

Hoofdstuk 10 - Lineair programmeren

Meer dan twee variabelen

bladzijde 290

- 1a** 8 banken, 28 stoelen en 17 tafels nemen evenveel plaats in als $8 \cdot 2 + 28 + 17 \cdot 2 = 16 + 28 + 34 = 78$ stoelen. Dat is meer dan de maximale opslagcapaciteit van 70 stoelen, dus het is niet mogelijk.
- b** De aantallen geproduceerde banken, stoelen en tafels zijn natuurlijk niet negatief, dus $b \geq 0$, $s \geq 0$ en $t \geq 0$. De maximale aantallen per dag zijn respectievelijk 10, 30 en 20, dus $b \leq 10$, $s \leq 30$ en $t \leq 20$. Druk de benodigde opslagruimte uit in aantal stoelen: één tafel of één bank nemen evenveel ruimte in als twee stoelen, dus b banken en t tafels nemen evenveel ruimte in als $2b + 2t$ stoelen. Er is plaats voor 70 stoelen dus $2b + s + 2t \leq 70$.
- 2a** $C(0, 30, 0)$; $E(0, 0, 20)$; $B(10, 30, 0)$ en $F(10, 0, 20)$.
- b** De coördinaten van H zijn $(0, 30, 20)$ dus dit punt hoort bij een productie van 0 banken, 30 stoelen en 20 tafels.
- c** Van G is bekend: $b = 10$ en $t = 20$.
Van D is bekend: $b = 10$ en $s = 30$.
- d** Vlak $ABDGF$ is evenwijdig met de s -as en de t -as. Het punt $(10, 0, 0)$ ligt in dit vlak. Bij alle punten in dit vlak hoort dus een productie van 10 banken.
- e** Bij $BCHD$ hoort de vergelijking $s = 30$. Bij $EFGH$ hoort de vergelijking $t = 20$.
- f** Vul de coördinaten van G , D en H in bij de vergelijking $2b + s + 2t = 70$:
- $$2 \cdot 10 + 10 + 2 \cdot 20 = 20 + 10 + 40 = 70$$
- $$2 \cdot 10 + 30 + 2 \cdot 10 = 20 + 30 + 20 = 70$$
- $$2 \cdot 0 + 30 + 2 \cdot 20 = 0 + 30 + 40 = 70$$
- Alle drie punten voldoen dus aan de vergelijking $2b + s + 2t = 70$. De vergelijking van het vlak GDH is dus $2b + s + 2t = 70$.
- 3a** De winst per bank is 30 euro, dus op b banken $30b$ euro. Op s stoelen is de winst $10s$ euro en op t tafels $25t$ euro, dus $W = 30b + 10s + 25t$.
- b** Vul de coördinaten van alle hoekpunten in voor de functie W :
- | punt | coördinaten | waarde van W |
|------|----------------|---|
| O | $(0, 0, 0)$ | $30 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 25 \cdot 0 = 0$ |
| A | $(10, 0, 0)$ | $30 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 25 \cdot 0 = 300$ |
| B | $(10, 30, 0)$ | $30 \cdot 10 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 0 = 600$ |
| C | $(0, 30, 0)$ | $30 \cdot 0 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 0 = 300$ |
| D | $(10, 30, 10)$ | $30 \cdot 10 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 10 = 850$ |
| E | $(0, 0, 20)$ | $30 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 25 \cdot 20 = 500$ |
| F | $(10, 0, 20)$ | $30 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 25 \cdot 20 = 800$ |
| G | $(10, 10, 20)$ | $30 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 20 = 900$ |
| H | $(0, 30, 20)$ | $30 \cdot 0 + 10 \cdot 30 + 25 \cdot 20 = 800$ |
- De hoogste winst is 900 euro. Deze winst wordt bereikt bij een productie van 10 banken, 10 stoelen en 20 tafels.

- c De winstfunctie wordt nu: $W = 30b + 20s + 25t$. Bereken de waarde van W opnieuw voor alle hoekpunten:

punt	coördinaten	waarde van W
O	$(0, 0, 0)$	$30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 25 \cdot 0 = 0$
A	$(10, 0, 0)$	$30 \cdot 10 + 20 \cdot 0 + 25 \cdot 0 = 300$
B	$(10, 30, 0)$	$30 \cdot 10 + 20 \cdot 30 + 25 \cdot 0 = 900$
C	$(0, 30, 0)$	$30 \cdot 0 + 20 \cdot 30 + 25 \cdot 0 = 600$
D	$(10, 30, 10)$	$30 \cdot 10 + 20 \cdot 30 + 25 \cdot 10 = 1150$
E	$(0, 0, 20)$	$30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 25 \cdot 20 = 500$
F	$(10, 0, 20)$	$30 \cdot 10 + 20 \cdot 0 + 25 \cdot 20 = 800$
G	$(10, 10, 20)$	$30 \cdot 10 + 20 \cdot 10 + 25 \cdot 20 = 1000$
H	$(0, 30, 20)$	$30 \cdot 0 + 20 \cdot 30 + 25 \cdot 20 = 1100$

De grootste winst is nu 1150 euro. Deze winst wordt bereikt bij een productie van 10 banken, 30 stoelen en 10 tafels.

bladzijde 291

- 4a x en z hebben een positieve coëfficiënt en y heeft een negatieve coëfficiënt in $W = 2x - y + 3z$. Voor een maximale waarde van W moeten x en z zo groot mogelijk en y zo klein mogelijk worden gekozen.
- b In de doelfunctie $T = 3x + y - 4z$ moeten x en y zo groot mogelijk en z zo klein mogelijk worden gekozen. De punten B en C komen daarom in aanmerking.
 In B geldt: $T = 3 \cdot 50 + 50 - 4 \cdot 0 = 200$.
 In C geldt: $T = 3 \cdot 20 + 80 - 4 \cdot 0 = 140$.
 Het maximum voor T is dus 200.
- c Voor het minimum moet je x en y zo klein mogelijk en z zo groot mogelijk kiezen. Dat is het geval in punt K . Het minimum is $T = 0 + 0 - 4 \cdot 60 = -240$.

- 5a De winstfunctie is $W = 24b + 12s + 24t$. Bereken de waarde van W opnieuw voor alle hoekpunten:

punt	coördinaten	waarde van W
O	$(0, 0, 0)$	$24 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 24 \cdot 0 = 0$
A	$(10, 0, 0)$	$24 \cdot 10 + 12 \cdot 0 + 24 \cdot 0 = 240$
B	$(10, 30, 0)$	$24 \cdot 10 + 12 \cdot 30 + 24 \cdot 0 = 600$
C	$(0, 30, 0)$	$24 \cdot 0 + 12 \cdot 30 + 24 \cdot 0 = 360$
D	$(10, 30, 10)$	$24 \cdot 10 + 12 \cdot 30 + 24 \cdot 10 = 840$
E	$(0, 0, 20)$	$24 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 24 \cdot 20 = 480$
F	$(10, 0, 20)$	$24 \cdot 10 + 12 \cdot 0 + 24 \cdot 20 = 720$
G	$(10, 10, 20)$	$24 \cdot 10 + 12 \cdot 10 + 24 \cdot 20 = 840$
H	$(0, 30, 20)$	$24 \cdot 0 + 12 \cdot 30 + 24 \cdot 20 = 840$

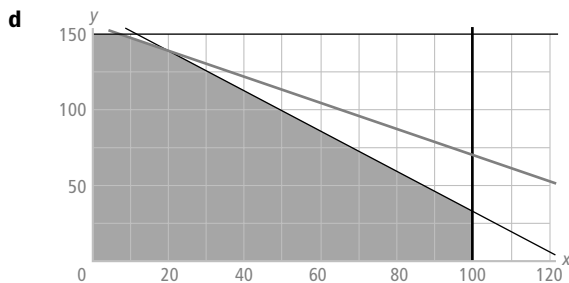
De maximale waarde wordt dus bereikt in de punten D , G en H en in alle andere punten die binnen deze driehoek of op de zijden van deze driehoek liggen.

- b Bijvoorbeeld het punt $(7, 20, 18)$. Dit punt voldoet aan de vergelijking $2b + s + 2t = 70$ want $2 \cdot 7 + 20 + 2 \cdot 18 = 14 + 20 + 36 = 70$
- c De bijbehorende waarde van de doelfunctie is $W = 24 \cdot 7 + 12 \cdot 20 + 24 \cdot 18 = 168 + 240 + 432 = 840$, de maximale waarde.

bladzijde 292

- 6a** Deze voorwaarde hoort bij de beschikbare hoeveelheid merbau.
- b** De andere vier voorwaarden zijn:
 $a \leq 100$, $b \leq 150$ en $c \leq 200$ (de maximale aantallen per type)
 $6a + 3b + 6c \leq 1500$ (vanwege de beschikbare hoeveelheid mahonie).
- c** Punt R : $2 \cdot 0 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 200 = 300 + 800 = 1100$
 Punt S : $2 \cdot 0 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 162,5 = 450 + 650 = 1100$
 Punt T : $2 \cdot 25 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 150 = 50 + 450 + 600 = 1100$
 dus de punten R , S en T voldoen alle drie aan de vergelijking.
- d** Bij $PQRTU$ hoort de vergelijking $6a + 3b + 6c = 1500$. Bij QRS hoort de vergelijking $b = 150$.
- e** De doelfunctie is $W = 10a + 5b + 7c$.
- f** In punt B geldt: $W = 10 \cdot 100 + 5 \cdot 150 + 7 \cdot 0 = 1000 + 750 + 0 = 1750$
 In punt Q geldt: $W = 10 \cdot 100 + 5 \cdot 150 + 7 \cdot 75 = 1000 + 750 + 525 = 2275$
 In punt P geldt: $W = 10 \cdot 100 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 150 = 1000 + 0 + 1050 = 2050$
 In punt R geldt: $W = 10 \cdot 25 + 5 \cdot 150 + 7 \cdot 150 = 250 + 750 + 1050 = 2050$
 De maximale winst is 2275 euro. Dit wordt bereikt bij de productie van 100 kastjes van type A, 150 van type B en 75 van type C.

- 7a** Het aantal kastjes van type C moet gelijk zijn aan het totaal van de types A en B, dus $c = a + b$.
- b** $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $a \leq 100$, $b \leq 150$ blijven ongewijzigd, $c \leq 200$ wordt $a + b \leq 200$.
 $6a + 3b + 6c \leq 1500$ wordt $6a + 3b + 6(a + b) \leq 1500$ en daaruit volgt
 $6a + 3b + 6a + 6b \leq 1500$, dus $12a + 9b \leq 1500$. $3p - 4r \geq 18$
- c** De doelfunctie wordt $W = 10a + 5b + 7(a + b) = 10a + 5b + 7a + 7b = 17a + 12b$.



- e** Het toegestane gebied heeft vijf hoekpunten. Van drie hoekpunten zijn de coördinaten eenvoudig af te lezen: $O(0, 0)$, $A(100, 0)$ en $E(0, 150)$. Punt B voldoet aan de vergelijkingen $a = 100$ en $12a + 9b = 1500$. Door invullen van $a = 100$ bij $12a + 9b = 1500$ krijg je $1200 + 9b = 1500$, dus $9b = 300$, waaruit volgt $b = 33\frac{1}{3}$. Punt D voldoet aan $b = 150$ en $6a + 7b = 1100$, dus $6a + 1050 = 1100$, waaruit volgt $6a = 50$ en dus $a = 8\frac{1}{3}$. Punt C voldoet aan $12a + 9b = 1500$ en $6a + 7b = 1100$. Door de tweede vergelijking met twee te vermenigvuldigen en van de andere vergelijking af te trekken, vind je $12a + 14b = 2200$, $12a + 9b = 1500$ en $5b = 700$ en dus $b = 140$. Vul dit in bij één van de twee vergelijkingen: $6a + 7 \cdot 140 = 1100$, $6a = 1100 - 980 = 120$ en dus $a = 20$. Bereken de waarde van de doelfunctie W in de vijf hoekpunten:
 In punt O geldt: $W = 17 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0$
 In punt A geldt: $W = 17 \cdot 100 = 1700$

In punt *B* geldt: $W = 17 \cdot 100 + 12 \cdot 33 = 2096$

In punt *C* geldt: $W = 17 \cdot 20 + 12 \cdot 140 = 2020$

In punt *D* geldt: $W = 17 \cdot 8 + 12 \cdot 150 = 1936$

De winst is dus maximaal bij een productie van 100 kastjes type A, 33 van type B en 133 van type C.

bladzijde 293

- 8 De voorwaarden $p \geq 0$ en $q \geq 0$ blijven ongewijzigd.

$r \geq 0$ wordt $q - 2p \geq 0$ of $q \geq 2p$.

$p - 2q - 3r \geq 0$ wordt $p - 2q - 3(q - 2p) = p - 2q - 3q + 6p = 7p - 5q \geq 0$.

wordt $3p - 4(q - 2p) = 3p - 4q + 8p = 11p - 4q \geq 18$.

De doelfunctie wordt $W = 3p + 4q - 3(q - 2p) = 3p + 4q - 3q + 6p = 9p + q$.

- 9 De voorwaarden $x \geq 0$ en $y \geq 0$ blijven ongewijzigd.

$z \geq 0$ wordt $10 - x - y \geq 0$ of $x + y \leq 10$.

$2x \geq y + z$ wordt $2x \geq y + 10 - x - y = 10 - x$ dus $3x \geq 10$ of $x \geq 3\frac{1}{3}$.

$3x + y - x \geq 6$ wordt $3x + y - (10 - x - y) = 3x + y - 10 + x + y = 4x + 2y - 10 \geq 6$ waaruit volgt $4x + 2y \geq 16$.

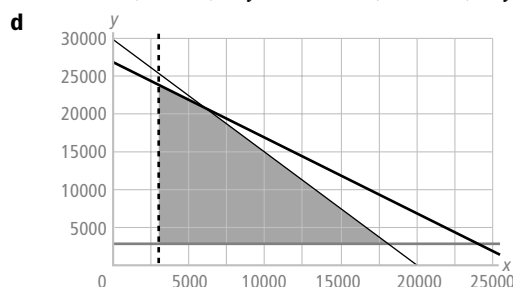
$TK = 400x + 150y - 30(10 - x - y) = 400x + 150y - 300 + 30x + 30y$. De doelfunctie wordt dus $TK = 430x + 180y - 300$.

- 10a Er moeten drie bedragen worden gekozen: x euro's voor opties, y euro's voor aandelen en z euro's voor obligaties. De voorwaarden zijn: $x \geq 3000$, $y \geq 3000$, $z \geq 3000$. Verder moet gelden $x \leq 2z$ en $x + y + z = 30000$.

- b Uit $x + y + z = 30000$ volgt $z = 30000 - x - y$. De voorwaarde $z \geq 0$ wordt $30000 - x - y \geq 0$ of $x + y \leq 30000$. De voorwaarde $x \leq 2z$ wordt $x \leq 2(30000 - x - y) = 60000 - 2x - 2y$ dus $3x + 2y \leq 60000$.

- c De doelfunctie wordt:

$$R = 0,1x + 0,08y + 0,06z = 0,1x + 0,08y + 0,06(30000 - x - y) \\ = 0,1x + 0,08y + 1800 - 0,06x - 0,06y = 0,04x + 0,02y + 1800$$



Noem de hoekpunten van het toegestane gebied *A*, *B*, *C* en *D*.

De coördinaten van punt *A* zijn (3000, 3000).

Voor punt *B* geldt: $y = 3000$ en $3x + 2y = 60000$. Hieruit volgt $3x + 2 \cdot 3000 = 60000$, dus $3x = 54000$ en $x = 18000$ dus $B(18000, 3000)$.

Voor punt *C* geldt: $3x + 2y = 60000$ en $x + y = 27000$.

Door de tweede vergelijking te verdubbelen en van de eerste vergelijking af te trekken vind je $x = 6000$ waaruit volgt $y = 21000$. Dus $C(6000, 21000)$.

Voor punt *D* geldt: $x = 3000$ en $x + y = 27000$, dus $y = 24000$ en dus $D(3000, 24000)$.

Bereken nu de waarde van R in de vier hoekpunten:

In A geldt: $R = 0,04 \cdot 3000 + 0,02 \cdot 3000 + 1800 = 1980$

In B geldt: $R = 0,04 \cdot 1800 + 0,02 \cdot 3000 + 1800 = 2580$

In C geldt: $R = 0,04 \cdot 6000 + 0,02 \cdot 21000 + 1800 = 2460$

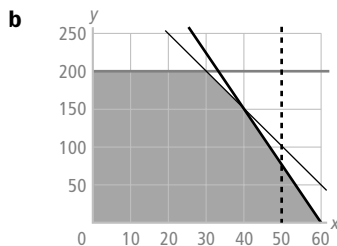
In D geldt: $R = 0,04 \cdot 3000 + 0,02 \cdot 24000 + 1800 = 2400$

Het hoogste rendement onder deze voorwaarden is 2580 euro.

- e Het advies is: koop voor € 18000 aan opties, voor € 3000 aandelen en voor € 9000 obligaties.

bladzijde 294

- 11a Uit de maximaal beschikbare ruimte volgen de voorwaarden $k \leq 50$ en $s \leq 200$. Uit de beschikbare oppervlakte aan weiland (in are) volgt: $20k + 4s \leq 1400$. Uit de beschikbare hoeveelheid arbeid volgt: $150k + 20s \leq 9000$.



- c De hoekpunten van het toegestane gebied zijn $O(0, 0)$, $A(50, 0)$ en $E(0, 200)$.
 Punt B wordt gevonden uit $150k + 20s = 9000$ en $k = 50$ dus
 $150 \cdot 50 + 20s = 7500 + 20s = 9000$ waaruit volgt $20s = 1500$, dus $s = 75$. De coördinaten van B zijn dus $(50, 75)$.
 Voor D geldt: $s = 200$ en $20k + 4s = 1400$, dus $20k + 800 = 1400$ waaruit volgt $20k = 600$ dus $k = 30$ zodat $D(30, 200)$.
 Voor punt C geldt: $150k + 20s = 9000$ en $20k + 4s = 1400$. Vermenigvuldig de tweede vergelijking met vijf en trek het resultaat van de eerste vergelijking af:
 $150k + 20s = 9000$
 $100k + 20s = 7000$
 dus $50k = 2000$ en $k = 40$.
 Door invullen vind je $20 \cdot 40 + 4s = 1400$ dus $4s = 1400 - 800 = 600$ en daaruit volgt $s = 150$. De coördinaten van C zijn $(40, 150)$.
 Voor maximale winst moeten k en s zo groot mogelijk worden gekozen.
 In punt C geldt: $W = 1000 \cdot 40 + 150 \cdot 180 = 67000$.
 In punt B geldt: $W = 1000 \cdot 50 + 150 \cdot 75 = 63500$.
 In punt D geldt: $W = 1000 \cdot 30 + 150 \cdot 200 = 66000$.
 Dus maximale winst als er 40 koeien en 150 schapen zijn.

- 12a Vlak $ABGH$ hoort bij de vergelijking $x = 30$.
 b Punt E ligt in de vlakken $OAGED$, DEF en $EGHJF$. De vergelijkingen van deze drie vlakken zijn $y = 0$, $z = 85$ en $8x + 5y + 4z = 400$. Door y en z in te vullen volgt $8x + 0 + 4 \cdot 85 = 400$, dus $8x = 400 - 340 = 60$ en $x = 7\frac{1}{2}$. De coördinaten van E zijn $(7\frac{1}{2}, 0, 85)$.
 c Van enkele punten zijn de coördinaten direct af te lezen: $O(0, 0, 0)$, $A(30, 0, 0)$, $C(0, 20, 0)$ en $D(0, 0, 85)$.

Voor punt B geldt: $x = 30$, $y = 20$ en $z = 0$ dus $B(30, 20, 0)$.

Voor punt F geldt: $x = 0$, $z = 85$ en $8x + 5y + 4z = 400$, daaruit volgt $0 + 5y + 4 \cdot 85 = 400$ dus $K = 12 \cdot 20 = 240$ en $y = 12$ zodat $F(0, 12, 85)$.

Voor punt G geldt: $y = 0$, $x = 30$ en $8x + 5y + 4z = 400$, daaruit volgt $8 \cdot 30 + 0 + 4z = 400$ dus $4z = 160$ en $z = 40$ zodat $G(30, 0, 40)$.

Voor punt H geldt: $x = 30$, $y = 20$ en $8x + 5y + 4z = 400$, daaruit volgt $8 \cdot 30 + 5 \cdot 20 + 4z = 400$ dus $4z = 60$ en $z = 15$ zodat $H(30, 20, 15)$.

Voor punt I geldt: $x = 0$, $y = 20$ en $8x + 5y + 4z = 400$, daaruit volgt $0 + 5 \cdot 20 + 4z = 400$ dus $4z = 300$ en $z = 75$ zodat $I(0, 20, 75)$

- d** Voor een maximum van de functie $K = -x + 12y - 3z$ moet y zo groot mogelijk en moeten x en z zo klein mogelijk worden gekozen. Het maximum wordt daarom bereikt in punt C . Het maximum is $K = 12 \cdot 20 = 240$.

13a Uit $2x - y - z = 0$ volgt $z = 2x - y$.

De voorwaarden $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 30$ en $y \leq 20$ blijven onveranderd.

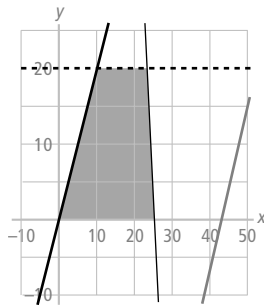
$z \geq 0$ wordt $2x - y \geq 0$.

$z \leq 85$ wordt $2x - y \leq 85$.

$8x + 5y + 4z \leq 400$ wordt $8x + 5y + 4(2x - y) \leq 400$, hieruit volgt $8x + 5y + 8x - 4y \leq 400$, dus $16x + y \leq 400$.

De doelfunctie wordt $W = -x + 12y - 3(2x - y) = -x + 12y - 6x + 3y = -7x + 15y$.

b



c Eén van de hoekpunten is $O(0, 0)$.

Voor het punt A geldt: $y = 0$ en $16x + y = 400$, dus $16x = 400$ en $x = 25$ dus $A(25, 0)$.

Voor B geldt: $y = 20$ en $16x + y = 400$, dus $16x = 400 - 20 = 380$ en $x = 23,75$ zodat $B(23,75; 20)$.

Voor C geldt: $2x = y$ en $y = 20$ dus $x = 10$ zodat $C(10, 20)$.

De waarde van de doelfunctie in de vier hoekpunten is:

In O : $W = 0$

In A : $W = -175$

In B : $W = 133,75$

In C : $W = 230$

De maximale waarde 230 van W wordt bereikt in punt $C(10, 20)$.

bladzijde 295

14a De winst in dat geval is gelijk aan $5 \cdot 60 + 70 + 5 \cdot 0 \cdot 5 + 12 \cdot 50 \cdot 90 = 90\,000$ dus € 90\,000,-

b gewas	benodigde arbeid	beschikbare arbeid
aardappelen	$5 \cdot 12 = 60$	$2 \cdot 8 \cdot 5 = 80$
erwten	$5 \cdot 15 = 75$	$2 \cdot 8 \cdot 5 = 80$
graan	$12 \cdot 10 = 120$	$3 \cdot 8 \cdot 5 = 120$

Bij deze verdeling kan er dus op tijd worden geoogst.

c De voorwaarden zijn:

$$a \geq 0, e \geq 0, g \geq 0 \text{ en } a + e + g \leq 22.$$

De doelfunctie is $W = 60 \cdot 70 \cdot a + 40 \cdot 75 \cdot e + 50 \cdot 90 \cdot g$, dus $W = 4200a + 3000e + 4500g$.

d De beperkende voorwaarden zijn:

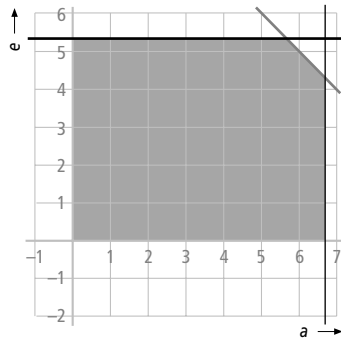
$$12a \leq 80, 15e \leq 80 \text{ en } 10g \leq 20.$$

e Op de helft van de beschikbare grond wordt graan verbouwd, dus $g = 11$.

De voorwaarden worden nu: $a \geq 0, e \geq 0, a + e \leq 11, 12a \leq 80$ en $15e \leq 80$.

$10g \leq 20$ wordt nu $10 \cdot 11 \leq 20$; aan deze voorwaarde is voldaan.

f De voorwaarden leveren het onderstaande toegestane gebied op:



De doelfunctie wordt $W = 4200a + 3000e + 4500 \cdot 11 = 4200a + 3000e + 49500$.

In hoekpunt $O(0, 0)$ geldt: $W = 49500$

In hoekpunt $A(6\frac{2}{3}, 0)$ geldt $W = 4200 \cdot 6\frac{2}{3} + 49500 = 77500$.

Hoekpunt B voldoet aan $a = 6\frac{2}{3}$ en $a + e = 11$, dus $e = 4\frac{1}{3}$.

In dit punt geldt: $W = 4200 \cdot 6\frac{2}{3} + 3000 \cdot 4\frac{1}{3} + 49500 = 90500$.

Hoekpunt C voldoet aan $e = 5\frac{1}{3}$ en $a + e = 11$, dus $a = 5\frac{2}{3}$.

In dit punt geldt: $W = 4200 \cdot 5\frac{2}{3} + 3000 \cdot 5\frac{1}{3} + 49500 = 89300$

De winst is dus het grootst als er $6\frac{2}{3}$ ha aardappelen, $4\frac{1}{3}$ ha erwten en 11 ha graan wordt verbouwd.

g Tijdens de aardappeloogst is $12 \cdot 6\frac{2}{3} = 80$ uur arbeid nodig.

Tijdens de erwtenoogst is $15 \cdot 4\frac{1}{3} = 65$ uur arbeid nodig.

Tijdens de graanoogst is $10 \cdot 11 = 110$ uur arbeid nodig.

Tijdens de erwtenoogst is nog 15 uur en tijdens de graanoogst is nog 10 uur beschikbaar voor ander werk.

15a Er moeten zes getallen worden gekozen: de aantallen auto's van Amsterdam naar Assen, naar Utrecht en naar Eindhoven en de aantallen auto's van Rotterdam naar Assen, naar Utrecht en naar Eindhoven.

Er zijn dus zes beslissingsvariabelen.

Noem deze variabelen respectievelijk a_1, a_2, a_3, r_1, r_2 en r_3 .

b De voorwaarden zijn:

$$a_1 + a_2 + a_3 + r_1 + r_2 + r_3 = 1800$$

$$a_2 + r_2 = 2(a_1 + r_1)$$

$$a_3 + r_3 = \frac{1}{2}(a_1 + r_1 + a_2 + r_2) = \frac{1}{2}(a_1 + r_1 + 2a_1 + 2r_1) = 1\frac{1}{2}(a_1 + r_1)$$

c De doelfunctie is

$$\begin{aligned} TK &= 70a_1 + 40a_2 + 65a_3 + 85r_1 + 50r_2 + 65r_3 + 25(a_1 + a_2 + a_3) + 20(r_1 + r_2 + r_3) \\ &= 95a_1 + 65a_2 + 90a_3 + 105r_1 + 70r_2 + 85r_3 \end{aligned}$$

d De minimale transportkosten zijn $95 \cdot 400 + 65 \cdot 800 + 85 \cdot 600 = 141\,000$ euro.

bladzijde 296

16a In totaal moeten er 60 toestellen naar Zwolle. Als er x toestellen uit Emmen komen, moeten er nog $60 - x$ toestellen uit Amersfoort bij. Op dezelfde manier komen er $50 - y$ toestellen uit Amersfoort naar Deventer en $70 - z$ toestellen uit Amersfoort naar Lelystad.

b In Emmen, Deventer en Lelystad zijn in totaal 180 toestellen nodig. Er zijn in Emmen en Amersfoort in totaal 180 toestellen aanwezig, dus er blijven geen toestellen over. Daarom geldt $x + y + z = 180$ dus $z = 90 - x - y$.

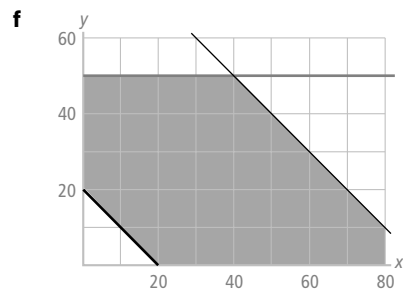
c Dat aantal is $70 - z = 70 - (90 - x - y) = 70 - 90 + x + y = x + y - 20$.

d Voor de transportkosten geldt:

$$\begin{aligned} TK &= 5x + 5y + 6(90 - x - y) + 6(60 - x) + 4,5(50 - y) + 5(x + y - 20) \\ &= 5x + 5y + 540 - 6x - 6y + 360 - 6x + 225 - 4,5y + 5x + 5y - 100 \\ &= 1025 - 2x - 0,5y \end{aligned}$$

e De ongelijkheden zijn:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \text{ en } y \geq 0. \\ 90 - x - y &\geq 0 \text{ dus } x + y \leq 90 \\ 60 - x &\geq 0 \text{ dus } x \leq 60 \\ 50 - y &\geq 0 \text{ dus } y \leq 50 \\ x + y - 20 &\geq 0 \text{ dus } x + y \geq 20 \end{aligned}$$



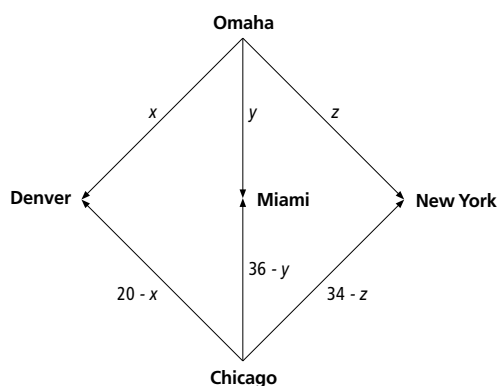
De hoekpunten en de bijbehorende waarde van TK worden als volgt gevonden:

$y = 0$ en $x + y = 20$	$A(20, 0)$	$TK = 1025 - 2 \cdot 20 = 985$
$y = 0$ en $x = 60$	$B(60, 0)$	$TK = 1025 - 2 \cdot 60 = 905$
$x = 60$ en $x + y = 90$	$C(60, 30)$	$TK = 1025 - 2 \cdot 60 - 0,5 \cdot 30 = 890$
$y = 50$ en $x + y = 90$	$D(40, 50)$	$TK = 1025 - 2 \cdot 40 - 0,5 \cdot 50 = 920$
$y = 50$ en $x = 0$	$E(0, 50)$	$TK = 1025 - 0,5 \cdot 50 = 1000$
$x = 0$ en $x + y = 20$	$F(0, 20)$	$TK = 1025 - 0,5 \cdot 20 = 1015$

Het minimum is gelijk aan 890 euro.

g De beste verdeling is dus: vanuit Emmen 60 toestellen naar Zwolle en 30 naar Deventer, uit Amersfoort 20 toestellen naar Deventer en 70 toestellen naar Lelystad.

17a



- b De handelaar heeft $20 + 36 + 34 = 90$ wagonladingen verkocht en hij heeft $50 + 40 = 90$ wagonladingen beschikbaar. Alle voorraad in Omaha is dus nodig. Daarom geldt $x + y + z = 50$ dus $z = 50 - x - y$.

Alles kan worden uitgedrukt in twee variabelen: x en y . De hoeveelheid die vervoerd wordt van Chicago naar New York kan worden geschreven als:

$$34 - z = 34 - (50 - x - y) = 34 - 50 + x + y = x + y - 16.$$

- c De doelfunctie is:

$$\begin{aligned} TK &= 42x + 55y + 60(50 - x - y) + 36(20 - x) + 47(36 - y) + 51(x + y - 16) \\ &= 42x + 55y + 3000 - 60x - 60y + 720 - 36x + 1692 - 47y + 51x + 51y - 816 \\ &= 4596 - 3x - y \end{aligned}$$

- d De ongelijkheden zijn:

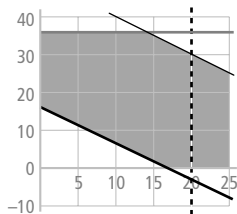
$$x \geq 0 \text{ en } y \geq 0$$

$$50 - x - y \geq 0 \text{ dus } x + y \leq 50$$

$$20 - x \geq 0 \text{ dus } x \leq 20$$

$$36 - y \geq 0 \text{ dus } y \leq 36$$

$$x + y - 16 \geq 0 \text{ dus } x + y \geq 16$$



De hoekpunten en de bijbehorende waarden van TK worden als volgt gevonden:

$y = 0$ en $x + y = 16$	$A(16, 0)$	$TK = 4596 - 3 \cdot 16 = 4548$
$y = 0$ en $x = 20$	$B(20, 0)$	$TK = 4596 - 3 \cdot 20 = 4536$
$x = 20$ en $x + y = 50$	$C(20, 30)$	$TK = 4596 - 3 \cdot 20 - 30 = 4506$
$y = 36$ en $x + y = 50$	$D(14, 36)$	$TK = 4596 - 3 \cdot 14 - 36 = 4518$
$y = 36$ en $x = 0$	$E(0, 36)$	$TK = 4596 - 36 = 4560$
$x = 0$ en $x + y = 16$	$F(0, 16)$	$TK = 4596 - 16 = 4580$

Het minimum is dus gelijk aan 4506 dollar. De beste verdeling is: vanuit Omaha 20 wagonladingen naar Denver en 30 naar Miami en vanuit Chicago 6 wagonladingen naar Miami en 34 naar New York.

bladzijde 297

18a

	naar	Zwolle	Deventer	Lelystad
vanuit Emmen		x	$50 - y$	$90 - x - (50 - y) = 40 - x + y$
Amersfoort		$60 - x$	y	$90 - (60 - x) - y = 30 + x - y$

De voorwaarden:

$$x \geq 0 \text{ en } y \geq 0$$

$$60 - x \geq 0 \text{ dus } x \leq 60$$

$$50 - y \geq 0 \text{ dus } y \leq 50$$

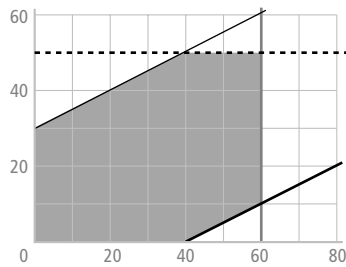
$$40 - x + y \geq 0 \text{ dus } x - y \leq 40$$

$$30 + x - y \geq 0 \text{ dus } x - y \geq -30$$

Voor de transportkosten geldt:

$$\begin{aligned} TK &= 5x + 5(50 - y) + 6(40 - x + y) + 6(60 - x) + 4,5y + 5(30 + x - y) \\ &= 5x + 250 - 5y + 240 - 6x + 6y + 360 - 6x + 4,5y + 150 + 5x - 5y \\ &= 1000 - 2x + 0,5y \end{aligned}$$

Het toegestane gebied:



De hoekpunten en de bijbehorende waarde van TK zijn:

$x = 0$ en $y = 0$	$O(0, 0)$	$TK = 1000$
$y = 0$ en $x - y = 40$	$A(40, 0)$	$TK = 1000 - 2 \cdot 40 = 960$
$x - y = 40$ en $x = 60$	$B(60, 20)$	$TK = 1000 - 2 \cdot 60 + 0,5 \cdot 20 = 890$
$x = 60$ en $y = 50$	$C(60, 50)$	$TK = 1000 - 2 \cdot 60 + 0,5 \cdot 50 = 905$
$y = 50$ en $x - y = -30$	$D(20, 50)$	$TK = 1000 - 2 \cdot 20 + 0,5 \cdot 50 = 985$
$y = 0$ en $x - y = -30$	$E(0, 30)$	$TK = 1000 + 0,5 \cdot 30 = 1015$

Het minimum is gelijk aan 890 euro. De beste verdeling is: vanuit Emmen 60 toestellen naar Zwolle en 30 naar Deventer en vanuit Amersfoort 20 toestellen naar Deventer en 70 toestellen naar Lelystad.

- b** In de doelfunctie van opdracht 16 verandert het getal 5 vóór de eerste x :

$$\begin{aligned}
 TK &= 6x + 5y + 6(90 - x - y) + 6(60 - x) + 4,5(50 - y) + 5(x + y - 20) \\
 &= 6x + 5y + 540 - 6x - 6y + 360 - 6x + 225 - 4,5y + 5x + 5y - 100 \\
 &= 1025 - x - 0,5y
 \end{aligned}$$

Bereken opnieuw de waarde van TK in de zes hoekpunten:

$A(20, 0)$	$TK = 1025 - 20 = 1005$
$B(60, 0)$	$TK = 1025 - 60 = 965$
$C(60, 30)$	$TK = 1025 - 60 - 0,5 \cdot 30 = 950$
$D(40, 50)$	$TK = 1025 - 40 - 0,5 \cdot 50 = 960$
$E(0, 50)$	$TK = 1025 - 0,5 \cdot 50 = 1000$
$F(0, 20)$	$TK = 1025 - 0,5 \cdot 20 = 1015$

Het transport zal op dezelfde manier worden geregeld, maar de kosten zijn nu 950 euro.

19a

	Ha	Nm	Bu
Be	28	36	42
Ne	22	38	42

- b** De totale voorraad in Nederland en België is groter dan de hoeveelheden die in Hasselt, Nieuw-Millingen en Burgum nodig zijn. Daarom kunnen de hoeveelheden vanuit België naar de drie vestigingen worden aangeduid met x , y en z . In dit geval kan z niet worden uitgedrukt in x en y .
- c** De hoeveelheden vanuit België en Nederland naar de drie vestigingen zijn:

	Ha	Nm	Bu
Be	x	y	z
Ne	$1250 - x$	$500 - y$	$750 - z$

Doelfunctie:

$$\begin{aligned}
 TK &= 28x + 36y + 42z + 22(1250 - x) + 38(500 - y) + 42(750 - z) \\
 &= 28x + 36y + 42z + 27500 - 22x + 19000 - 38y + 31500 - 42z \\
 &= 6x - 2y + 78000
 \end{aligned}$$

- d** De voorwaarden zijn:
 $x \geq 0$, $y \geq 0$ en $z \geq 0$
 $1250 - x \geq 0$ dus $x \leq 1250$
 $500 - y \geq 0$ dus $y \leq 500$
 $750 - z \geq 0$ dus $z \leq 750$
 $x + y + z \leq 1175$
 $1250 - x + 500 - y + 750 - z \leq 1800$ dus $x + y + z \geq 700$
- e** De transportkosten zijn:
 $TK = 0 \cdot 28 + 500 \cdot 36 + 675 \cdot 42 + 22 \cdot 1250 + 38 \cdot 0 + 75 \cdot 42 = 77000$ dus 77000 euro.
- f** Nu is voor de drie vestigingen $1250 + 500 + 1225 = 2975$ ton nodig. Dat is gelijk aan de voorraad in België en Nederland samen, dus moet gelden $x + y + z = 1175$ en is $z = 1175 - x - y$ zodat er nu nog maar twee beslissingsvariabelen zijn.

- 20a** Druk alle hoeveelheden uit in aantallen tankwagens: de voorraden in Rotterdam, Antwerpen en Hamburg zijn respectievelijk $450000 : 25000 = 18$, $375000 : 25000 = 15$ en $300000 : 25000 = 12$ tankwagens. In totaal is een hoeveelheid van 45 wagens beschikbaar en er zijn voor Lyon en München in totaal $21 + 24 = 45$ wagens nodig. Er zijn dus slechts twee beslissingsvariabelen.
- b** Noem de aantallen wagens van Rotterdam, Antwerpen en Hamburg naar Lyon respectievelijk x , y en z .

	Rotterdam	Antwerpen	Hamburg
Lyon	x	y	$z = 24 - x - y$
München	$18 - x$	$15 - y$	$12 - z = 12 - (24 - x - y) = x + y - 12$

$$x \geq 0 \text{ en } y \geq 0$$

$$18 - x \geq 0 \text{ dus } x \leq 18 \text{ en } 15 - y \geq 0 \text{ dus } y \leq 15$$

$$24 - x - y \geq 0 \text{ dus } x + y \leq 24$$

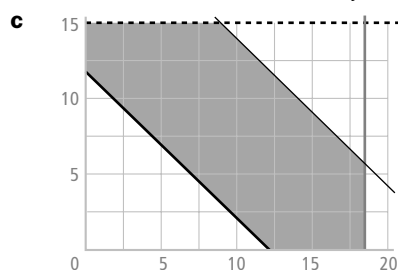
$$x + y - 12 \geq 0 \text{ dus } x + y \geq 12$$

De doelfunctie wordt:

$$TK = 860x + 810y + 1250(24 - x - y) + 830(18 - x) + 875(15 - y) + 1010(x + y - 12)$$

$$= 860x + 810y + 30000 - 1250x - 1250y + 14940 - 830x + 13125 - 875y + 1010x + 1010y - 12120$$

$$= 45945 - 210x - 305y$$



De hoekpunten en de bijbehorende waarde van TK zijn:

$y = 0$ en $x + y = 12$	$A(12, 0)$	$TK = 45945 - 210 \cdot 12 = 43425$
$y = 0$ en $x = 18$	$B(18, 0)$	$TK = 45945 - 210 \cdot 18 = 42165$
$x = 18$ en $x + y = 24$	$C(18, 6)$	$TK = 45945 - 210 \cdot 18 - 305 \cdot 6 = 40335$
$y = 15$ en $x + y = 24$	$D(9, 15)$	$TK = 45945 - 210 \cdot 9 - 305 \cdot 15 = 39480$
$y = 15$ en $x = 0$	$E(0, 15)$	$TK = 45945 - 305 \cdot 15 = 41370$
$x = 0$ en $x + y = 12$	$F(0, 12)$	$TK = 45945 - 305 \cdot 12 = 42285$

De minimale vervoerskosten zijn 39480 euro.

d Het vervoerschema bij deze minimale kosten is:

	Rotterdam	Antwerpen	Hamburg
Lyon	9	15	0
München	9	0	12

bladzijde 298

21a Neem aan dat per persoon r koppen rijst en s koppen soja wordt verstrekt. De voorwaarden zijn:

$$r \geq 0 \text{ en } s \geq 0$$

$$3360r + 1120s \geq 6720 \text{ of } 3r + s \geq 6$$

$$15r + 20s \geq 90 \text{ of } 3r + 4s \geq 18$$

$$0,1r + 0,3s \geq 0,9 \text{ of } r + 3s \geq 9$$

b De doelfunctie is $K = 0,7r + 0,5s$.

Punt A wordt berekend uit $3r + s = 6$ en $3r + 4s = 18$.

Vergelijkingen herschrijven: $s = 6 - 3r$ en $s = 4,5 - 0,75r$.

Gelijkstellen: $6 - 3r = 4,5 - 0,75r$ geeft $-2,25r = -1,5$ en dus $r = \frac{2}{3}$.

Invullen bij $s = 6 - 3r$ levert $s = 4$.

Voor dit punt geldt $K = 0,7 \cdot \frac{2}{3} + 0,5 \cdot 4 \approx 2,467$.

Punt B wordt berekend uit $r + 3s = 9$ en $3r + 4s = 18$

Herschrijven: $r = 9 - 3s$ en $r = 6 - \frac{4}{3}s$

Gelijkstellen: $9 - 3s = 6 - \frac{4}{3}s$ geeft $-1\frac{2}{3}s = -3$ en dus $s = 1,8$.

Invullen in $r = 9 - 3s$ levert $r = 3,6$.

Voor dit punt geldt: $K = 0,7 \cdot 3,6 + 0,5 \cdot 1,8 = 3,06$.

In het punt $C(0, 6)$ zijn de kosten $K = 0,5 \cdot 6 = 3$ en in het punt $D(9, 0)$ geldt:

$$K = 0,7 \cdot 9 = 6,3$$

De kosten zijn dus minimaal in het punt $A(\frac{2}{3}, 4)$.

c De hoeveelheid vitamine B2 is gelijk aan $0,1 \cdot \frac{2}{3} + 0,3 \cdot 4 \approx 1,267$ mg, dus dat is $1,267 - 0,9 = 0,367$ mg meer dan nodig is.

22a De samenstelling is 0,66667 kop rijst en 4 koppen soja.

b Een mogelijk oplossing is (een kwestie van proberen): een kop rijst kost 40 cent en een kop soja kost 100 cent. Het minimum wordt nu bereikt in het punt $(3,6; 1,8)$.

$$c \quad 3360 \cdot 3,6 + 1120 \cdot 1,8 = 14112$$

$$15 \cdot 3,6 + 20 \cdot 1,8 = 90$$

$$0,1 \cdot 3,6 + 0,3 \cdot 1,8 = 0,9$$

Bij energie blijkt nu een overschot te zijn, namelijk $14112 - 6720 = 7392$ kilojoules.

23a

Doelfunctie

Minimum Maximum

Totale kosten = $95a + 65b + 90c + 105d + 70e + 85f$

Voorwaarden

{voorraad} $a + b + c + d + e + f = 1800$
 {Ass/Utre} $b + e = 2(a + d)$
 {Eindh} $c + f = 0,5(a + b + d + e)$

Conclusie

De minimale waarde van de doelfunctie Totale kosten = 141000,00

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
a	400,00000	0,00000
b	800,00000	0,00000
c	0,00000	5,00000
d	0,00000	10,00000
e	0,00000	5,00000
f	600,00000	0,00000

De beste verdeling volgens de computer is: vanuit Amsterdam 400 auto's naar Assen en 800 auto's naar Utrecht en vanuit Rotterdam 600 auto's naar Eindhoven.

- b Een mogelijke keuze is: maak de vervoerskosten van Rotterdam naar Assen meer dan 10 euro goedkoper. Dit geeft het volgende resultaat.

Doelfunctie
 Minimum Maximum
 Totale kosten = $95a+65b+90c+90d+70e+85f$

Voorwaarden
 {voorraad} $a+b+c+d+e+f=1800$
 {Ass/Utre} $b+e=2(a+d)$
 {Eindh} $c+f=0,5(a+b+d+e)$

Conclusie
 De minimale waarde van de doelfunctie *Totale kosten* = 139000,00

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
a	0,00000	5,00000
b	800,00000	0,00000
c	0,00000	5,00000
d	400,00000	0,00000
e	0,00000	5,00000
f	600,00000	0,00000

Er gaan nu 400 auto's van Rotterdam naar Assen.

bladzijde 299

- 24a Kies als variabelen sa en ka (aantal ha suikerbieten en katoen bij A) en sb en kb (aantal ha suikerbieten en katoen bij B). De voorwaarden zijn:

$$sa + ka \leq 150$$

$$sb + kb \leq 225$$

$$sa + sb \leq 200$$

$$ka + kb \leq 190$$

$$3sa + 2ka \leq 250$$

$$3sb + 2kb \leq 300$$

De doelfunctie is: $B = 950sa + 950sb + 700ka + 700kb$

Doelfunctie
 Minimum Maximum
 Opbrengst = $950sa+950sb+700ka+700kb$

Voorwaarden
 {grond A} $sa+ka \leq 150$
 {grond B} $sb+kb \leq 200$
 {totaal suikerbieten} $sa+sb \leq 200$
 {totaal katoen} $ka+kb \leq 190$
 {water A} $3sa+2ka \leq 250$
 {water B} $3sb+2kb \leq 300$

Conclusie
 De maximale waarde van de doelfunctie *Opbrengst* = 186833,33

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
ka	125,00000	0,00000
kb	65,00000	0,00000
sa	0,00000	0,00000
sb	56,66667	0,00000

De oplossing is dus: kibbutz A verbouwt 125 ha katoen en kibbutz B verbouwt 65 ha katoen en 56,7 ha suikerbieten.

- b Kibbutz B zal niet tevreden zijn, want bij hen blijft $225 - 65 - 56,7 = 103,3$ ha ongebruikt, terwijl bij kibbutz A slechts 25 ha onbenut blijft.

- 25a Het grondgebied van B is 1,5 maal zo groot als dat van A, dus moet het gebruikte deel bij B, dat is dus $sb + kb$, ook 1,5 maal zo groot zijn als $sa + ka$, dat is het gebruikte deel bij A.

b

The screenshot shows a software window with a 'Doelfunctie' (Objective Function) section and a 'Voorwaarden' (Constraints) section. The objective function is 'Opbrengst = 950sa + 950sb + 700ka + 700kb'. The constraints are: {grond A} $sa + ka \leq 150$, {grond B} $sb + kb \leq 200$, {totaal suikerbieten} $sa + sb \leq 200$, {totaal katoen} $ka + kb \leq 190$, {water A} $3sa + 2ka \leq 250$, {water B} $3sb + 2kb \leq 300$, and {verdeling} $sb + kb = 1,5sa + 1,5ka$. A 'Conclusie' (Conclusion) window is open, showing the maximum value of the objective function as 186833,33 and a table of variable values.

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
ka	46,00000	0,00000
kb	144,00000	0,00000
sa	52,66667	0,00000
sb	4,00000	0,00000

De oplossing is nu: kibbutz A verbouwt 46 ha katoen en 52,7 ha suikerbieten en kibbutz B verbouwt 144 ha katoen en 4 ha suikerbieten.

- c Als er 50 miljoen liter water wordt ingekocht verandert bij voorwaarde 6 het getal 300 in 350. In de doelfunctie moeten de kosten van het water worden afgetrokken: $250 \cdot 50 = 12500$ dollar.

The screenshot shows the same software window as in part b, but with a modified objective function: 'Opbrengst = 950sa + 950sb + 700ka + 700kb - 12500'. The constraints remain the same. The 'Conclusie' window now shows a maximum value of 202666,67 and updated variable values.

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
ka	66,00000	0,00000
kb	124,00000	0,00000
sa	39,33333	0,00000
sb	34,00000	0,00000

De totale opbrengst is groter geworden. De gevolgen zijn:

Zonder de koop van het water waren de inkomsten:

Kibbutz A: $52,67 \cdot 950 + 46 \cdot 700 \approx 82236$ dollar.

Kibbutz B: $4 \cdot 950 + 144 \cdot 700 = 104600$ dollar.

Met de aankoop van het water worden deze bedragen:

Kibbutz A: $39,33 \cdot 950 + 66 \cdot 700 \approx 83564$ dollar.

Kibbutz B: $124 \cdot 950 + 34 \cdot 700 = 141600$ dollar.

Het is dus voor B een goed besluit om het water te kopen.

bladzijde 300

- 26a 20 % van kwaliteit 1 en 30% van kwaliteit 2, dus ook 50% van kwaliteit 3. De prijs wordt dan $0,20 \cdot 57 + 0,30 \cdot 51 + 0,50 \cdot 46 = 49,7$ euro per ton. Het kopergehalte is $0,20 \cdot 33 + 0,30 \cdot 45 + 0,50 \cdot 90 = 65,1$ gram per ton, dus het voldoet niet aan de milieueis.
- b Stel er is a % van kwaliteit 1 en b % van kwaliteit 2, dus $100 - a - b$ % van kwaliteit 3. De voorwaarden zijn: $a \geq 0$ en $b \geq 0$

De eisen van de percentages worden:

$$100 - a - b \geq 0 \text{ dus } a + b \leq 100$$

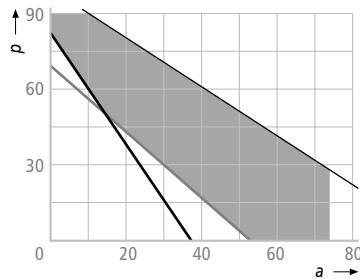
$$\frac{a}{100} \cdot 57 + \frac{b}{100} \cdot 51 + \frac{100 - a - b}{100} \cdot 46 \leq 50 \text{ dus } 0,57a + 0,51b + 46 - 0,46a - 0,46b \leq 50,$$

waaruit volgt $0,11a + 0,05b \leq 4$ of $11a + 5b \leq 400$.

$$\frac{a}{100} \cdot 33 + \frac{b}{100} \cdot 45 + \frac{100 - a - b}{100} \cdot 90 \leq 60 \text{ dus } 0,33a + 0,45b + 90 - 0,9a - 0,9b \leq 60, \text{ waar-}$$

uit volgt $-0,57a - 0,45b \leq -30$ of $19a + 15b \geq 1000$.

Het doel is om zo weinig mogelijk van de kwaliteiten 1 en 2 te gebruiken, dus de doelfunctie is $D = a + b$. Het toegestane gebied:



$D = a + b$ heeft een minimum als het bijbehorende punt zo dicht mogelijk bij de oorsprong ligt. Dat is het geval in het snijpunt van de lijnen met vergelijking $11a + 5b = 400$ en $19a + 15b = 1000$. Herleiden en gelijkstellen geeft $a = 14,3$. Door invullen krijg je $5b = 400 - 11 \cdot 14,286... \approx 242,9$ dus $b \approx 48,6$. Kwaliteit 4 moet dus bestaan uit 14,3 % van kwaliteit 1, 48,6 % van kwaliteit 2 en 37,1 % van kwaliteit 3.

- 27a** Gebruik de beslissingsvariabelen b_1 (aantal liters binnenlak volgens bereidingswijze 1), j_1 (aantal liters jachtlak volgens bereidingswijze 1), b_2 en j_2 .

De voorwaarden zijn: $b_1 \geq 0$, $j_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ en $j_2 \geq 0$

$$b_1 + j_1 \leq 1200 \text{ en } b_2 + j_2 \leq 1500$$

$$\frac{3}{6}(b_1 + j_1) + \frac{5}{8}(b_2 + j_2) \leq 1020 \text{ (grondstof A)}$$

$$\frac{2}{6}(b_1 + j_1) + \frac{1}{8}(b_2 + j_2) \leq 420 \text{ (grondstof B)}$$

$$\frac{1}{6}(b_1 + j_1) + \frac{2}{8}(b_2 + j_2) \leq 400 \text{ (grondstof C)}$$

$$b_1 + b_2 \geq 540$$

$$j_1 + j_2 \geq 335$$

De doelfunctie is $D = 10(b_1 + j_1) + 8(b_2 + j_2)$. Verder is uit de gegevens te lezen dat $b_1 = j_1$ en $b_2 = 2 \cdot j_2$. Daardoor is het probleem terug te brengen tot een probleem met twee beslissingsvariabelen: j_1 en j_2 . De voorwaarden zijn:

$$j_1 \geq 0 \text{ en } j_2 \geq 0$$

$$2j_1 \leq 1200 \text{ dus } j_1 \leq 600$$

$$3j_2 \leq 1500 \text{ dus } j_2 \leq 500$$

$$\frac{3}{6}2j_1 + \frac{5}{8} \cdot 3j_2 \leq 1020 \text{ dus } j_1 + \frac{15}{8}j_2 \leq 1020 \text{ of } 8j_1 + 15j_2 \leq 8160$$

$$\frac{2}{6} \cdot 2j_1 + \frac{1}{8} \cdot 3j_2 \leq 420 \text{ dus } \frac{2}{3}j_1 + \frac{3}{8}j_2 \leq 420 \text{ of } 16j_1 + 9j_2 \leq 10080$$

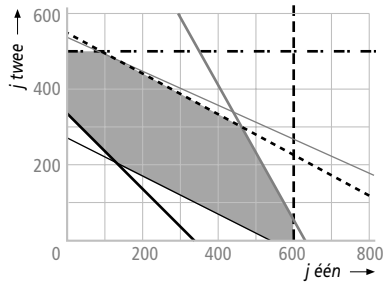
$$\frac{1}{6} \cdot 2j_1 + \frac{2}{8} \cdot 3j_2 \leq 400 \text{ dus } \frac{1}{3}j_1 + \frac{3}{4}j_2 \leq 400 \text{ of } 4j_1 + 9j_2 \leq 4800$$

$$j_1 + 2 \cdot j_2 \geq 540$$

$$j_1 + j_2 \geq 335$$

en de doelfunctie wordt $D = 10(j_1 + j_1) + 8(2 \cdot j_2 + j_2) = 20j_1 + 24j_2$

Het toegestane gebied:



Voor een minimale waarde van D komen punten dichtbij de oorsprong in aanmerking. Bereken het snijpunt van de lijnen $j_1 + 2 \cdot j_2 = 540$ en $j_1 + j_2 = 335$.

Herleiden en gelijkstellen levert $j_2 = 205$ en $j_1 = 130$.

De waarde van D in dit punt is $20 \cdot 130 + 24 \cdot 205 = 7520$.

De waarde in de “naastliggende” punten is:

In $(0, 335)$: $D = 24 \cdot 335 = 8040$

In $(540, 0)$: $D = 20 \cdot 540 = 10800$

De minimale kosten zijn 7520 euro.

Er wordt dan 130 liter jachtlak gemaakt volgens bereidingswijze 1, 205 liter jachtlak volgens bereidingswijze 2, 130 liter binnenlak volgens bereidingswijze 1 en 410 liter binnenlak volgens bereidingswijze 2.

Alternatieve aanpak

Stel er wordt a liter geproduceerd volgens bereidingswijze 1 en b liter volgens bereidingswijze 2.

Dan zijn de beperkende voorwaarden:

$$a \geq 0 \text{ en } b \geq 0$$

$$a \leq 1200 \text{ en } b \leq 1500$$

$$\frac{3}{6}a + \frac{5}{8}b \leq 1020 \text{ of } 4a + 5b \leq 8160$$

$$\frac{2}{6}a + \frac{1}{8}b \leq 420 \text{ of } 8a + 3b \leq 10080$$

$$\frac{1}{6}a + \frac{2}{8}b \leq 400 \text{ of } 4a + 6b \leq 9600$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b \geq 540 \text{ of } 3a + 4b \geq 3240$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b \geq 335 \text{ of } 3a + 2b \geq 2010$$

De doelfunctie is $D = 10a + 8b$; gevraagd wordt een minimum voor D . De optimale oplossing wordt gevonden voor $a = 260$ en $b = 615$, waaruit kan worden gevonden:

Bereidingswijze 1: 130 liter binnenlak en 130 liter jachtlak.

Bereidingswijze 2: 410 liter binnenlak en 205 liter jachtlak.

bladzijde 301

28a Er is in AyeH wekelijks 120 ton nodig, dus er moet $\frac{5}{4} \cdot 120 = 150$ ton worden verstuurd. Naar Biopa moet $\frac{5}{4} \cdot 100 = 125$ ton worden verstuurd. Er is echter geen $150 + 125 = 275$ ton beschikbaar, maar slechts 260 ton.

b Als er 120 ton per vrachtauto in AyeH moet aankomen, moet 150 ton worden verstuurd. Dit kost $150 \cdot (300 + 40) = 51000$ dollar. Per afgeleverde ton is dat $51000 : 120 = 425$ dollar.

Als er 120 ton per vliegtuig in AyeH moet aankomen, moet 120 ton worden verstuurd. Dit kost $120 \cdot (300 + 150) = 54000$ dollar. Per afgeleverde ton is dat $54000 : 120 = 450$ dollar.

Versturen per vliegtuig is dus per afgeleverde ton 25 dollar duurder.

c De doelfunctie is $K = (300 + 40)x + (300 + 60)y + (300 + 150)u + (300 + 200)v$ maar ook geldt $\frac{4}{5}x + u = 120$ dus $u = 120 - \frac{4}{5}x$ en $\frac{4}{5}y + v = 100$ dus $v = 100 - \frac{4}{5}y$ en $K = 340x + 360y + 450(120 - \frac{4}{5}x) + 500(100 - \frac{4}{5}y)$
 $= 340x + 360y + 54\,000 - 360x + 50\,000 - 400y$
 $= 10\,400 - 20x - 40y$

d Als $x = 150$ zal er 120 ton, dus de benodigde hoeveelheid, in Ayeh aankomen.
 Als $y = 125$ zal er 100 ton in Biopa aankomen.

e De voorwaarden zijn:

$$x \leq 150$$

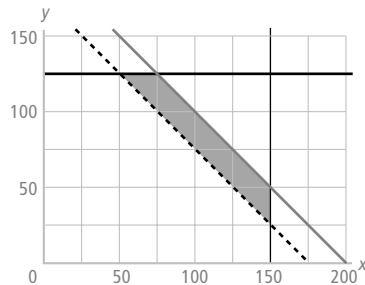
$$y \leq 125$$

Maximale capaciteit vliegtuig: $u + v \leq 80$ dus $120 - \frac{4}{5}x + 100 - \frac{4}{5}y \leq 80$, waaruit volgt $140 \leq \frac{4}{5}(x + y)$ dus $x + y \geq 175$.

Maximaal beschikbaar per week is 260 ton, dus $x + y + u + v \leq 260$ geeft

$$x + y + 120 - \frac{4}{5}x + 100 - \frac{4}{5}y \leq 260, \text{ waaruit volgt } \frac{1}{5}(x + y) \leq 40 \text{ dus } x + y \leq 200$$

Het toegestane gebied:



De waarde van de doelfunctie in de vier hoekpunten is:

$$\text{In } A(150, 25) \quad K = 10\,400 - 20 \cdot 150 - 40 \cdot 25 = 6\,400$$

$$\text{In } B(150, 50) \quad K = 10\,400 - 20 \cdot 150 - 40 \cdot 50 = 5\,400$$

$$\text{In } C(75, 125) \quad K = 10\,400 - 20 \cdot 75 - 40 \cdot 125 = 3\,900$$

$$\text{In } D(50, 125) \quad K = 10\,400 - 20 \cdot 50 - 40 \cdot 125 = 4\,400$$

De kosten zijn dus minimaal als $x = 75$ en $y = 125$, waaruit volgt $u = 120 - \frac{4}{5} \cdot 75 = 60$ en $v = 100 - \frac{4}{5} \cdot 125 = 0$. Dat betekent dat er vanuit Hilim wordt verstuurd:

75 ton per vrachtauto en 60 ton per vliegtuig naar Ayeh. en 125 ton per vrachtauto naar Biopa.

bladzijde 304

T-1a De voorwaarden zijn $s \geq 0, k \geq 0, b \geq 0, s \leq 5, k \leq 4; s + k \leq 6$ en $s + k + b \leq 12$.

b Voor al deze punten is de eerste coördinaat 5, dus de punten horen bij het maximale aantal stoelen.

c De punten C, D, G en H hebben alle als tweede coördinaat 4, dus deze punten horen bij het maximale aantal kasten.

De punten E, F, G, H en I horen bij de voorwaarde $s + k + b = 12$

d De opbrengst is te schrijven als $B = 4s + 5k + 2,5b$

$$\text{In het punt G geldt: } B = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2,5 \cdot 6 = 43$$

$$\text{In het punt C geldt: } B = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 2,5 \cdot 0 = 28$$

$$\text{In het punt F geldt: } B = 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 2,5 \cdot 6 = 40$$

$$\text{In het punt H geldt: } B = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 4 + 2,5 \cdot 8 = 40$$

De maximale opbrengst wordt dus verkregen bij beladen van de auto met 2 stoelen, 4 kasten en 6 bijzettafeltjes.

T-2a Neem als beslissingsvariabelen:

a_1 = aantal ton van A naar H_1 en a_2 = aantal ton van A naar H_2

b_1 = aantal ton van B naar H_1 en b_2 = aantal ton van B naar H_2

c_1 = aantal ton van C naar H_1 en c_2 = aantal ton van C naar H_2

De doelfunctie is dan $TK = 9a_1 + 10b_1 + 9,5c_1 + 10,5a_2 + 11b_2 + 11,5c_2$.

b De voorwaarden:

$$a_1 + a_2 \leq 22$$

$$b_1 + b_2 \leq 12$$

$$c_1 + c_2 \leq 20$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 20$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 30$$

c In dit geval geldt:

$$TK = 9 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 9,5 \cdot 16 + 10,5 \cdot 18 + 11 \cdot 12 + 11,5 \cdot 0 \text{ dus}$$

$$TK = 36 + 152 + 189 + 132 = 509 \text{ euro.}$$

d In dit geval levert A 22 ton en B 12 ton, dus die twee distributiecentra raken door hun voorraad heen. C levert 16 ton en heeft dus nog vlees over.

bladzijde 305

T-3a Stel er wordt x miljoen euro belegd in aandelen, y miljoen in obligaties en z miljoen in onroerend goed.

Daarbij geldt: $x + y + z = 30$ dus $z = 30 - x - y$.

Verder gelden de voorwaarden:

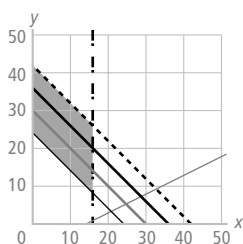
$$x \geq 3 \text{ en } y \geq 3$$

$$z \geq 3 \text{ dus } 30 - x - y \geq 3 \text{ of } x + y \leq 27$$

$$x + y \geq \frac{1}{2} \cdot 30 \text{ dus } x + y \geq 15$$

$$x \leq 2y$$

Het toegestane gebied:



De doelfunctie is

$$D = 0,08x + 0,07y + 0,09z = 0,08x + 0,07y + 0,09(30 - x - y)$$

$$= 0,08x + 0,07y + 2,7 - 0,09x - 0,09y = 2,7 - 0,01x - 0,02y$$

De hoekpunten van het toelaatbare gebied zijn:

Uit $x = 3$ en $x + y = 15$ volgt $A(3, 12)$.

Uit $x = 3$ en $x + y = 27$ volgt $D(3, 24)$.

Uit $x = 2y$ en $x + y = 27$ volgt $C(18, 9)$.

Uit $x = 2y$ en $x + y = 15$ volgt $B(10, 5)$.

De waarde van W in de hoekpunten is:

In $A(3, 9)$: $D = 2,7 - 0,01 \cdot 3 - 0,02 \cdot 9 = 2,49$

In $B(10, 5)$: $D = 2,7 - 0,01 \cdot 10 - 0,02 \cdot 5 = 2,5$

In $C(18, 9)$: $D = 2,7 - 0,01 \cdot 18 - 0,02 \cdot 9 = 2,34$

In $D(3, 24)$: $D = 2,7 - 0,01 \cdot 3 - 0,02 \cdot 24 = 2,19$

Het maximum wordt bereikt voor $x = 10$, $y = 5$ en $z = 15$. Dus 10 miljoen euro beleggen in aandelen, 5 miljoen euro in obligaties en 15 miljoen euro in onroerend goed.

b De maximale opbrengst is 2,5 miljoen euro.

T-4a x is het bedrag in aandelen, y het bedrag in obligaties en z is het bedrag in onroerend goed. Zie de oplossing van opdracht T-3.

b In de doelfunctie wordt 0,08 veranderd in 0,04, het resultaat met VU-Grafiek wordt:

Doelfunctie

Minimum Maximum

Opbrengst = $0,04x + 0,07y + 0,09z$

Voorwaarden

{totaal} $x + y + z \leq 30$
 {aandelen} $x \geq 3$
 {obligaties} $y \geq 3$
 {onroerend goed} $z \geq 3$
 {heft} $x + y \geq 0,5(x + y + z)$
 {aand.} $x \leq 2y$

Conclusie

De maximale waarde van de doelfunctie *Opbrengst* = 2,31

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
x	3,00000	0,00000
y	12,00000	0,00000
z	15,00000	0,00000

De verdeling van het te investeren bedrag verandert in 3 miljoen in aandelen, 12 miljoen in obligaties en 15 miljoen in onroerend goed.

c De maximale opbrengst is ook nu 2,5 miljoen euro.

d Voeg nu de voorwaarde $z = 6$ toe. Het resultaat met VU-Grafiek wordt:

Doelfunctie

Minimum Maximum

Opbrengst = $0,04x + 0,07y + 0,09z$

Voorwaarden

{totaal} $x + y + z \leq 30$
 {aandelen} $x \geq 3$
 {obligaties} $y \geq 3$
 {onroerend goed} $z \geq 3$
 {heft} $x + y \geq 0,5(x + y + z)$
 {aand.} $x \leq 2y$
 {onr. goed} $z = 6$

Conclusie

De maximale waarde van de doelfunctie *Opbrengst* = 2,13

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
x	3,00000	0,00000
y	21,00000	0,00000
z	6,00000	0,00000

De opbrengst is nu 2,13 miljoen euro, dat is 0,37 miljoen euro minder.

- e Verander het totale bedrag in 31 miljoen euro. Het resultaat met VU-Grafiek wordt:

Doelfunctie

Minimum Maximum

Opbrengst = $0,04x + 0,07y + 0,09z$

Voorwaarden

{totaal} $x + y + z \leq 31$
 {aandelen} $x \geq 3$
 {obligaties} $y \geq 3$
 {onroerend goed} $z \geq 3$
 {heff} $x + y \geq 0,5(x + y + z)$
 {aand.} $x \leq 2y$
 {onr. goed} $z = 6$

Conclusie

De maximale waarde van de doelfunctie *Opbrengst* = 2,20

Variabele	Waarde	Gereduceerde kosten
x	3,00000	0,00000
y	22,00000	0,00000
z	6,00000	0,00000

Ten opzichte van de vorige vraag is de opbrengst 0,07 miljoen euro hoger.

- T-5** Neem aan dat er x zakken worden vervoerd van Mtukwao naar Dar es Salaam, y zakken naar Kilwa Masoko en z zakken naar Lindi. Daarbij geldt $x + y + z = 200$ dus $z = 200 - x - y$.

Opbrengst $120x + 120 \cdot 0,6y + 120 \cdot 0,8z = 120x + 72y + 96z$

Transport $13x + 1y + 10z$

De doelfunctie W is

$$W = 107x + 71y + 86z = 107x + 71y + 86(200 - x - y)$$

$$= 107x + 71y + 17200 - 86x - 86y = 17200 + 21x - 15y$$

De voorwaarden zijn:

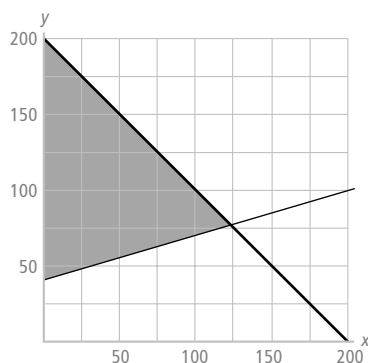
$x \geq 0$ en $y \geq 0$

$z \geq 0$ dus $200 - x - y \geq 0$ dus $x + y \leq 200$

$13x + y + 10(200 - x - y) = 13x + y + 2000 - 10x - 10y = 3x - 9y + 2000 \leq 1700$ dus

$3x - 9y \leq -300$ of $3y - x \geq 100$

Het toegestane gebied:



De hoekpunten:

$x = 0$ en $x + y = 200$ geeft punt $(0, 200)$

$3y - x = 100$ en $x = 0$ geeft punt $(0, 33\frac{1}{3})$

$3y - x = 100$ en $x + y = 200$ geeft door herschrijven en gelijkstellen $y = 75$ en dus punt $(125, 75)$

De waarde van de doelfunctie is:

In $(0, 200)$ $W = 17200 - 15 \cdot 200 = 14200$

In $(0, 33\frac{1}{3})$ $W = 17200 - 15 \cdot 33\frac{1}{3} = 16700$

In $(125, 75)$ $W = 17200 + 21 \cdot 125 - 15 \cdot 75 = 18700$

De winst is maximaal bij 125 zakken naar Dar es Salaam en 75 zakken naar Kilwa Masoko. De winst is in dat geval 18700 shilling.