2 - \dfrac{6}{1--1}) \cdot (-1)^n = 3 - (-1)^n$.

**b**



De grafiek neemt afwisselend de waarden 2 en 4 aan. Dit komt omdat $(-1)^n$ voor even waarden van $n$ gelijk is aan 1 en voor oneven waarden van $n$ gelijk is aan –1. Dus $u_n$ is afwisselend 3–1 = 2 en 3 + 1 = 4.

***bladzijde 160***

**18a**

| *t* | *A* | *toename* | *B* | *toename* | *C* | *toename* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 | | 100 | | 100 | |
| | | 2 | | 30 | | 32 |
| 1 | 102 | | 130 | | 132 | |
| | | 2 | | 39 | | 41,60 |
| 2 | 104 | | 169 | | 173,60 | |
| | | 2 | | 50,70 | | 54,08 |
| 3 | 106 | | 219,70 | | 227,68 | |
| | | 2 | | 65,91 | | 70,30 |
| 4 | 108 | | 285,61 | | 297,98 | |
| | | 2 | | 85,68 | | 91,40 |
| 5 | 110 | | 371,29 | | 389,38 | |
| | | 2 | | 111,39 | | 118,81 |
| 6 | 112 | | 482,68 | | 508,19 | |

**b** Voor fonds B geldt: $\Delta n(t) = n(t+1) - n(t) = 1{,}3n(t) - n(t) = 0{,}3n(t)$.

**c** Voor fonds C geldt: $\Delta n(t) = n(t+1) - n(t) = 1{,}3n(t) + 2 - n(t) = 0{,}3n(t) + 2$.

**19a** $\Delta A(t) = (3-1)A(t) - 5 = 2A(t) - 5$

**b** $\Delta u_n = (1{,}89 - 1)u_n = 0{,}89u_n$

**c** $\Delta K(p) = (1-1)K(p) + 1{,}9 = 1{,}9$

**20a** $n(t+1) = a \cdot n(t) + b$. Met $a - 1 = 2{,}8$ dus $a = 3{,}8$ en $b = -1{,}5$. Dus $n(t+1) = 3{,}8n(t) - 1{,}5$.

**b** $a - 1 = -0{,}3$, dus $a = 0{,}7$ en $b = 12$. Dit geeft $u(n+1) = 0{,}7u(n) + 12$.

**c** $a - 1 = 0$, dus $a = 1$ en $b = 3{,}1$. Dit geeft $u_{n+1} = u_n + 3{,}1$.

**21a** De evenwichtswaarde is $k = \dfrac{-12}{1 - 1{,}3} = 40$.

**b** $\Delta k(t) = k(t+1) - k(t) = 1{,}3 \cdot k(t) - 12 - k(t) = 0{,}3 \cdot k(t) - 12$.

**c** Voor de evenwichtswaarde geldt $\Delta k(t) = 0{,}3 \cdot 40 - 12 = 0$.
Wanneer de evenwichtswaarde bereikt is veranderen de termen niet meer dus is $\Delta k(t) = 0$.

***bladzijde 161***

**22a** $\Delta A(t) = (2{,}3 - 1) \cdot A(t) = 1{,}3 \cdot A(t)$.

**b** $\Delta B(t) = 1{,}2 \cdot B(t) + 5$. Dus $a - 1 = 1{,}2$ dit geeft $a = 2{,}2$ en $b = 5$.
De recursievergelijking: $B(t+1) = 2{,}2 \cdot B(t) + 5$.

**c** $\Delta A(1) = 1{,}3 \cdot A(0) = 1{,}3 \cdot 12 = 15{,}6$.
$\Delta B(1) = 2{,}2 \cdot B(0) + 5 = 2{,}2 \cdot 12 + 5 = 31{,}4$. Dus $\Delta B(1)$ is de grootste..

**23a** $K(t+1) = 1{,}026 \cdot K(t)$ is de recursievergelijking.
$\Delta K(t) = 0{,}026 \cdot K(t)$ is de differentievergelijking.

**b** De differentie is het bedrag aan rente dat betaald wordt.

**24a** $K(t+1) = 1{,}026 \cdot K(t) + 1500$ met $K(0) = 1500$.
$\Delta K(t) = 0{,}026 \cdot K(t) + 1500$

**b** De differentie is nu het rentebedrag plus de storting.

**25a** De groeivoet is 0,125. De groeifactor is 1,125.

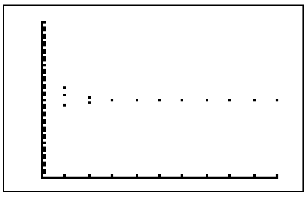
**b** Recursievergelijking: $A(t+1) = 1{,}125 \cdot A(t)$ met A (0) = 500 en $t$ in jaren.
Differentievergelijking: $\Delta A(t) = 0{,}125 \cdot A(t)$.
Directe formule: $A(t) = 500 \cdot 1.125^t$

**26a** De groeivoet is 2,2 dus de groeifactor is 3,2.
Recursievergelijking: $u(n+1) = 3{,}2 \cdot u(n)$ met $u(0) = 20$.
Directe formule: $u(n) = 20 \cdot 3{,}2^n$.

**b** Het is een meetkundige rij dus $s_9 = 20 \cdot \dfrac{1 - 3{,}2^9}{1 - 3{,}2} \approx 319\,848{,}84$.

***bladzijde 162***

**27a** In onderstaande plot zijn de beginwaarden 30, 25, en 15 gekozen. In alle drie de gevallen naderen de rijen dezelfde evenwichtswaarde.



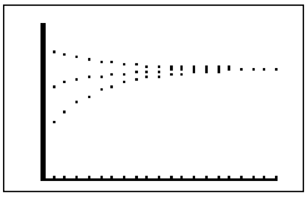
De evenwichtswaarde is: $\dfrac{14}{1 - 0{,}3} = 20$.

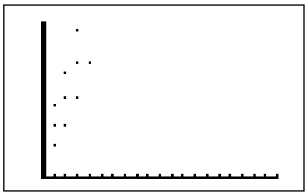
**b** $\Delta u(t) = (0{,}3 - 1) \cdot u(t) + 14 = -0{,}7 \cdot u(t) + 14 = 0{,}7(-u(t) + 20) = 0{,}7(20 - u(t))$.

**c** In de grafiek is $20 - u(t)$ de verticale afstand van een term van de rij tot 20.

**d** Wanneer $u(t)$ de grenswaarde nadert, dan gaat $20 - u(t)$ naar 0 en dus nadert ook $\Delta u(t)$ naar 0.
Voor de tijdgrafiek betekent dit dat deze nadert tot de lijn $u = 20$.

**28a** Hieronder een plot voor A en B met beginwaarden 60, 40 en 20.





A beschrijft asymptotische groei en B niet.

**29a** Elke minuut wordt er 5% afgebroken, dus is de groeifactor 0,95 per minuut.
Ook wordt er elke minuut 6 mg toegediend. De recursievergelijking wordt
$A(t) = 0,95 \cdot A(t) + 6$ .

**b** $\Delta A(t) = (0,95 - 1) \cdot u(t) + 6 = -0,05 \cdot u(t) + 6$

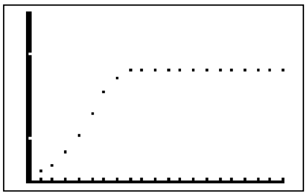
**c** $\Delta A(t) = -0,05 \cdot A(t) + 6 = 0,05 \cdot (120 - A(t))$

**d** Het verzadigingsniveau is 120 mg.

***bladzijde 163***

**30a** Bij deze grafiek neemt de groei eerst toe en wordt daarna pas afgeremd, terwijl bij de grafiek van opdracht 27 de groei direct geremd wordt.

**b**



De grenswaarde van deze rij is 40.

**c**

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(t)$ | 2 | 3,52 | 6,09 | 10,22 | 16,30 | 24,03 | 31,71 | 36,97 |

$\frac{3,52}{2} \approx 1,75$ ; $\frac{6,09}{3,52} \approx 1,73$ ; $\frac{10,22}{6,09} \approx 1,68$ ; $\frac{16,31}{10,22} \approx 1,60$

De groei is voor de waarden $t = 0$ tot en met $t = 3$ bij benadering exponentieel met groeifactor 1,7.

**d** $\Delta u(t) = u(t+1) - u(t) = 1,8u(t) - 0,02(u(t))^2 - u(t) =$

$0,8u(t) - 0,02(u(t))^2 = 0,8u(t) \cdot \left(1 - 0,025u(t)\right) =$

$0,8u(t) \cdot \left(\frac{40}{40} - \frac{u(t)}{40}\right) = 0,8u(t) \cdot \left(\frac{40 - u(t)}{40}\right)$

**e** Omdat $u(t)$ positief is zal de factor $\frac{40 - u(t)}{40}$ steeds kleiner dan 1 zijn.

**f** Naarmate $u(t)$ groter wordt zal $\frac{40 - u(t)}{40}$ naar 0 gaan en dus zal $\Delta u(t)$ naar 0 gaan, de groei wordt dus geremd door deze factor.

**31a** $\Delta n(t) = n(t+1) - n(t) = n(t) + 1{,}5 \cdot n(t) \cdot (1 - 0{,}001 \cdot n(t)) - n(t) =$

$n(t) + 1{,}5 \cdot n(t) - 0{,}0015 \cdot (n(t))^2 - n(t) = 1{,}5 \cdot n(t) \cdot \left(1 - 0{,}001 \cdot n(t)\right) = 0{,}5 \cdot n(t) \cdot \left(\dfrac{1000 - n(t)}{1000}\right)$

Er is sprake van een logistisch groeiproces.

**b** De grenswaarde is 1000.

**32** De groeifactor is 2,8, dus de groeivoet is $c = 1{,}8$ en het verzadigingsniveau is $M = 600$.

Hieruit volgt: $\Delta u(t) = 1{,}8 \cdot u(t) \cdot \left(\dfrac{600 - u(t)}{600}\right)$.

$u(t+1) = u(t) + \Delta u(t) = u(t) + 1{,}8 \cdot u(t) \cdot \left(\dfrac{600 - u(t)}{600}\right) = u(t) + 1{,}8 \cdot u(t) \cdot (1 - \frac{1}{600} u(t)) =$

$u(t) + 1{,}8 \cdot u(t) - 0{,}03(u(t))^2$

De recursievergelijking is $u(t+1) = 2{,}8 \cdot u(t) - 0{,}03(u(t))^2$.

**33** De groeifactor is $\frac{50}{12}$ per twee jaar, dus $\sqrt{\frac{50}{12}} \approx 2{,}04$ per jaar. De groeivoet is dan 1,04.
Het verzadigingsniveau is 2000.

Dus $\Delta u(t) = 1{,}04 \cdot u(t) \cdot \left(\dfrac{2000 - u(t)}{2000}\right)$.

$u(t+1) = u(t) + \Delta u(t) = u(t) + 1{,}04 \cdot u(t) \cdot \left(\dfrac{2000 - u(t)}{2000}\right) = u(t) + 1{,}04 \cdot u(t) \cdot (1 - \frac{1}{2000} u(t)) =$

$u(t) + 1{,}04 \cdot u(t) - 0{,}00052(u(t))^2$

De recursievergelijking is $u(t+1) = 2{,}04 \cdot u(t) - 0{,}00052(u(t))^2$.
Voer de recursieformule in de rekenmachine in. Uit de tabel lees je af dat er voor $t = 8$, dus in 2004 zo'n 1684 mobieltjes op de school waren en in 2005 waren dat er 1961.
De 90% -grens (1800 mobieltjes) werd in 2005 bereikt.

***bladzijde 164***

**34a** Het getal 1,10 is de groeifactor van soort $A$. Er komt 10% per jaar bij wanneer soort $B$ er niet zou zijn. Het getal 0,90 is de groeifactor van soort $B$. Deze soort neemt per jaar met 10% af als soort $A$ er niet zou zijn.

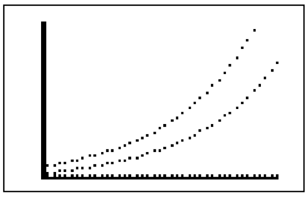
**b** Omdat soort $A$ de prooidieren zijn zal hun aantal afnemen door het aantal roofdieren, soort $B$.
Omdat soort $B$ de roofdieren zijn zal hun aantal toenemen wanneer er prooidieren, soort $A$ zijn.

**c** $A(1) = 1{,}10 \cdot A(0) - 0{,}05 \cdot B(0) = 1{,}10 \cdot 3000 - 0{,}05 \cdot 1000 = 3250$
$B(1) = 0{,}90 \cdot B(0) + 0{,}10 \cdot A(0) = 0{,}90 \cdot 1000 + 0{,}10 \cdot 3000 = 1200$
$A(2) = 1{,}10 \cdot 3250 - 0{,}05 \cdot 1200 = 3515$
$B(2) = 0{,}90 \cdot 1200 + 0{,}10 \cdot 3250 = 1405$

**d** Voer de beide formules in op je rekenmachine. Je krijgt dan onderstaande tabel voor de populaties $A$ en $B$. De grafiek bekijkt de situatie gedurende 40 jaar. Beide soorten nemen in aantal toe.

| $n$ | $u(n)$ | $v(n)$ |
|---|---|---|
| 0 | 3000 | 1000 |
| 1 | 3250 | 1200 |
| 2 | 3515 | 1405 |
| 3 | 3796.3 | 1616 |
| 4 | 4095.1 | 1834 |
| 5 | 4412.9 | 2060.1 |
| 6 | 4751.2 | 2295.4 |

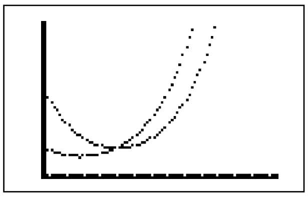
$n=0$



**e** Wanneer je de beide beginpopulaties verandert krijg je onderstaande tabel en grafiek. De grafiek bekijkt nu de situatie gedurende 80 jaar. Na een aanvankelijke afname van beide soorten komt het verloop zoals bij opdracht d terug.

| $n$ | $u(n)$ | $v(n)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1000 | 3000 |
| 1 | 950 | 2800 |
| 2 | 905 | 2615 |
| 3 | 864.75 | 2444 |
| 4 | 829.03 | 2286.1 |
| 5 | 797.62 | 2140.4 |
| 6 | 770.37 | 2006.1 |

$n=0$



**35a** $W(t+1)=0{,}95\cdot W(t)+0{,}20\cdot N(t)$ en $N(t+1)=0{,}80\cdot N(t)+0{,}05\cdot W(t)$

**b**

| $n$ | $u(n)$ | $v(n)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 100 |
| 1 | 20 | 80 |
| 2 | 35 | 65 |
| 3 | 46.25 | 53.75 |
| 4 | 54.688 | 45.313 |
| 5 | 61.016 | 38.984 |
| 6 | 65.762 | 34.238 |

$n=0$

**c** Wanneer je de tabel verder laat doorlopen, zul je zien dat het percentage mensen dat de klip kent naar 80% gaat en het percentage dat de klip niet kent dus naar 20%.

**36a** De recursievergelijkingen worden $A(t+1)=1{,}05\cdot A(t)-0{,}05\cdot B(t)$ en $B(t+1)=0{,}90\cdot B(t)+0{,}10\cdot A(t)$. Met de gegeven beginwaarden geeft dit onderstaande tabel.

| $n$ | $u(n)$ | $v(n)$ |
|---|---|---|
| 0 | 200 | 180 |
| 1 | 201 | 182 |
| 2 | 201.95 | 183.9 |
| 3 | 202.85 | 185.71 |
| 4 | 203.71 | 187.42 |
| 5 | 204.52 | 189.05 |
| 6 | 205.3 | 190.6 |

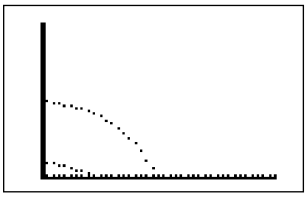
$n=6$

Wanneer je de tabel verder laat lopen zul je zien dat beide populaties in de evenwichtssituatie een grootte hebben van 220.

**b** Volgens de recursievergelijking neemt populatie $A$ toe met 5%. 5% van 220 is 11. Door de jacht van de roofdieren neemt de populatie af met 5% van de roofdieren, dus ook met 11. Er ontstaat een evenwicht.

**c** Nee, wanneer je de vergelijking voor $A$ niet wijzigt kun je alleen maar een evenwicht krijgen als de groeifactor bij populatie $B$ 0,95 wordt en geschikte beginwaarden hebt. Wanneer er op soort $B$ gejaagd wordt moet deze groeifactor kleiner dan 0,90 worden.

**37a** Uit de tabel en ook uit onderstaande grafiek blijkt dat de populaties beide uitsterven met deze beginvoorwaarden.



**b** Wanneer beide beginpopulaties 500 zijn, blijven de populaties gelijk, maar worden wel steeds groter.

**c** Bij beginpopulaties $P(0)=100$ en $Q(0)=400$ blijven beide populaties op deze aantallen.

**38a** $W=0,95W+0,20N \Rightarrow 0,05W=0,20N \Rightarrow W=\frac{0,20}{0,05}N \Rightarrow W=4N$
$N=0,8N+0,05W \Rightarrow 0,2N=0,05W \Rightarrow N=0,25W \Rightarrow W=4N$

**b** Opgelost moet worden
$$\begin{cases} W=4N \\ W+N=100 \end{cases}$$
De eerste vergelijking invullen bij de tweede geeft
$4N+N=100 \Rightarrow 5N=100 \Rightarrow N=20$
De aantallen waarbij er evenwicht is zijn $N=20$ en $W=80$.

***bladzijde 166***

**39a** De volgende lijn in de stamboom gaat uit 8 personen bestaan. Er zijn dus 8 overgrootouders.

**b** In de vier voorgaande generaties zitten $2^1+2^2+2^3+2^4=2+4+8+16=30$ personen.

**c** Er is sprake van een meetkundige rij met beginterm 2 en reden 2.
In de 20 voorgaande generaties zitten dus $s_{20}=2\cdot\dfrac{1-2^{20}}{1-2}=2\,097\,150$ personen.

**d** Antwoord bij opdracht b is betrouwbaar, maar dat van opdracht c veel minder. er kunnen dubbeltellingen in zitten omdat mensen uit een lijn met elkaar trouwen, dus eigenlijk (verre) familie zijn.

**40a** $M(t+1)=0.70\cdot M(t)+120$ met $M(0)=120$ en $t$ in perioden van 12 uur.

**b** Invoeren van de recursievergelijking in je rekenmachine geeft dat na 6 keer innemen, dus na 3 dagen, de hoeveelheid boven 350 mg komt.

**c** Voor de evenwichtswaarde $M$ moet gelden:
$M=0,70M+120 \Rightarrow 0,30M=120 \Rightarrow M=400$.

**d** Een directe formule wordt dan $M(t)=400+(120-400)\cdot 0,70^t=400-280\cdot 0,70^t$, met $t$ in periode van 12 uur.

**e** Na 3 weken, dus 21 dagen, dus 42 perioden van 12 uur is er $400-280\cdot 0,70^{42}\approx 400$ mg aanwezig in het lichaam.

**41a** $y(t+1) = y(t) + b$ betekent dat er elk jaar evenveel bos afgaat, dit is niet in overeenstemming met het eerste deel van de tekst.
$y(t+1) = a \cdot y(t)$ betekent dat er elk jaar eenzelfde percentage bos verdwijnt, maar omdat het minder wordt verdwijnt er elk jaar wat minder bos en dus kan er in 1990 nooit anderhalf keer zoveel bos verdwijnen.

**b** $y(t+1) = 1{,}0414 \cdot y(t) - 137$
Volgens de tekst was de hoeveelheid bos op 1 januari 1990 2900 miljoen, dus $y(10) = 2900$ .
Volgens de recursievergelijking is dan $y(11) = 1{,}0414 \cdot 2900 - 137 = 2883$. Op 1 januari 1991 is er dus 2883 miljoen hectare en dat is 17 miljoen minder.

**c** Voer de recursievergelijking in op je rekenmachine, met $y(10) = 2900$. Met behulp van een tabel zie je dat op $t = 53$ er minder dan 1000 miljoen hectare bos is. Dus in de loop van 1980 + 52=2032 zal de hoeveelheid bos onder de 1000 miljoen hectare komen.

**d** De evenwichtswaarde is $\dfrac{-137}{1-1{,}0414} \approx 3309$ miljoen hectare.
Neem $t = 0$ nu op 1 januari 1990 en $y(0) = 2900$, dan wordt de directe formule:
$y(t) = 3309 + (2900 - 3309) \cdot 1{,}0414^t = 3309 - 409 \cdot 1{,}0414^t$ .
Volgens deze formule was er in op 1 januari 1980 ( $t = -10$ )
$y(-10) = 3309 - 409 \cdot 1{,}0414^{-10} = 3036{,}37$ miljoen hectare en op 1 januari 1981 ( $t = -9$ ) $y(-9) = 3309 - 409 \cdot 1{,}0414^{-9} = 3025{,}10$ miljoen hectare. In 1980 verdween dus $3036{,}37 - 3025{,}10 = 11{,}27$ miljoen hectare.
$1{,}5 \cdot 11{,}27 = 16{,}9 \approx 17$, dus verdween er in 1990 inderdaad ongeveer 1,5 keer zoveel bos.

***bladzijde 167***

**42** Uit de opgave volgt: $u(0) = 6$ , $u(18) = 170$ , $\Delta u(18) = 20$ en $M = 340$ .

Bij logistische groei geldt: $\Delta u(t) = c \cdot u(t) \cdot \left(\dfrac{M - u(t)}{M}\right)$.

Invullen van de gegevens geeft $20 = c \cdot 170 \cdot \left(\dfrac{340-170}{340}\right)$ dus $20 = 85 \cdot c$ , dit geeft $c = \frac{20}{85} \approx 0{,}24$.
De recursievergelijking is
$u(t+1) = u(t) + 0{,}24 \cdot u(t) \cdot \left(\dfrac{340 - u(t)}{340}\right) = 1{,}24 \cdot u(t) - 0{,}0007 \cdot (u(t))^2$ met $u(0) = 6$ .

**43a** Er wordt per nacht 30 liter water per persoon ververst, dus 30 000 liter.
Het zwembad bevat 1000 $m^3$ = 1 000 000 liter. Er wordt dus 3% ververst.
Er verdwijnt steeds 3% van de ureum die in het water zit. Een groeifactor van 0,97.
Aan het eind van de dag komt er 500 gram bij. Dit geeft de recursievergelijking:
$u(t+1) = 500 + 0{,}97 \cdot u(t)$ met $u(1) = 500$.

**b** Begin dag 1 0 gram en eind dag 1 $u(1) = 500 + 0{,}97 \cdot 0 = 500$ gram.
Begin dag 2 $0{,}97 \cdot 500 = 485$ gram en eind dag 2 $u(2) = 0{,}97 \cdot 500 + 500 = 985$ gram.
Begin dag 3 $0{,}97 \cdot 985 = 955{,}45$ gram, dus ruim 955 gram.

**c** Met de formule $u(t+1)=(500+0,97\cdot\ u(t))\cdot\ 0,97$ zou dan de hoeveelheid ureum aan het begin van een dag eerst met 0,97 vermenigvuldigd worden, dus weer ververst, daarna 500 gram van die dag erbij en dan weer keer 0,97 voor het verversen. Er wordt nu dus twee keer ververst.
De juiste formule voor de hoeveelheid ureum aan het begin van een dag is:
$v(t+1)=(v(t)+500)\cdot 0,97=0,97\cdot v(t)+485$, met $v(1)=0$.

**d** De wettelijke norm is maximaal 2 gram ureum per $m^3$, dus maximaal 2000 gram.
Invoeren van één van de formules in de rekenmachine geeft:
$v(5)=1854,4$ gram, dus bij het begin van de $5^{de}$ dag is er meer dan 1500 gram en in de loop van dag 5 zal de wettelijke norm dus overschreden worden.
$u(5)=2354,4$ gram, dus aan het eind van dag 5 blijkt de wettelijke norm overschreden.

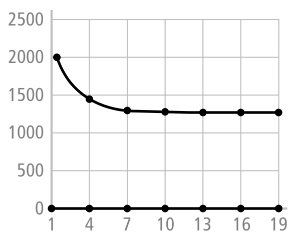
**e** Wanneer de verversing 200 liter per persoon per dag is wordt er dagelijks 20% ververst, de groeifactor wordt nu 0,80 en de recursievergelijking voor het begin van de dag:
$v(t+1)=(500+v(t))\cdot\ 0,80=400+0,80\cdot\ v(t)$ met $v(1)=0$.
Deze vergelijking heeft evenwichtswaarde $\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{400}{1-0,8}=2000$.
Bij het begin van een dag zal de hoeveelheid ureum dus nooit boven 2000 gram zijn.

**f** De norm wordt in de loop van een dag overschreden wanneer er bij het begin van de dag meer dan 1500 gram ureum is. Invoeren van de formule in de rekenmachine geeft dat dit zo is bij het begin van dag 8.
Dus in de loop van dag 8 wordt de norm overschreden.

***bladzijde 168***

**I-1a** $B_0$ geeft het bedrag aan het begin van de spaarperiode, dus na 0 jaar aan.
**b** De groeifactor is 1,05, dus Thomas krijgt 5% rente op het spaargeld.
**c** -
**d** Met in cel A3 de formule: =1+A2 en deze kopiëren naar de cellen A4 tot en met A20.
**e** Op zijn $18^e$ verjaardag heeft Thomas de inhoud van cel B20, 2406,62 euro.
**f** De rij zal exponentieel blijven groeien tot bijvoorbeeld 21623,49 euro op zijn $65^{ste}$ verjaardag.

**I-2a** Dus in cel A3 de formule: =1+A2. en in cel B3 de formule: =0,6*B2+500. Kopieer beide formules naar de cellen eronder.
**b** Na 16 jaar blijft het aantal ratten op 1250.
**c** De grafiek benadert een horizontale lijn.
**d** Nu loopt het aantal ratten terug tot 1250 en blijft daarna constant.
**e**



**I-3a** -

**b** Begin 2010 heeft hij 3914 bomen op zijn perceel staan.

**c** $B = 0,8B + 800$

$0,2B = 800$

$B = 4000$

**d** Uit opdracht c volgt dat wanneer hij begint met 4000 bomen er steeds 4000 bomen zullen blijven.

**I-4a** Om de evenwichtswaarde te vinden moet je de vergelijking $X = aX + b$ oplossen.

$X = aX + b$

$X - aX = b$

$(1-a)X = b$

$X = \dfrac{b}{1-a}$

**b** Je ziet de tabel van de recursievergelijking $X(t+1) = 1,2 \cdot X(t)$.
De rij nadert niet tot een evenwichtswaarde, want het is een meetkundige rij.

**c** De evenwichtswaarde van deze rij is $\dfrac{100}{1-0,8} = 500$.

**d** Evenwichtswaarde $\dfrac{-80}{1-1,3} \approx 267$, maar uit controle met de grafiek en tabel blijkt dat er alleen bij deze beginwaarde een evenwicht is. In alle andere gevallen gaan de waarden naar plus oneindig of min oneindig.

**e** De rij bij opdracht c ontwikkelt zich altijd naar een evenwicht. De rij bij opdracht d niet.

***bladzijde 172***

**T-1a** $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 1$ met $u_1 = 100$. Met de rekenmachine vind je $u_{10} = 51\,711$.

**b** $u_{n+1} = 0,1 \cdot u_n$ met $u_1 = 10\,000$. Dit is een meetkundige rij
$u_{10} = 10\,000 \cdot 0,1^9 = 0,000\,01$.

**c** $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 4$ met $u_1 = 1$. Met de rekenmachine vind je $u_{10} = 2556$.

**d** $u_{n+1} = u_n - 8$ met $u_1 = 8$. Dit is een rekenkundige rij met $u_{10} = 8 - 9 \cdot 8 = -64$.

**T-2a** De recurrente betrekking is: $N(t+1) = 1,02 \cdot N(t)$ met $N(0) = 50\,000$.

**b** Voer de recurrente betrekking in je rekenmachine in. Met een tabel vind je dat het aantal vissen na 17 jaar boven de 70 000 komt.

**c** De nieuwe recursievergelijking wordt: $N(t+1) = 1,02 \cdot N(t) - 500$ met $N(0) = 50000$.

**d** De evenwichtswaarde is $\dfrac{-500}{1-1,02} = 25\,000$. Een directe formule wordt dan:

$n(t) = 25\,000 + (50\,000 - 25\,000) \cdot 1,02^t = 25\,000 + 25\,000 \cdot 1,02^t$.

**e** Voer de nieuwe recursievergelijking in je rekenmachine in. Met een tabel vind je dat na 30 jaar het aantal vissen boven de 70 000 komt.

**f** De toename is steeds 2% van het aantal aanwezige vissen, die 2% kun je vangen, zonder het totaal te veranderen. Je kunt dus steeds 2% van 50 000 dus 1000 vissen vangen.

**T-3a** De groeivoet is 0,5, dus de groeifactor is 1,5.

**b** $\Delta m(t) = 0{,}5 \cdot m(t) \cdot (1 - 0{,}02 \cdot m(t)) = 0{,}5 \cdot m(t) \cdot \left( \dfrac{\frac{1}{0{,}02} - m(t)}{\frac{1}{0{,}02}} \right) = 0{,}5 \cdot m(t) \cdot \left( \dfrac{50 - m(t)}{50} \right)$

Het verzadigingsniveau is 50 muggen.

**c** Voer de recursievergelijking in je rekenmachine in. Je ziet dat na ruim vier perioden van 3 dagen ongeveer het aantal van 25 bereikt is, de helft van het verzadigingsniveau. Dus na zo'n 13 tot 14 dagen.

**T-4a** De differentievergelijking wordt: $\Delta c(t) = -0{,}4c(t) + 6$ , met $c(0) = 10$ .

**b** De recursievergelijking wordt:

$c(t+1) = c(t) + \Delta c(t) = c(t) - 0{,}4 \cdot c(t) + 6 = 0{,}6 \cdot c(t) + 6$ .

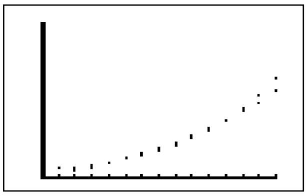
Deze vergelijking hoort bij asymptotische groei.

De maximale concentratie $M = \dfrac{6}{1 - 0{,}6} = 15$ liter/m$^2$.

***bladzijde 173***

**T-5a** Methode A beschrijft een exponentieel proces. De groeifactor is 1,2 en de groeivoet is 0,2.

**b**



| n | u(n) | v(n) |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 0 |
| 1 | 6 | 2 |
| 2 | 7.2 | 4.2 |
| 3 | 8.64 | 6.62 |
| 4 | 10.368 | 9.282 |
| 5 | 12.442 | 12.21 |
| 6 | 14.93 | 15.431 |

n=6

Bedenk dat methode B alleen gebruikt wordt als er geen naamsbekendheid is.
Uit de tabel blijkt dat de naamsbekendheid vanaf week 6 bij methode B groter is dan bij methode A.
Zet je de tabel verder voort dan zie je dat vanaf week 10 methode A grotere naamsbekendheid oplevert.
Dus van week 6 tot en met week 9.

**c** Bij methode A is de toename in de vierde week 10,368 – 8,64= $10{,}368 - 8{,}64 \approx 1{,}73\%$.
Bij methode B is de toename in de vierde week $9{,}282 - 6{,}62 \approx 2{,}66$ %. Dus het grootst bij methode B.

**T-6a** De evenwichtswaarde is de kamertemperatuur 20 °C.

**b** Er is sprake van begrensde groei, een directe formule is van de vorm $V(t) = M + (V(0) - M) \cdot a^t$ $V(0) = 100$ en $M = 20$ dus

$V(t) = 20 + (100 - 20) \cdot a^t = 20 + 80 \cdot a^t$

$V(1) = 88 = 20 + 80 \cdot a$ geeft $80a = 68$ dus $a = \frac{68}{80} = 0{,}85$ .

De directe formule is $V(t) = 20 + 80 \cdot 0{,}85^t$ .

**c** $a = 0{,}85$ en $\dfrac{b}{1 - 0{,}85} = 20$ geeft $b = 3$ .

De recursievergelijking: $V(t+1) = 0{,}85 \cdot V(t) + 3$ .

**T-7a** Hier is sprake van twee populaties die elkaar beïnvloeden.
$k(t+1) = 0,9 \cdot k(t) + 0,15 \cdot h(t)$ en $h(t+1) = 0,85 \cdot h(t) + 0,10 \cdot k(t)$.

**b** Stel 2009 is $t = 0$. Dan is $k(1) = 0,9 \cdot 1000 + 0,15 \cdot 3000 = 1350$ en
$h(1) = 0,85 \cdot 3000 + 0,10 \cdot 1000 = 2650$.
In 2010 wonen 1350 mensen in een koopwoning en 2650 mensen in een huurwoning.

**c** Voer beide recursievergelijkingen in je rekenmachine in. Je ziet dan dat de aantallen stabiliseren op 2400 koopwoningen en 1600 huurwoningen.

**T-8a** Wanneer $b = 0$ wordt de recursievergelijking $u_{n+1} = a \cdot u_n$ en dit is exponentiële groei.
Wanneer $a = 1$ wordt de recursievergelijking $u_{n+1} = u_n + b$ en dit lineaire groei.

**b** Wanneer $x(0) = \dfrac{b}{1-a}$ begint de groei met de evenwichtswaarde en is er geen sprake van groei. Het aantal is steeds hetzelfde.