Blok 4 - Vaardigheden

bladzijde 240

1a Dat geldt voor h, l en m; de grafieken zijn symmetrisch in de y-as.
b Die zijn tegengesteld; bijvoorbeeld $g(-a) = -g(a)$
De grafiek is symmetrisch in de oorsprong.

2

functie	*symmetrie in de y-as*	*symmetrie in de oorsprong*
f	☺	-
h	☺	-
l	-	-
n	-	☺
q	-	-
r	-	☺

bladzijde 241

3a $g(-a) = 3\cdot -a + \frac{1}{-a} = -(3a + \frac{1}{a}) = -g(a)$ dus symmetrisch in de oorsprong.

b $k(-a) = \frac{12\cdot -a}{20 + 2(-a)^2} = -\frac{12a}{20+2a^2} = -k(a)$ dus symmetrisch in de oorsprong.

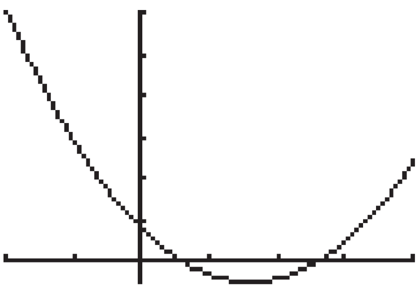
c $m(-a) = (-a)^3 - \frac{7}{-a} = -a^3 + \frac{7}{a} = -(a^3 - \frac{7}{a}) = -m(a)$ dus symmetrisch in de oorsprong.

d $p(-a) = \frac{10-(-a)^2}{10+(-a)^2} = \frac{10-a^2}{10+a^2} = p(a)$ dus symmetrisch in de y-as.

4a voor geen enkele waarde van x is de noemer nul, dus het domein is $\mathbb{R}$.
b $f(-a) = \frac{1-2^{-a}}{1+2^{-a}} = \frac{1-2^{-a}}{1+2^{-a}}\cdot\frac{2^a}{2^a} = \frac{2^a-1}{2^a+1} = -\frac{1-2^a}{1+2^a} = -f(a)$
c $f(-a) = -f(a)$ dus de grafiek is puntsymmetrisch in de oorsprong $(0,\ 0)$

5a $(1-p)^2 = (1-p)(1-p) = 1 - p - p + p^2 = p^2 - 2p + 1$
b $(5+p)^3 = (5+p)^2(5+p) = (P^2 + 10p + 25)(5+p) = p^3 + 15p^2 + 75p + 125$
c $(3-a)^3 = (3-a)^2(3-a) = (9 - 6a + a^2)(3-a) = -a^3 + 9a^2 - 27a + 27$
d $(2+q)^4 = (2+q)^2(2+q)^2 = (4+4q+q^2)(4+4q+q^2) = q^4 + 8q^3 + 24q^2 + 32q + 16$
e $(p+4)^3 = p^3 + 12p^2 + 48p + 64$
f $(5-q)^4 = q^4 - 20q^3 + 150q^2 - 500q + 625$

6a



$Y1 = 0{,}5X^2 - 8X + 20$
Vensterinstelling: xmin = –10; xmax = 20; ymin = –12; ymax = 150
minimum geeft top $(8,\ -12)$
b de verticale lijn $x = 8$ is de symmetrie-as

c $f(8+p)=\frac{1}{2}(8+p)^2-8(8+p)+20$

$=32+8p+\frac{1}{2}p^2-64-8p+20$

$=\frac{1}{2}p^2-12$

d $f(8-p)=\frac{1}{2}(8-p)^2-8(8-p)+20$

$=32-8p+\frac{1}{2}p^2-64+8p+20$

$=\frac{1}{2}p^2-12$

e $f(8-p)=f(8+p)$ impliceert een symmetrie-as $x=8$

bladzijde 242

7a de grafiek van f heeft symmetrie-as $x=-6$ want $f(-6+a)=f(-6-a)$
b de grafiek van g heeft symmetrie-as $x=0$ (y-as) want $g(a)=g(-a)$
c de grafiek van h heeft symmetrie-as $x=1$ want $h(1+a)=h(1-a)$
d de grafiek van k heeft symmetrie-as $x=3$ want $k(3+a)=k(3-a)$
e de grafiek van l heeft symmetrie-as $x=0$ (y-as) want $l(a)=l(-a)$
f de grafiek van m heeft symmetrie-as $x=-4$ want $m(-4+a)=m(-4-a)$
g de grafiek van p heeft symmetrie-as $x=-3$ want $p(-3+a)=p(-3-a)$
h de grafiek van q heeft symmetrie-as $x=-6$ want $q(-1+a)=q(-1-a)$

8a

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	–29	–1	9	7	–1	–9	–11	–1	27

b $\frac{f(0)+f(2)}{2}=\frac{7-9}{2}=-1=f(1)$

c $\frac{f(-3)+f(5)}{2}=\frac{-29+27}{2}=-1=f(1)$

9a punt van symmetrie is $(4,\ 5)$ want $\frac{f(4-p)+f(4+p)}{2}=5$

b punt van symmetrie is $(1,\ 0)$ want $\frac{9(1-p)+g(1+p)}{2}=0$

c punt van symmetrie is $(-2,\ 0)$ want $\frac{h(-2-p)+h(-2+p)}{2}=0$

d punt van symmetrie is $(-4,\ 3)$ want $\frac{k(-4-p)+k(-4+p)}{2}=3$

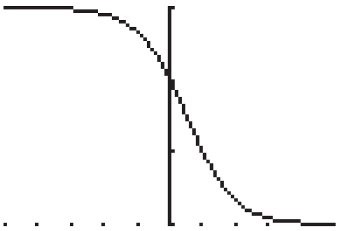
e punt van symmetrie is $(2,\ 2)$ want $\frac{m(2-p)+m(2+p)}{2}=2$

f punt van symmetrie is $(-1,\ 0)$ want $\frac{n(-1-p)+n(-1+p)}{2}=0$

bladzijde 243

10a Het domein is $\mathbb{R}$, want de noemer wordt nooit nul.

b



$Y1 = (8 + 2 \wedge X) / (2 + 2 \wedge X)$

Vensterinstelling: xmin = –10; xmax = 10; ymin = 1; ymax = 4

c $g(x) = f(1-x) = \dfrac{8+2^{1-x}}{2+2^{1-x}}$

$= \dfrac{8+2^{1-x}}{2+2^{1-x}} \cdot \dfrac{2^x}{2^x} = \dfrac{8 \cdot 2^x + 2}{2 \cdot 2^x + 2}$

d $f(1+x) = \dfrac{8+2^{1+x}}{2+2^{1+x}}$

$5 - f(1-x) = 5 - \dfrac{8 \cdot 2^x + 2}{2 \cdot 2^x + 2}$

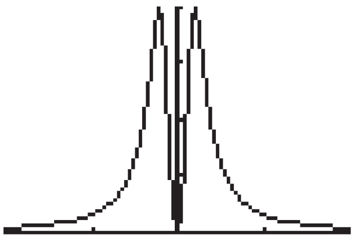
$= \dfrac{5(2 \cdot 2^x + 2) - 8 \cdot 2^x - 2}{2 \cdot 2^x + 2} = \dfrac{2 \cdot 2^x + 8}{2 \cdot 2^x + 2} = f(1+x)$

dus $\dfrac{f(1+x) + f(1-x)}{2} = \dfrac{5 - f(1-x) + f(1-x)}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

wat de puntsymmetrie rond $(1,\ 2\frac{1}{2})$ bewijst.

11a Het domein is $\mathbb{R}$ want de noemer wordt nooit nul.

b



$Y1 = 8X^2 / (X \wedge 4 + 1)$

Vensterinstelling: xmin = –10; xmax = 10; ymin = 0 en ymax = 4

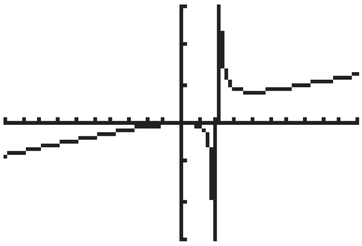
c $(-1,\ 4)$ en $(0,\ 0)$ en $(1,\ 4)$

d $p < 0$ of $p > 4$

e domein $\langle \leftarrow,\ 0 \rangle$ en $\langle 0,\ \rightarrow \rangle$

f $k(x) = \dfrac{\frac{8}{x^2}}{\frac{1}{x^4} + 1} = \dfrac{\frac{8}{x^2}}{\frac{1}{x^4} + 1} \cdot \dfrac{x^4}{x^4} = \dfrac{8x^2}{1 + x^4} = h(x)$ mits $x \neq 0$

12a



$Y1 = X^2 / (X - 2)$

Vensterinstelling: xmin = –10; xmax = 10; ymin = –30 en ymax = 30

domein $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$ of $x \neq 2$

b de grafiek van f is puntsymmetrisch rond $(2, 4)$

$f(2 - x) = \dfrac{(2 - x)^2}{2 - x - 2} = \dfrac{4 - 4x + x^2}{-x} = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x}$

$f(2 - x) = \dfrac{(2 + x)^2}{2 + x - 2} = \dfrac{4 + 4x + x^2}{x}$

dus $\dfrac{f(2 - x) + f(2 + x)}{2} = \dfrac{\frac{8x}{x}}{2} = 4$

c $g(x) = f(x^2) = \dfrac{(x^2)^2}{x^2 - 2} = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

verticale asymptoot: $x^2 - 2 = 0$ dus $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$

d $h(x) = f(x + 2) = \dfrac{(x + 2)^2}{x + 2 - 2} = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x} = x + 4 + \dfrac{4}{x}$

e de grafiek van h ontstaat uit die van f door een translatie over –2 ten opzichte van de y-as (verschuiving van 2 naar links)

13a door het punt $(0, 0)$

$f_p(0) = 0^4 - 6 \cdot 0^3 + p \cdot 0^2 = 0$

b $f_p(x) = x^2(x^2 - 6x + p)$

$f_p(x) = 0$ als $x^2 = 0$ of $x^2 - 6x + p = 0$

$x^2 = 0$ heeft één oplossing en $x^2 - 6x + p$ heeft hoogstens twee oplossingen.

Dus zijn er in totaal hoogstens drie oplossingen.

c De discriminant van $x^2 - 6x + p = 0$ is dan 0.

$(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 0$

$36 - 4p = 0$ dus $p = 9$

d $f_9(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$ heeft als symmetrie-as de verticale lijn $x = 1$

$f_9(1 + x) = (1 + x)^4 - 6(1 + x)^3 + 9(1 + x)$

$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 - 6 - 18x - 18x^2 - 6x^3 + 9 + 9x$

$= x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 5x + 4$

$f_9(1 - x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 5x + 4$

dus $f_9(1 + x) = f_9(1 - x)$

ICT - Raaklijnen

bladzijde 244

1 $f(x) = x^2$

2a Er is geen symmetrie in een verticale lijn.
b Alle raaklijnen hebben een positief hellingsgetal.
c Waarschijnlijk (0, 0).
d $f(x) = x^3$
e -

bladzijde 245

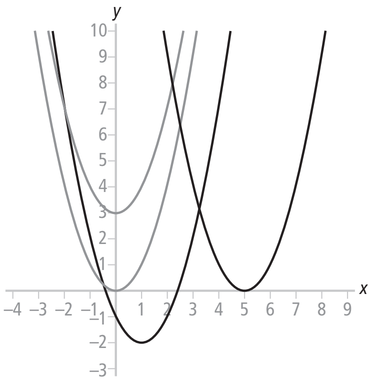
3a Gebruik dat $\frac{dy}{dx} = 2x$ om de hellingsgetallen van de raaklijnen te berekenen.
In (0, 0) is de helling 0 en is $y = 0$ de raaklijn.
In (1, 1) is de helling 2 en is de vergelijking van de raaklijn $y = 2x - 1$
In (–1, 1) is de helling –2 en is de vergelijking van de raaklijn $y = -2x - 1$
In (2, 4) is de helling 4 en is de vergelijking van de raaklijn $y = 4x - 4$
In (–2, 4) is de helling –4 en is de vergelijking van de raaklijn $y = -4x - 4$
b In $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ is de helling 1 en is de vergelijking van de raaklijn $y = x - \frac{1}{4}$
c In $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ is de helling –1 en is de vergelijking van de raaklijn $y = -x - \frac{1}{4}$
d In (a, a^2) is de helling $2a$ en dus is de vergelijking van de raaklijn $y = 2a(x - a) + a^2$
Haakjes wegwerken geeft $y = 2ax - 2a^2 + a^2$ en dus $y = 2ax - a^2$

4a $a = -2$ invullen in $y = 2ax - a^2$ geeft de vergelijking $y = -4x - 4$
b Ja, dat is bij opdracht 3d aangetoond.
c Uit $6{,}02x - 9{,}0601 = 6x - 9$ volgt $0{,}02x = 0{,}0601$ dus $x = 3{,}005$ en
$y = 6 \cdot 3{,}005 - 9 = 9{,}03$ Dus is het snijpunt van de raaklijnen $(3{,}005;\ 9{,}03)$.
Op de parabool ligt het punt $(3{,}005;\ 3{,}005^2) = (3{,}005;\ 9{,}030025)$.
Beide punten liggen slechts 0,000025 van elkaar verwijderd.
d Voor $a = 8{,}1$ is de raaklijn $y = 16{,}2x - 8{,}1^2 = 16{,}2x - 65{,}61$ en voor $a = 8$ is de raaklijn $y = 16x - 8^2 = 16x - 64$
Het snijpunt volgt uit $16{,}2x - 65{,}61 = 16x - 64$ dus $x = \frac{1{,}61}{0{,}2} = 8{,}05$ en
$y = 16 \cdot 8{,}05 - 64 = 64{,}8$
Dus is $(8{,}05;\ 64{,}8)$ het snijpunt van de raaklijnen.
Op de parabool ligt $(8{,}05;\ 8{,}05^2) = (8{,}05;\ 64{,}8025)$.
Beide punten liggen slechts 0,0025 van elkaar.

bladzijde 246

5a De grafiek van $y = x^2 + 4$ ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$ door deze 4 omhoog te schuiven.
b Je vindt de x-coördinaat van de top door het kwadraat 0 te stellen.
De toppen zijn dan: $(-2, 0)$; $(2, 0)$; $(0, 2)$ en $(-3, -2)$.

c



d De raaklijn heeft voor deze vier parabolen steeds als vergelijking $y = y_{\text{TOP}}$
Dus geldt: $y = 0$; $y = 3$; $y = -2$ en $y = 0$

6a Vanwege symmetrie moet gelden $x_{\text{TOP}} = 1$
De lijn $y = -2$ is de raaklijn aan de top dus $y_{\text{TOP}} = -2$
Dus is $(1, -2)$ de top van de parabool.

b $y = (x-1)^2 - 2$

c De niet-horizontale raaklijnen zijn anders.

d Onderzoek met de schuifparameter p of $y = p(x-1)^2 - 2$ voldoet. Dan blijkt $p = 0,5$ te voldoen.

e Onderzoek van $y = p(x-2)^2 + 7$ geeft $p = -2$

7a Het tekenen van veel raaklijnen geeft een beeld van de parabool waaraan al deze raaklijnen raken. Neem daartoe $a = -5$ en stapjes 0,2. En plot 50 raaklijnen.

b $f(x) = -2x^2 + 1$ lijkt te voldoen.
Controle:
In $(a, -2a^2 + 1)$ is de helling $-4a$ en is de vergelijking van de raaklijn:
$y = -4a(x-a) - 2a^2 + 1$
Dit kun je herleiden tot $y = -4ax + 2a^2 + 1$, de gegeven familie raaklijnen.

bladzijde 247

8a Toenemend stijgend en naar links lijkt er een horizontale asymptoot te zijn.

b Een exponentiële functie.

c Plotten van $y = p^x$ met schuifparameter p laat zien dat $p = 2$ voldoet.

d 3 omhoog als je let op de asymptoot. Maar ook moet de grafiek naar rechts.

e Plotten van $y = q \cdot 2^x + 3$ met schuifparameter q laat zien dat $q = 0,5$ voldoet.
Dus is de gezochte functie $f(x) = 0,5 \cdot 2^x + 3 = 2^{x-1} + 3$

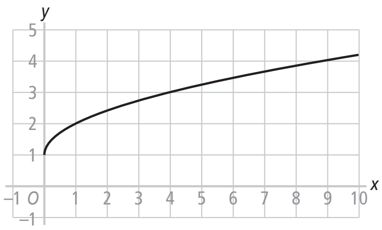
9a $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b In het punt $(a, \frac{1}{a})$ is de helling $-\dfrac{1}{a^2}$ en is de formule voor de raaklijn
$y = -\dfrac{1}{a^2}(x-a) + \dfrac{1}{a}$
Dit kun je herleiden tot $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$
Kies voor a enkele waarden om formules voor meer raaklijnen te vinden.

10a Raaklijnen met in het begin vrij grote positieve hellingsgetallen en hellingsgetallen die positief blijven maar wel steeds kleiner worden.

b $f(x) = \sqrt{x}$

c



d 1 omhoog schuiven.

e Gebruik de schuifparameter p in $y = \sqrt{x} + p$

Dan blijkt dat $f(x) = \sqrt{x} + 1$ voldoet.

11a Voor $a = 1$ is de formule niet gedefinieerd.

b Plotten van veel raaklijnen laat zien om welke grafiek het gaat.

Daarna vind je met de schuifparameter p in $y = p\sqrt{(x-1)}$ dat $p = 2$ voldoet.

Dus is $f(x) = 2\sqrt{(x-1)}$ de gezochte functie.

Verdieping - Geluid

bladzijde 248

1a periode $=\dfrac{2\pi}{200\pi}=\frac{1}{100}$ dus één trilling duurt 0,01 seconde

frequentie $=\frac{1}{0{,}01}=100$ Hertz

b periode $=\dfrac{1}{\text{frequentie}}=\frac{1}{440}=0{,}0023$ seconde

$y=0{,}6\sin(880\pi t)$

c je leest dan van $y=\sin(2\pi\cdot 320t)$ direct de frequentie af: 320 Hertz

bladzijde 249

2a Het volume wordt twee keer zo hoog maar de frequentie blijft gelijk.

b Het volume is lager dan bij opdracht a maar de toonhoogte blijft gelijk.

c De toonhoogte blijft gelijk; het volume varieert tussen 0 en 2 keer die van één stemvork.

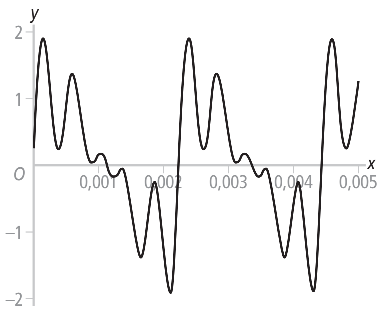
bladzijde 250

3a $B_2=0{,}2\sin(2\pi\cdot 1320t)$

$B_3=0{,}6\sin(2\pi\cdot 1760t)$

$B_4=0{,}5\sin(2\pi\cdot 2200t)$

b



4 $(1+k)\cdot 110=20000$

$1+k=181$ dus $k=180$

boventonen met $k>180$ zijn niet meer hoorbaar

5a Het volume verandert voortdurend en geleidelijk tussen hard en (zeer) zacht.

b 5 Hertz

c Het verschil van de frequenties van de twee trillingen die de zweving veroorzaken.

6a De periode is gelijk maar de vorm is sterk verschillend.

b De gelijkenis met de blokgolf wordt steeds groter.

c Alleen de boventonen met even k komen voor.

De amplitude gaat met $\dfrac{1}{1+k}$

d $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\frac{1}{9}\sin(9x)+.....$

De regelmaat nog verder voortzetten levert een zeer goede benadering van de blokgolf.

bladzijde 251

7a voor x op $[0;\ 0{,}5]$

b voor x op $[0,\ 1]$

voor x op $[0;\ 1{,}5]$

voor x op $[0;\ 2{,}8]$

c $y = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^9}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \ldots\ldots$

De regelmaat nog verder voortzetten geeft een zeer goede benadering van de sinusoïde.

8a $3{,}2\cdot 10^{-6} = \frac{P_{\text{bron}}}{4\pi\cdot 70^2}$ geeft $P_{\text{bron}} = 3{,}2\cdot 10^{-6}\cdot 4\pi\cdot 70^2 = 0{,}197$ Watt

b $100 = \frac{0{,}197}{4\pi\cdot 100r^2}$

dus $r^2 = \frac{0{,}197}{4\pi\cdot 100}$

$r = \sqrt{0{,}000157} = 0{,}013 \text{ m } = 1{,}3 \text{ cm}$

c $10^{-12} = \frac{0{,}197}{4\pi r^2}$

$r = \sqrt{1{,}5568\cdot 10^{10}} = 125000 \text{ m} = 125 \text{ km}$

9a $10^{-12} = \frac{20000}{4\pi r^2}$

$r = 39894$ km (onrealistisch, omdat nog geen rekening gehouden is met energieverlies)

b groeifactor = 0,99 bij 1% afname per meter

c $Y1 = 0{,}99\ \hat{}\ X\cdot 20000 / (4\pi X^2)$

$Y2 = 10\ \hat{}\ {-12}$

intersect geeft $r = 1972$ m ; deze uitkomst is realistisch!