Extra oefening bij hoofdstuk 1

1a Van $2^t = 10$ is de oplossing $t = {}^2\log 10$.
Van $5^t = 8$ is de oplossing $t = {}^5\log 8$.
Van $4^t = 1000$ is de oplossing $t = {}^4\log 1000$.

b De vergelijking $3^x = 12$ heeft als oplossing $x = {}^3\log 12$.

c De vergelijking $9^x = 5$ heeft als oplossing $x = {}^9\log 5$.

d De groeifactor is $\frac{100-15}{100} = 0{,}85$, dus er moet gelden $0{,}85^t = 0{,}25$.
Deze vergelijking heeft als oplossing $t = {}^{0,85}\log 0{,}25 = \frac{\log 0{,}25}{\log 0{,}85} \approx 8{,}53$ uur.

e Dan moet gelden $1{,}25^t = 2$ dus $t = {}^{1,25}\log 2 = \frac{\log 2}{\log 1{,}25} \approx 3{,}1$ maand.
De verdubbelingstijd is 3,1 maand.

2a $3^t = 18$ geeft $t = {}^3\log 18 = \frac{\log 18}{\log 3} \approx 2{,}63$

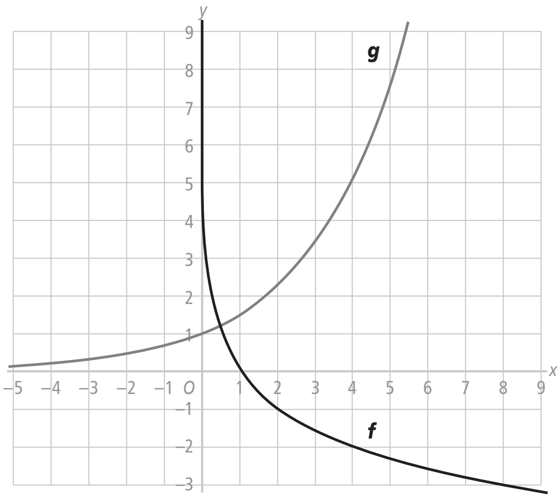
b $23{,}4 \cdot 1{,}02^t = 30$ geeft $1{,}02^t = \frac{30}{23{,}4}$ dus $t = {}^{1,02}\log(\frac{30}{23{,}4}) \approx 12{,}55$.

c Uit $1{,}085^{2t+1} = 3$ volgt :
$2t + 1 = {}^{1,085}\log 3 \Rightarrow 2t = -1 + {}^{1,085}\log 3 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,{}^{1,085}\log 3 \approx 6{,}23$.

d ${}^4\log x = -1{,}2$ dus $x = 4^{-1,2} \approx 0{,}19$.

e $1 - \log x = -0{,}6$ dus $\log x = 1{,}6$ en $x = 10^{1,6} \approx 39{,}81$.

3a



b Het domein van f is $\langle 0, \rightarrow\rangle$ en het bereik is $\mathbb{R}$.
Het domein van g is $\mathbb{R}$ en het bereik is $\langle 0, \rightarrow\rangle$.
De grafiek van f heeft de y-as als verticale asymptoot en de grafiek van g heeft de x-as als horizontale asymptoot.
De grafiek van f snijdt de x-as in het punt $(1,0)$ en de grafiek van g snijdt de y-as in het punt $(0,1)$.

c In de plot vind je het snijpunt van de grafieken van f en g : $(0{,}44; 1{,}19)$.

d Plot de lijn met vergelijking $y = 2$. Het snijpunt met de grafiek van f is het punt $A(0{,}25; 2)$. Het snijpunt met de grafiek van g is het punt $B(1{,}71; 2)$.
Dus is de lengte van het lijnstuk AB gelijk aan $1{,}71 - 0{,}25 = 1{,}46$.

4a Dan geldt dat $g^{87,4} = 0,5$, dus $g = (0,5)^{\frac{1}{87,4}} \approx 0,9921$ per jaar.
Na 10 jaar geldt $0,9921^{10} \approx 0,9238$. Dat wil zeggen dat de groei afneemt met $(1 - 0,9238) \times 100\% = 7,62\%$.

b De vergelijking is $0,9921^t = 0,2$ dus $t = {}^{0,9921}\log 0,2 \approx 203$ jaar.

c De vergelijking is $0,9921^t = 0,05$ dus $t = {}^{0,9921}\log 0,05 \approx 378$ jaar.

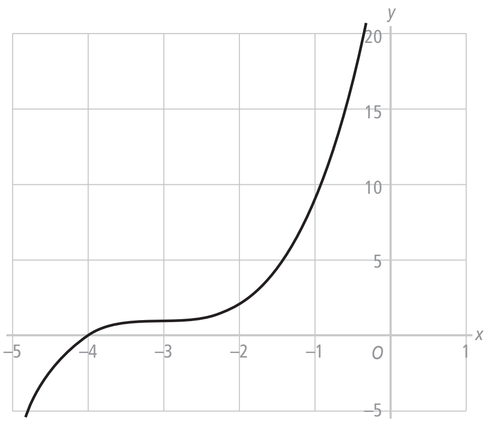
5a Vul in $T = 24$ en de vergelijking wordt $N = 154 \cdot 0,896^{37-24} = 154 \cdot 0,896^{13} \approx 36,94$ hartslagen per minuut.

b Vul in $N = 100$, dus $100 = 154 \cdot 0,896^{37-T}$. Daaruit volgt dat $0,896^{37-T} = \frac{100}{154}$, dus $37 - T = {}^{0,896}\log(\frac{100}{154}) \approx 4 \Rightarrow T \approx 33$ °C.

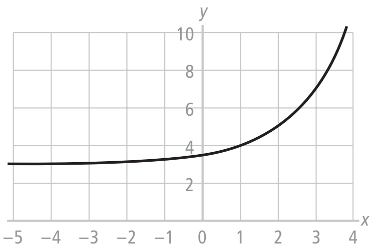
Extra oefening bij hoofdstuk 2

1a *f*: verschuif de grafiek van $y = x^3$ drie eenheden naar links en één eenheid naar boven.
g: verschuif de grafiek van $y = 2^x$ één eenheid naar rechts en drie eenheden naar boven.
h: verschuif de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ vijf eenheden naar rechts, vermenigvuldig ten opzichte van de x-as met factor twee en schuif dan drie eenheden naar boven.

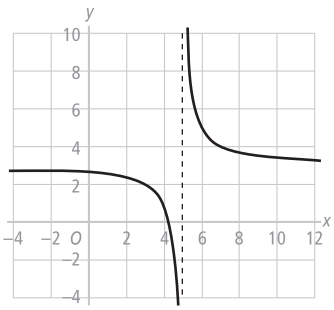
b



De grafiek van *f* gaat door $(-4, 0)$ en $(0, 28)$ en heeft een horizontale raaklijn in het punt $(-3, 1)$.



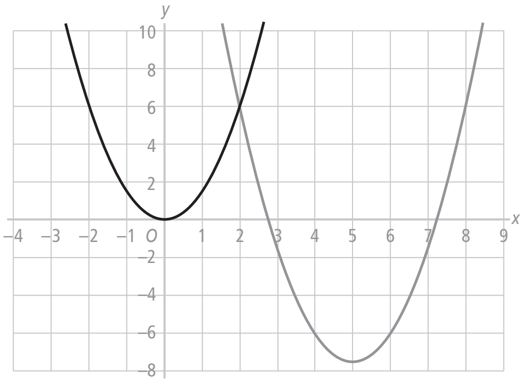
De grafiek van *g* gaat door $(0, 3\frac{1}{2})$ en $(1, 4)$ en heeft de lijn $y = 3$ als horizontale asymptoot.



De grafiek van *h* gaat door $(0, 2\frac{3}{5})$ en $(4\frac{1}{3}, 0)$ en heeft verticale asymptoot $x = 5$ en horizontale asymptoot $y = 3$ als asymptoten.

2a $y = -2(x+1)^2 + 3$ en $y = 2\sin\frac{2}{5}\pi(x-1)$.

3a



b De top is het punt ($(5, -7\frac{1}{2})$ dus vijf eenheden naar rechts en $7\frac{1}{2}$ eenheid naar beneden schuiven.

c $g(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 15x + 30 = 1\frac{1}{2}(x^2 - 10x) + 30 = 1\frac{1}{2}(x^2 - 10x + 25 - 25) + 30 =$
$1\frac{1}{2}\{(x-5)^2 - 25\} + 30 = 1\frac{1}{2}(x-5)^2 - 12\frac{1}{2} + 30 = 1\frac{1}{2}(x-5)^2 - 7\frac{1}{2}$

4a $f_2(x) = \cos 2x$ heeft periode π en gaat door $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$, dus moet $\sin x$ ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd worden en dan nog $\frac{1}{4}\pi$ naar links schuiven.

b De grafiek van f_{-1} ontstaat door de grafiek van $y = \sin x$ over $\frac{1}{2}\pi$ eenheden naar links te schuiven.

c Je moet dan de grafiek van $\cos x$ met $\frac{1}{4}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as , dus $b = 4$.

d Je moet dan de grafiek van $\cos x$ met 16 vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as , dus $b = \frac{1}{16}$.

5a k : spiegelen in de x-as en dan twee eenheden naar boven schuiven.
m: vier eenheden naar rechts schuiven en verticaal vermenigvuldigen met factor 4.
n: $n(x) = \sqrt{-(x-3)}$, dus spiegelen in de y-as en drie eenheden naar rechts schuiven.
p: $p(x) = 1 + 3\sqrt{2(x+1)}$, dus horizontaal vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{2}$, dan één eenheid naar links schuiven. Vervolgens verticaal vermenigvuldigen met drie en één eenheid naar boven schuiven want.

b s: $(0,0)$; k: $(0,2)$; m: $(4,0)$; n: $(3,0)$; p: $(-1,1)$.

c Er wordt gespiegeld in de y-as.

Oefentoets bij hoofdstuk 1 en 2

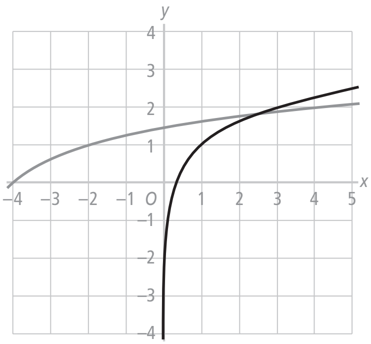
1a $3^{2t-1} = 9 \Rightarrow 2t - 1 = {}^{3}\log 9 \Rightarrow 2t - 1 = 2 \Rightarrow t = 1\frac{1}{2}$.

b $3 + {}^{\frac{1}{2}}\log x = 1 \Rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x = -2 \Rightarrow x = (\frac{1}{2})^{-2} = (2^{-1})^{-2} = 2^2 = 4$.

c $2 \cdot {}^{3}\log(4x+5) = 8 \Rightarrow {}^{3}\log(4x+5) = 4 \Rightarrow 4x+5 = 3^4 = 81 \Rightarrow 4x = 76 \Rightarrow x = 19$.

d $100 \cdot 5^{1+x} = 4 \Rightarrow 5^{1+x} = 0{,}04 = \frac{1}{25} = 5^{-2} \Rightarrow 1 + x = -2 \Rightarrow x = -3$.

2a



b Het domein van de functie *f* is $\langle 0, \rightarrow \rangle$ en het domein van *g* is $\langle -5, \rightarrow \rangle$.

c $1 + {}^{3}\log x = 0$ geeft ${}^{3}\log x = -1$ dus $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.
${}^{3}\log(x+5) = 0$ geeft $x + 5 = 3^0 = 1$ dus $x = -4$.
Het nulpunt van *f* is dus $x = \frac{1}{3}$ en het nulpunt van g is $x = -4$.

d Je lost de vergelijking $1 + {}^{3}\log x = {}^{3}\log(x+5)$ op.
Vervang 1 in deze vergelijking door ${}^{3}\log 3$. Je krijgt ${}^{3}\log 3 + {}^{3}\log x = {}^{3}\log(x+5)$.
Daaruit volgt dat ${}^{3}\log 3x = {}^{3}\log(x+5)$, dus $3x = x + 5$, $2x = 5$ en $x = 2\frac{1}{2}$.
De *y*-coördinaat van het snijpunt is gelijk aan ${}^{3}\log(2\frac{1}{2} + 5) = {}^{3}\log 7\frac{1}{2}$.
Het snijpunt heeft dus de coördinaten $(2\frac{1}{2},\ {}^{3}\log 7\frac{1}{2})$.

e Het snijpunt van $y = 2$ met de grafiek van *f* volgt uit $1 + {}^{3}\log x = 2$. Daaruit volgt ${}^{3}\log x = 1$, dus $x = 3$. Het snijpunt heeft dus de coördinaten $(3,\ 2)$.
Het snijpunt van de grafiek van g met de lijn $y = 2$ bereken je door op te lossen ${}^{3}\log(x+5) = 2$. Je vindt $x + 5 = 3^2 = 9$ en $x = 4$. Het snijpunt heeft dus de coördinaten $(4, 2)$.

3a $f(x) = 9x^2 + 2 = 3x \cdot 3x + 2 = (3x)^2 + 2$.

b De standaardgrafiek is de grafiek van $y = x^2$. De grafiek van *f* ontstaat uit die van de standaardgrafiek door een verticale vermenigvuldiging met factor 9 gevolgd door een verschuiving van twee eenheden naar boven. Een andere mogelijkheid is om op de standaardgrafiek een horizontale vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{3}$ toe te passen en vervolgens een verschuiving van twee eenheden naar boven.

c Je past op de top $(0, 0)$ van de standaardgrafiek de transformaties toe uit opdracht b en je vindt dat de top van de grafiek van *f*: $(0, 2)$.

d Dan moet gelden dat $f'(x) = 0$, dus $18x = 0$. Je vindt $x = 0$ en $y = f(0) = 2$.

4a Uit de standaardgrafiek van $y = \dfrac{1}{x}$ door deze één eenheid naar links te verschuiven en vervolgens een verticale vermenigvuldiging met factor 3 toe te passen.

b Als je het punt $(3, \frac{1}{3})$ één eenheid naar links verschuift, krijg je het punt $(2, \frac{1}{3})$. Vervolgens pas je een verticale vermenigvuldiging toe met factor drie door de *y*-coördinaat met 3 te vermenigvul-digen. Je krijgt het punt $(2, 1)$.

c Door de beide genoemde transformaties gaat de grafiek van f over in de grafiek van g met $g(x) = a \cdot \dfrac{3}{(x+b)+1} = \dfrac{3a}{x+(b+1)}$. Als de grafiek van g een verticale asymptoot $x = -6$ heeft,
Dan geldt $b + 1 = 6$, dus $b = 5$. Bovendien moet het punt $(9, \frac{1}{2})$ op de grafiek van g liggen, dus $g(9) = \frac{1}{2}$. Daaruit volgt dat $\dfrac{3a}{9+6} = \frac{1}{2}$, dus $3a = 7\frac{1}{2}$ en $a = 2\frac{1}{2}$.

5a De grafiek van de standaardfunctie $y = \sin x$ wordt verticaal met 3 en horizontaal met $\frac{1}{4}$ vermenigvuldigd om de grafiek van $f_{3,4}$ te krijgen.

b De amplitude is 5 dus $a = 5$. De periode is gelijk aan $\dfrac{2\pi}{b} = \pi$, dus $b = 2$.

c De amplitude is π dus $a = \pi$. De periode is gelijk aan $\dfrac{2\pi}{b} = 5$, dus $b = \frac{2}{5}\pi$.

6a Door de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 2 ontstaat de grafiek van $y = {}^5\log \frac{1}{2}x$. Door de verschuiving van 4 eenheden naar links krijg je de grafiek van g met het voorschrift $g(x) = {}^5\log \frac{1}{2}(x+4)$.

b Als de volgorde van de transformaties verandert , krijg je door de verschuiving van vier eenheden naar links de grafiek van $y = {}^5\log(x+4)$ en vervolgens door de horizontale vermenigvuldiging met factor 2 ontstaat de grafiek van $y = {}^5\log(\frac{1}{2}x+4)$.

c De beeldgrafiek van f hoort bij het voorschrift $f(x) = -2 + {}^5\log \frac{1}{p}x = {}^5\log x$.
Als je de vergelijking oplost, krijg je ${}^5\log \frac{1}{p}x = {}^5\log x + 2$. Het getal 2 kun je vervangen door ${}^5\log 25$, dus ${}^5\log \frac{1}{p}x = {}^5\log 25x$. Daaruit volgt dat $\dfrac{1}{p} = 25$, dus $p = \frac{1}{25}$.

7a Vul in $h = 180$, dus $t = -4{,}1 \cdot \log(\frac{10}{180} - 0{,}04) = -4{,}1 \cdot -1{,}81 = 7{,}4$. Dus na 7 weken en drie dagen.

b Vul in $t = 12$ en je krijgt $12 = -4{,}1 \cdot \log(\dfrac{10}{h} - 0{,}04)$. Dus $\log(\dfrac{10}{h} - 0{,}04) = \dfrac{12}{-4{,}1} \approx -2{,}93$.
$\dfrac{10}{h} - 0{,}04 \approx 10^{-2{,}93} \approx 0{,}00117$, dus $\dfrac{10}{h} \approx 0{,}04117$ en $h \approx \dfrac{10}{0{,}04117} \approx 243$ cm.

c De hoogte van de zonnebloemen op het tijdstip $t = 0$, vind je door op te lossen
$-4{,}1 \cdot \log(\dfrac{10}{h} - 0{,}04) = 0$, dus $\dfrac{10}{h} - 0{,}04 = 1$, $\dfrac{10}{h} = 1{,}04$ en $h = \dfrac{10}{1{,}04} \approx 9{,}6$ cm.

d Het domein wordt bepaald door de waarden van h waarvoor geldt dat $\dfrac{10}{h} - 0{,}04 > 0$.
Oplossen geeft $\dfrac{10}{h} > 0{,}04$, dus $h < \dfrac{10}{0{,}04} = 250$.

Extra Oefening bij hoofdstuk 3

1a $f'(x)=6x^2-8x$, de exacte helling in het punt met $x=4$ is dus $f'(4)=64$.

b $h(x)=4\cdot x^{-1}+3$, dus $h'(x)=-4x^{-2}=\dfrac{-4}{x^2}$. De exacte helling in het punt met $x=4$ is $h'(4)=-\frac{1}{4}$.

c $k(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}$, dus $k'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+-1\cdot x^{-2}=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}$.

De exacte helling in het punt met $x=4$ is gelijk aan $k'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}$.

2a $f'(x)=3x^2-3x$, dus de helling van de raaklijn in het punt $(0,3)$ is gelijk aan $f'(0)=0$.
De vergelijking van de raaklijn is $y=3$.

b $f'(x)=0$, dus $3x^2-3x=0\Rightarrow 3x(x-1)=0\Rightarrow x=0$ of $x=1$. Met behulp van een plot van de grafiek van *f* vind je dat $f(x)$ een maximum $f(0)=3$ heeft en een minimum $f(1)=2\frac{1}{2}$.

c $f''(x)=6x-3$; $f''(x)=0$ geeft $x=\frac{1}{2}$. De exacte coördinaten van het buigpunt zijn dus $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))=(\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4})$.

3a $f'(x)=2x^2-2x-\frac{2}{3}$

b $f'(x)=0$ geeft $2x^2-2x-\frac{2}{3}=0\Rightarrow\frac{2}{3}(3x^2-3x-1)=0$. Daaruit volgt
$x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}\approx 1{,}26$ of $x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{6}\approx -0{,}26$

c Met behulp van een plot van de grafiek volgt dat $f(x)$ een maximumwaarde heeft namelijk
$f(\dfrac{3-\sqrt{21}}{6})=\frac{2}{3}\cdot(\dfrac{3-\sqrt{21}}{6})^3-(\dfrac{3-\sqrt{21}}{6})^2-\frac{2}{3}\cdot\dfrac{3-\sqrt{21}}{6}\approx 0{,}094$ en een minimumwaarde namelijk
$f(\dfrac{3+\sqrt{21}}{6})=\frac{2}{3}\cdot(\dfrac{3+\sqrt{21}}{6})^3-(\dfrac{3+\sqrt{21}}{6})^2-\frac{2}{3}\cdot\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}\approx -1{,}094$.

d $f(1)=-1$. De coördinaten van het punt zijn $(1,-1)$. De helling van de raaklijn in het punt $(1,-1)$ is gelijk aan $f'(1)=-\frac{2}{3}$.
De vergelijking van de raaklijn is $y=-\frac{2}{3}x+b$. De waarde van b vind je door de co-ordinaten van het punt $(1,-1)$ in te vullen. Je krijgt $-1=-\frac{2}{3}\cdot 1+b$. Daaruit volgt dat $b=-\frac{1}{3}$.
De raaklijnvergelijking is dus $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

e De helling is minimaal in het buigpunt van de grafiek want daar daalt de grafiek het meest.
$f''(x)=4x-2=0$ als $x=\frac{1}{2}$, dus voor $x=\frac{1}{2}$ is de helling minimaal.

4a $h(x)=f(g(x))=f(2x-4)=\sqrt{2x-4}$

b $k(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=2\cdot\sqrt{x}-4$

c $k'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=3\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{3}$, dus als $x=\frac{1}{9}$.

5a $l(x)=(1+2x)^2-2 \Rightarrow l'(x)=2(1+2x)\cdot 2=4(1+2x)=4+8x$

b $g(x)=(x^2-1)^5 \Rightarrow g'(x)=5(x^2-1)^4\cdot 2x=10x(x^2-1)^4$

c $h(x)=(5x-5)^4-\sqrt{3x} \Rightarrow h'(x)=4(5x-5)^3\cdot 5-\dfrac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3=20(5x-5)^3-\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}$

d $k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$, dus

$k'(x)=\sqrt{2}\cdot -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot x\sqrt{x}}=\dfrac{-1}{x\sqrt{2x}}$

6a Elke seconde stroomt er 5 cm^3 in het bakje, in t seconden stroomt er $5t$ cm^3 in het bakje, dus $V=5t$.

b Het volume van het water in het bakje is lengte × breedte × hoogte $=4\times 3\times h=12h$, dus $V=12h$ of $h=\frac{1}{12}V$.

c Uit de formules die bij opdracht a en b zijn opgesteld volgt dat $12h=5t$, dus $h=\frac{5}{12}t$.

d $h'(t)=\frac{5}{12}$; per seconde stijgt de waterhoogte met $\frac{5}{12}$ cm.

Extra oefening bij hoofdstuk 4

1a De benadering van de oppervlakte van het gekleurde gebied met een Riemannsom is

$$0{,}5\cdot\sum_{k=0}^{9} f(0{,}25+0{,}5k)=0{,}5(f(0{,}25)+f(0{,}75)+....+f(4{,}75))=$$

$$=0{,}5(1{,}03125+1{,}28125+1{,}78135+2{,}53125+3{,}53125+4{,}78125+6{,}28125+8{,}03125+$$

$$+10{,}03125+12{,}28125)\ =25{,}78125\ .$$

b Een primitieve functie van $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ is de functie $F(x)=\frac{1}{6}x^3+x$.

De oppervlakte is gelijk aan de integraal $\int_0^5(\frac{1}{2}x^2+1)\mathrm{d}x=F(5)-F(0)=25\frac{5}{6}$.

c De antwoorden bij de opdrachten a en b zijn ongeveer gelijk aan elkaar, dus in dit geval geeft de Riemann-som een goede benadering van de exacte oppervlakte.

2a $f(x)=(x^2-1)^2=(x^2-1)(x^2-1)=x^4-2x^2+1$ dus $F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x+C$.

b $f(x)=-3\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=-3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$, dus $F(x)=-2x^{1\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C=-2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

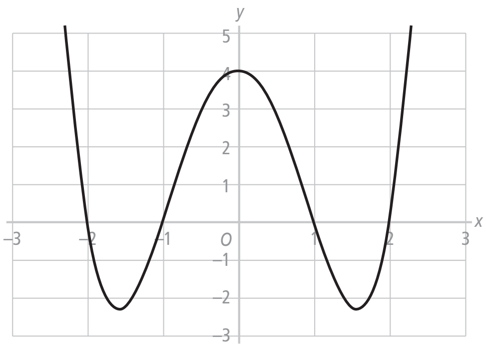
c $f(x)=\dfrac{5}{-2x^2}+1=-2\frac{1}{2}x^{-2}+1$, dus $F(x)=-2\frac{1}{2}\cdot -x^{-1}+x+C=\dfrac{2\frac{1}{2}}{x}+x+C=\dfrac{5}{2x}+x+C.$

d $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}=1-x^{-2}$, dus $F(x)=x+x^{-1}+C=x+\dfrac{1}{x}+C.$

e $f(x)=-\frac{6}{5}\cdot x^{-4}$, dus $F(x)=-\frac{6}{5}\cdot-\frac{1}{3}x^{-3}+C=\dfrac{2}{5x^3}+C.$

f Probeer als primitieve functie $F(x)=a\cdot(1+2x)^4$. Met de kettingregel vind je de afgeleide $F'(x)=a.4\cdot(1+2x)^3.2=8a\cdot(1+2x)^3$. Daaruit volgt dat $8a=1$, dus $a=\frac{1}{8}$. De primitieve functies zijn dus de functies $F(x)=\frac{1}{8}(1+2x)^4+C$.

3a

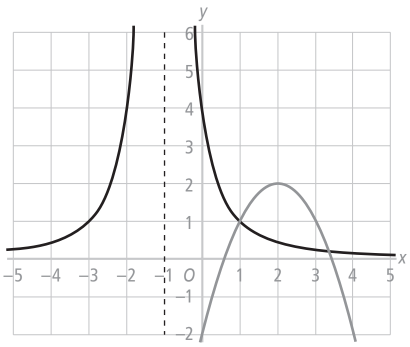


b $(x^2-1)(x^2-4)=0\Rightarrow x^2-1=0$ of $x^2-4=0\Rightarrow\ x^2=1$ of $x^2=4$ dus $x=1,\ x=-1,\ x=2$ of $x=2$.

c $h(x)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$, dus $H(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x+C$.
De oppervlakte van het eerste gebied is gelijk aan de oppervlakte van het derde gebied en deze oppervlakte is

$-\int_{-2}^{-1}h(x)\,\mathrm{d}x=-[\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x]_{-2}^{-1}=-(-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-4)+(-\frac{32}{5}+\frac{40}{3}-8)=\frac{38}{15}-\frac{16}{15}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$ De oppervlakte van het middelste gebied is $\int_{-1}^{1}h(x)\mathrm{d}x=H(1)-H(-1)=\frac{38}{15}--\frac{38}{15}=\frac{76}{15}=5\frac{1}{15}$.

4a



b $f(1)=\dfrac{4}{(1+1)^2}=\dfrac{4}{4}=1$ en $g(1)=-(1-2)^2+2=-1+2=1$. De grafieken van f en g gaan allebei door het punt $(1,1)$.

c De oppervlakte van dit vlakdeel wordt berekend met de volgende integraal:

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\ .$$

$f(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}=4(x+1)^{-2}$; probeer als primitieve functie $F(x)=a\cdot(x+1)^{-1}$.

Dan moet gelden dat $F'(x)=-a(x+1)^{-2}$. Kies dus $a=-4$. Een primitieve is dus

$F(x)=\dfrac{-4}{x+1}$.

$g(x)=-(x-2)^2+2=-(x^2-4x+4)+2=-x^2+4x-2$. Een primitieve is dus

$G(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x$.

De oppervlakte is dus $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-g(x))\mathrm{d}x=$

$(F(1)-G(1))-(F(0)-G(0))=(-2--\frac{1}{3})-(-4-0)=2\frac{1}{3}$.

5a Als k de tijd is die Kees nodig heeft voor de 10 000 meter, dan moet gelden dat

$\displaystyle\int_0^k v_k\mathrm{d}t=10\,000$; $v_k=13{,}2-0{,}0011t$ dus $V_k=13{,}2t-0{,}00055t^2$.

Je moet dus oplossen $13{,}2k-0{,}00055k^2=10\,000$. Met de abc-formule of met de opties van je rekenmachine vind je $k=783{,}13$ seconden.

b Als s de tijd is die Sybrand nodig heeft voor de 10 000 meter dan moet gelden:

$\displaystyle\int_0^s v_s\mathrm{d}t=10\,000$; $v_s=12{,}5+0{,}0006t$ en $V_s=12{,}5t+0{,}0003t^2$.

Er moet dus gelden dat $12{,}5s+0{,}0003s^2=10\,000$. Met de abc-formule of met de opties van de rekenmachine vind je $d=785{,}20$ seconden. Het verschil in eindtijden is dus ongeveer 785,20 – 783,13 = 2,07 seconden.

c Kees en Sybrand liggen na a seconden gelijk als geldt: $\displaystyle\int_0^a v_k\mathrm{d}t=\int_0^a v_s\mathrm{d}t$

Dus moet gelden $13{,}2a-0{,}00055a^2=12{,}5a+0{,}0003a^2$.

$0=0{,}00085a^2-0{,}7a=a(0{,}00085a-0{,}7)$. Dus $a=0$ of $a=\frac{0{,}7}{0{,}00085}\approx 823{,}53$.

Als ze langer blijven doorschaatsen, komen ze elkaar na 823,53 seconden weer tegen, maar dan schaatsen ze meer dan 10 kilometer. Tijdens de rit liggen de schaatsers nooit gelijk, maar ligt Kees steeds voor.

Oefentoets bij hoofdstuk 3 en 4

1a $f(x)=x^2+\sqrt{2x+4}$, $f'(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{2x+4}}\cdot 2=2x+\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$.

b $g(x)=\frac{1}{2}(2x+x^2)^4$, $g'(x)=\frac{1}{2}\cdot 4(2x+x^2)^3\cdot(2+2x)=(2x+x^2)^3(4+4x)$.

c $h(x)=4x^{1\frac{1}{2}}+6x^{1\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}$, dus $h'(x)=6x^{\frac{1}{2}}+8x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}=6\sqrt{x}+8\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

d $k(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$, dus $k'(x)=-\frac{1}{4}(x^2+1)^{-1\frac{1}{2}}\cdot 2x=\dfrac{-\frac{1}{2}x}{(x^2+1)^{1\frac{1}{2}}}=\dfrac{-x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

e $l(x)=\dfrac{x^3}{3x}-\dfrac{4x^2}{3x}+\dfrac{3}{3x}=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+x^{-1}$, dus $l'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}-x^{-2}=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}-\dfrac{1}{x^2}$

f $m(x)=(x^2+3)^{1\frac{1}{2}}$, dus $m'(x)=1\frac{1}{2}\cdot(x^2+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\sqrt{x^2+3}$.

2a De grafiek van f gaat door $(0,0)$ betekent dat moet gelden $f(0)=0$, dus $8a+b=0\Rightarrow b=-8a$.
De grafiek van f gaat door $(3,2)$ betekent dat moet gelden $f(3)=2$, dus $-a+b=2\Rightarrow b=2+a$.
Daaruit volgt dat $b=-8a=a+2$, dus $9a=-2$ en $a=-\frac{2}{9}$. Verder geldt $b=-8\cdot -\frac{2}{9}=1\frac{7}{9}$.

b $f'(x)=a\cdot 3(2-x)^2\cdot -1=-3a(2-x)^2$.
De helling van de grafiek in het punt $(3,2)$ is gelijk aan $f'(3)=-3a\cdot(2-3)^2=-3a$. Uit de vergelijking van de raaklijn volgt dat ook geldt $f'(3)=-6$, dus $-3a=-6$ en $a=2$.
De grafiek gaat door $(3,2)$ dus geldt bovendien dat $-a+b=2$. Invullen van $a=2$ geeft dan $b=4$.

3a $f(x)=x(x-4)(x-4)=x^3-8x^2+16x$, dus $f'(x)=3x^2-16x+16$ en $f''(x)=6x-16$.
Uit $f'(x)=0$ volgt $x=\dfrac{16+\sqrt{64}}{6}=4$ of $x=\dfrac{16-\sqrt{64}}{6}=1\frac{1}{3}$.
Met een plot van de grafiek van f volgt dat $f(x)$ een minimumwaarde $f(4)=0$ heeft en een maximumwaarde $f(\frac{4}{3})=\frac{256}{27}=9\frac{13}{27}$.
Er is een buigpunt als $f''(x)=0$, dus als $6x-16=0$ of $x=\frac{8}{3}$. Het buigpunt heeft de coördinaten ($(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3}(\frac{8}{3}-4)^2)=(\frac{8}{3},\ \frac{128}{27})=(2\frac{2}{3},\ 4\frac{20}{27})$.

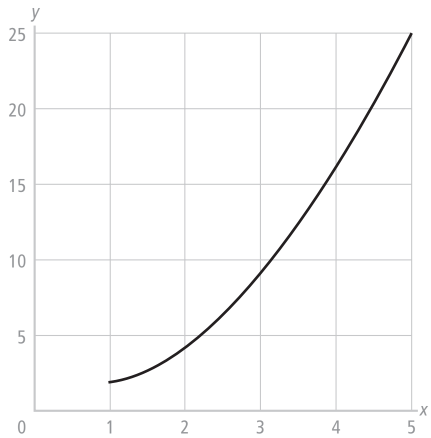
b $g(x)=x^2(x-4)=x^3-4x^2$, dus $g'(x)=3x^2-8x$ en $g''(x)=6x-8$.
Uit $g'(x)=0$ volgt dat $3x(x-\frac{8}{3})=0$, dus $x=0$ of $x=\frac{8}{3}$.
Met behulp van een plot volgt dat $g(x)$ als maximumwaarde $g(0)=0$ en als minimumwaarde $g(-\frac{8}{3})=-\frac{256}{27}=-9\frac{13}{27}$ aanneemt. Er is een buigpunt als $g''(x)=6x-8=0$ dus als $x=\frac{4}{3}$.
Het buigpunt heeft de coördinaten $(\frac{4}{3},\ \frac{16}{9}(\frac{4}{3}-4))=(\frac{4}{3},\ -\frac{128}{27})=(\frac{4}{3},\ -4\frac{20}{27})$.

c $h(x)=x^3(x-4)=x^4-4x^3$, dus $h'(x)=4x^3-12x^2$ en $h''(x)=12x^2-24x$.
Uit $h'(x)=0$ volgt dat $4x^2(x-3)=0$, dus $x=0$ of $x=3$. Met behulp van een plot wordt duidelijk dat $h(3)=-27$ minimumwaarde van $h(x)$ is en dat de grafiek van h ook twee buigpunten heeft nl. het punt $(0,0)$ en het punt $(2,\ -16)$. In $(0,0)$ is dus sprajke van een buigpunt met horizontale raaklijn.

d $k(x)=x^2(x-4)(x-4)=x^4-8x^3+16x^2$ dus $k'(x)=4x^3-24x^2+32x$ en $k''(x)=12x^2-48x+32$ Uit $k'(x)=0$ volgt dat $4x(x^2-6x+8)=0$ of $4x(x-2)(x-4)=0$ dus $x=0, x=2$ of $x=4$.
Met behulp van een plot volgt dat $k(0)=k(4)=0$ een minimumwaarde van $k(x)$ is en $k(2)=16$ is een maximumwaarde.

Buigpunten vind je door op te lossen $12x^2 - 48x + 32 = 0$ of $3x^2 - 12x + 8 = 0$. Met de abc-formule volgt er $x = \dfrac{12+\sqrt{48}}{6}$ of $x = \dfrac{12-\sqrt{48}}{6}$. Er zijn dus 2 buigpunten.

4a



b De vier deelintervallen zijn $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ en $[4,5]$. De Riemann-som die hoort bij de middens van de deelintervallen is gelijk aan $f(1,5) + f(2,5) + f(3,5) + f(4,5) = 41,74$.

c $f(x) = x^2 + x^{-2}$, dus $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + -x^{-1} = \frac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{x}$. De exacte oppervlakte is dus gelijk aan

$\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = F(5) - F(1) = (\frac{125}{3} - \frac{1}{5}) - (\frac{1}{3} - 1) = 42\frac{2}{15}$.

d De benadering van opdracht b wijkt $\dfrac{42\frac{2}{15} - 41,74}{42\frac{2}{15}} \times 100\% = 0,93\%$ af van het exacte antwoord bij opdracht c.

5a Probeer als primitieve functie $F(x) = a \cdot (1-2x)^6$. Dan geldt met de kettingregel $F'(x) = 6a(1-2x)^5 \cdot -2 = -12a \cdot (1-2x)^5$. Daaruit volgt dat $-12a = 1$ en dus $a = -\frac{1}{12}$. De primitieven zijn de functies $F(x) = -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + C$.

b $g(x) = \frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}$, dus $G(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\frac{1}{2}} x^{2\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{5}x^2\sqrt{x} + C$.

c $h(x) = \dfrac{x}{2x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, dus $H(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1\frac{1}{2}} x^{1\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + \sqrt{x} + C$.

d $l(x) = \sqrt{5-x} = (5-x)^{\frac{1}{2}}$. Probeer als primitieve functie $L(x) = a \cdot (5-x)^{1\frac{1}{2}}$.

Dan geldt met de kettingregel dat $L'(x) = a \cdot 1\frac{1}{2}(5-x)^{\frac{1}{2}} \cdot -1 = -1\frac{1}{2}a(5-x)^{\frac{1}{2}}$.

Daaruit volgt dat $-1\frac{1}{2}a = 1$ en dus dat $a = -\frac{2}{3}$. De primitieven zijn de functies $L(x) = -\frac{2}{3}(5-x)\sqrt{5-x} + C$.

6a $f(x) = x(x^2+1)\sqrt{x^2+1} = x(x^2+1)^{1\frac{1}{2}}$; probeer als primitieve functie

$F(x) = a \cdot (x^2+1)^{2\frac{1}{2}}$. Dan geldt $F'(x) = 2\frac{1}{2}a \cdot (x^2+1)^{1\frac{1}{2}} \cdot 2x = 5a \cdot x(x^2+1)^{1\frac{1}{2}}$.

Daaruit volgt $5a = 1$ en $a = \frac{1}{5}$. Een primitieve functie van *f* is dus

$F(x) = \frac{1}{5}(x^2+1)^{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)}$.

b De oppervlakte van het gebied V is gelijk aan $\int_0^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(0)$.

Er moet dus gelden dat $\frac{1}{5}(b^2+1)^{2\frac{1}{2}} - \frac{1}{5} = 3\frac{1}{10}$, dus $\frac{1}{5}(b^2+1)^{2\frac{1}{2}} = 3\frac{3}{10}$ en $(b^2+1)^{2\frac{1}{2}} = 16\frac{1}{2}$.

$b^2 + 1 = (16\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}}$ en $b = \sqrt{(16\frac{1}{2})^{\frac{2}{5}} - 1} \approx 1{,}44$.

7a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, dus $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5x$.

$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = (4 - 8 + 10) - (\frac{1}{4} - 1 + 5) = 6 - 4\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$.

b $f(x) = x^{1\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{1\frac{1}{2}} + x^{-1\frac{1}{2}}$, dus $F(x) = \frac{2}{5}x^{2\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = (12\frac{4}{5} - 1) - (\frac{2}{5} - 2) = 11\frac{4}{5} + 1\frac{3}{5} = 13\frac{2}{5}$.

c $f(x) = 4x^{-3} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{x} = 4x^{-3} + \sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}$. Dus

$F(x) = 4\cdot\frac{1}{-2}x^{-2} + \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = -2x^{-2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot x^{\frac{3}{2}} = = \dfrac{-2}{x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot x\sqrt{x} = \dfrac{-2}{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{2x}$.

$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = (-\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}) - (-2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}) = 4\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

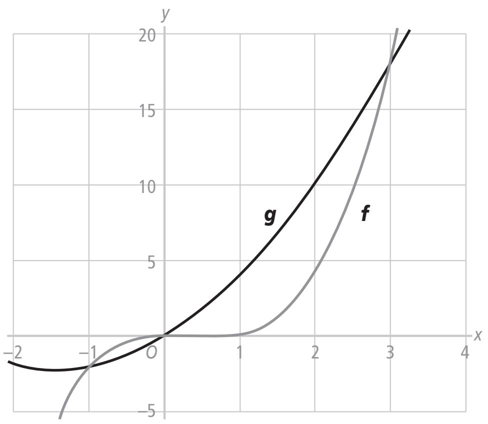
d $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2} = (2x+1)^{-2}$. Dus probeer als primitieve functie $F(x) = a\cdot(2x+1)^{-1}$.

$F'(x) = -a\cdot(2x+1)^{-2}\cdot 2 = -2a\cdot(2x+1)^{-2}$. Daaruit volgt $-2a = 1$, dus $a = -\frac{1}{2}$.

Een primitieve functie van f is dus $F(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-1} = \dfrac{-1}{2(2x+1)}$.

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = -\frac{1}{6} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$.

8



Eerst bereken je de snijpunten van beide grafieken. Je lost op $f(x) = g(x)$, dus
$x^3 - x^2 = x^2 + 3x$. Daaruit volgt $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$, $x(x^2 - 2x - 3) = 0$,
$x(x-3)(x+1) = 0$,
Dus $x = 0$, $x = 3$ of $x = -1$. Er zijn dus drie snijpunten: $(-1, -2)$, $(0, 0)$ en $(3, 18)$.
Primitieve functies van f en g zijn $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$ en $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

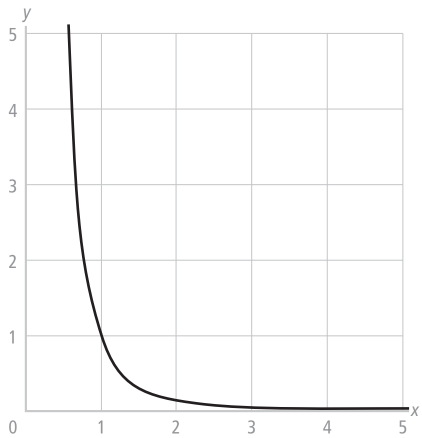
De oppervlakte van het eerste gebied is gelijk aan

$$\int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\,dx = (F(0) - G(0)) - (F(-1) - G(-1)) = (0-0) - (\tfrac{7}{12} - \tfrac{7}{6}) = \tfrac{7}{12}.$$

De oppervlakte van het tweede gebied is gelijk aan

$$\int_{0}^{3} f(x) - g(x)\,dx = (F(3) - G(3)) - (F(0) - G(0)) = (22\tfrac{1}{2} - 11\tfrac{1}{4}) - (0-0) = 11\tfrac{1}{4}$$

9a



b $f(x) = x^{-3}$, dus $F(x) = -\tfrac{1}{2}x^{-2} = \dfrac{-1}{2x^2}$.

Uit $\int_{1}^{p} f(x)\,dx = 0{,}48$ volgt dat $F(p) - F(1) = 0{,}48$. Dit geeft de vergelijking

$\dfrac{-1}{2p^2} - -\tfrac{1}{2} = 0{,}48$ en daaruit volgt $\dfrac{-1}{2p^2} = -0{,}02$, $p^2 = 25$ en dus $p = 5$, want $p > 1$.

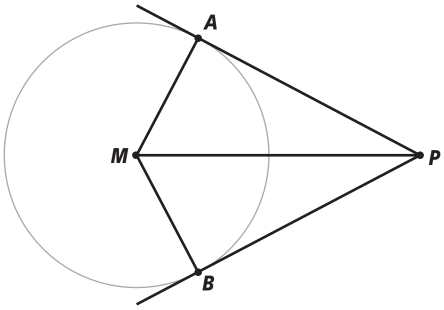
(Opmerking: Als $p \to \infty$ dan $\int_{1}^{p} f(x)\,dx \to \tfrac{1}{2}$)

c $\int_{q}^{1} f(x)\,dx = 99$ geeft $F(1) - F(q) = 99$, dus $-\tfrac{1}{2} - \dfrac{-1}{2q^2} = 99$, $\dfrac{1}{2q^2} = 99\tfrac{1}{2}$, $q^2 = \tfrac{1}{199}$ dus

$q = \sqrt{\tfrac{1}{199}}$ want $0<q<1$ dus de negatieve oplossing voldoet niet.

Extra oefening bij hoofdstuk 5

1



Gegeven: Cirkel met middelpunt M, punt P buiten de cirkel.
PA en PB raken de cirkel in A en B.
Te bewijzen: $|PA| = |PB|$.
Bewijs:

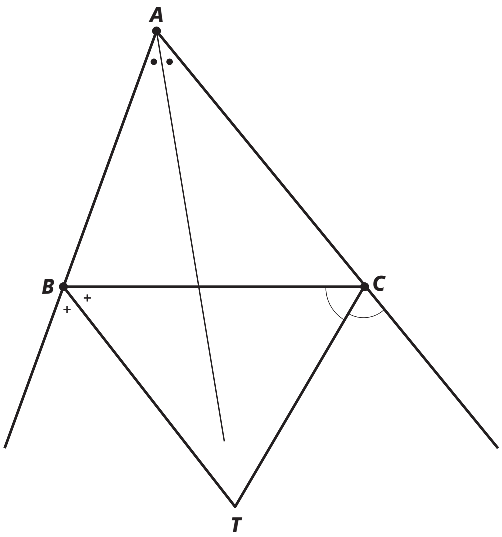
$$\left.\begin{array}{l} \angle PAM = \angle PBM\ (=90^\circ) \\ |PM| = |PM| \\ |MA| = |MB|\ \text{(stralen)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MPA \cong \triangle MPB\ (ZZR) \Rightarrow |PA| = |PB|$$

2 Gegeven: AB is een middellijn en $\angle ABC = \angle BAD$.
Te bewijzen: C, M en D liggen op één lijn.
Bewijs: Teken de hulplijnen CM en DM.

$$\left.\begin{array}{l} \angle MAD = \angle MBC \\ |AM| = |BM| \\ \angle BCM = \angle MBC = \angle MAD = \angle ADM \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MAD \cong \triangle MBC(ZHH) \Rightarrow \angle DMA = \angle CMB$$

$\angle DMA = \angle CMB$ en A, M en B op één lijn geeft C, M en D op één lijn.

3a



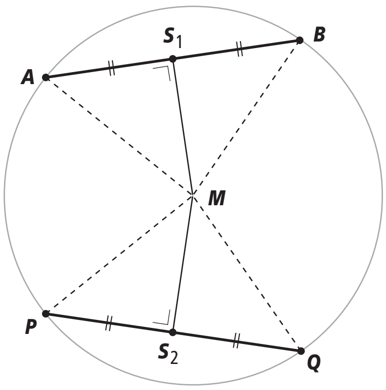
Gegeven: Driehoek ABC en de deellijnen van $\angle A$ en van de buitenhoeken van $\angle B$ en $\angle C$.
Te bewijzen: De drie deellijnen gaan door één punt.
Bewijs: De deellijnen van de buitenhoeken van $\angle B$ en $\angle C$ snijden elkaar in T.
Dan geldt

$$\left.\begin{array}{l} d(T, BC) = d(T, AB) \\ d(T, BC) = d(T, AC) \end{array}\right\} \Rightarrow d(T, AB) = d(T, AC) \Rightarrow T \text{ op de deellijn van } \angle A.$$

Dus gaan de drie deellijnen door één punt.

b Het middelpunt van deze cirkel is het snijpunt S van de deellijn van $\angle C$ en de deellijnen van de buitenhoeken van $\angle A$ en $\angle B$. De straal is de afstand van S tot AB, de gevraagde cirkel is dus $(S, \mathrm{d}(S, AB))$.

4a



Gegeven: Cirkel c met middelpunt M. Op de cirkel de punten A, B, P en Q zodat $|AB| = |PQ|$

Te bewijzen: $\mathrm{d}(M, AB) = \mathrm{d}(M, PQ)$

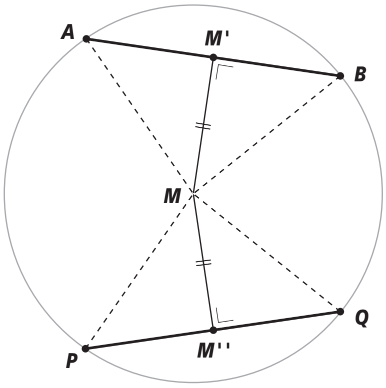
Bewijs: Stel S_1 is het midden van AB en S_2 is het midden van PQ.

$$\left.\begin{array}{l} |MA| = |MP| \\ |MB| = |MQ| \\ |AB| = |PQ| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta MPQ\ (ZZZ)$$

De driehoeken MAB en MPQ zijn congruent dus $\mathrm{d}(M, AB) = |MS_1| = |MS_2| = \mathrm{d}(M, PQ)$.

b Als twee koorden in een cirkel even lang zijn dan zijn de afstanden van het middelpunt tot elk van de koorden gelijk.

c Als in een cirkel de afstanden van het middelpunt tot twee koorden gelijk zijn dan zijn de koorden even lang.



Gegeven: Cirkel met middelpunt M en koorden AB en PQ waarvoor geldt $\mathrm{d}(M, AB) = \mathrm{d}(M, PQ)$.

Te bewijzen: $|AB| = |PQ|$

Bewijs: Stel M' en M'' zijn de middens van de koorden AB respectievelijk PQ.

$$\left.\begin{array}{l} |MM'| = |MM''|\ \text{(gegeven)} \\ |MA| = |MP|\ \text{(straal)} \\ \angle MM'A = \angle MM''P\ (= 90^\circ) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MM'A \cong \triangle MM''P\ (ZZR) \qquad (1)$$

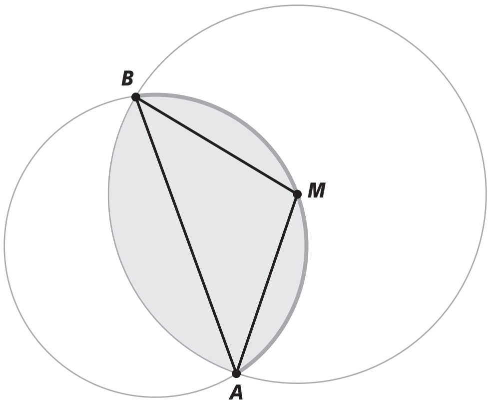
Op dezelfde manier volgt $\triangle MM'B \cong \triangle MM''Q$ (2)

Uit (1) en (2) volgt $|AB| = |PQ|$.

Extra oefening bij hoofdstuk 6

1a Voorpunt M geldt: $\angle AMB = 100^\circ$.

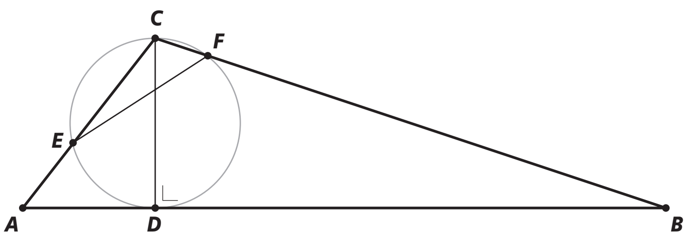
b



Teken de cirkel door A, B en M. De gezochte punten P liggen op boog AMB van deze cirkel. Dit omdat voor elk punt P op deze boog geldt $\angle APB = \angle AMB = 100^\circ$.

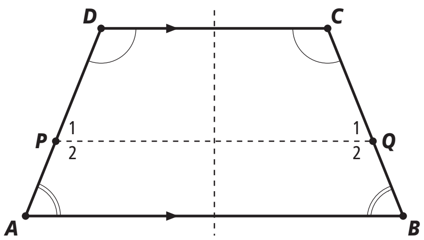
c Zie de figuur bij opdracht b.

2



Gegeven: Driehoek ABC met hoogtelijn CD en een cirkel met middellijn CD.
Te bewijzen: $ABFE$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:
$\angle A = \frac{1}{2}\text{bg } CD - \frac{1}{2}\text{bg } ED = 90^\circ - \frac{1}{2}\text{bg } ED$ (1)
$\angle EFC = \frac{1}{2}\text{bg } EC = \frac{1}{2}(\text{bg } CD - \text{bg } ED) = 90^\circ - \frac{1}{2}\text{bg } ED$ (2)
Uit (1) en (2) volgt $\angle A = \angle EFC$ en dus geldt
$\angle A + \angle EFB = \angle EFC + \angle EFB = 180^\circ \Rightarrow ABFE$ is een koordenvierhoek.

3



Gegeven: Gelijkbenig trapezium $ABCD$ met $AB//CD$. Punt P op AD en Q op BC met $PQCD$ is koordenvierhoek.
Te bewijzen: $ABQP$ is koordenvierhoek.
Bewijs: $ABCD$ gelijkbenig dus $\angle A = \angle B$ en $\angle C = \angle D$.
Dan is $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. (1)
$PQCD$ koordenvierhoek dus $\angle P_1 + \angle C = 180^\circ$. (2)
Uit (1) en (2) volgt $\angle A = \angle P_1$.
Omdat $\angle A = \angle B$ volgt dat $\angle B + \angle P_2 = \angle A + \angle P_2 = \angle P_1 + \angle P_2 = 180^\circ$
En dus is $ABQP$ een koordenvierhoek.

4a Evenwijdige lijnen in een cirkel geeft gelijke koorden tussen de evenwijdige lijnen.

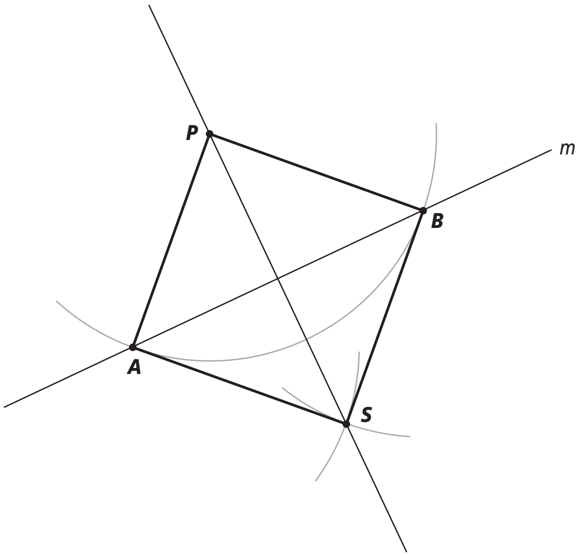
b De middellijn verdeelt de koordenvierhoek in twee rechthoekige driehoeken.

c Bij een parallellogram zijn de overstaande zijden even lang en evenwijdig. Je kunt evenwijdigheid gebruiken.

d Gegeven: Driehoek ABC met omgeschreven cirkel en hoogtelijnen BP en CQ. Verder is AR een middellijn.
Te bewijzen: $CHBR$ is een parallellogram.
Bewijs: $\angle ACR = 90^\circ$ want AR is middellijn. Ook is $\angle APB = 90^\circ$ (BP is hoogtelijn).
Dus is $BP//CR$ en daarmee zijn in vierhoek $CHBR$ twee overstaande zijden evenwijdig.
Omdat $\angle ABR = 90^\circ$ (AR is middellijn) en $\angle BQC = 90^\circ$ (CQ is hoogtelijn) geldt ook $CQ//BR$.
Dus is in $CHBR$ ook het andere paar overstaande zijden evenwijdig.
Daarmee is $CHBR$ een parallellogram.

Oefentoets bij hoofdstuk 5 en 6

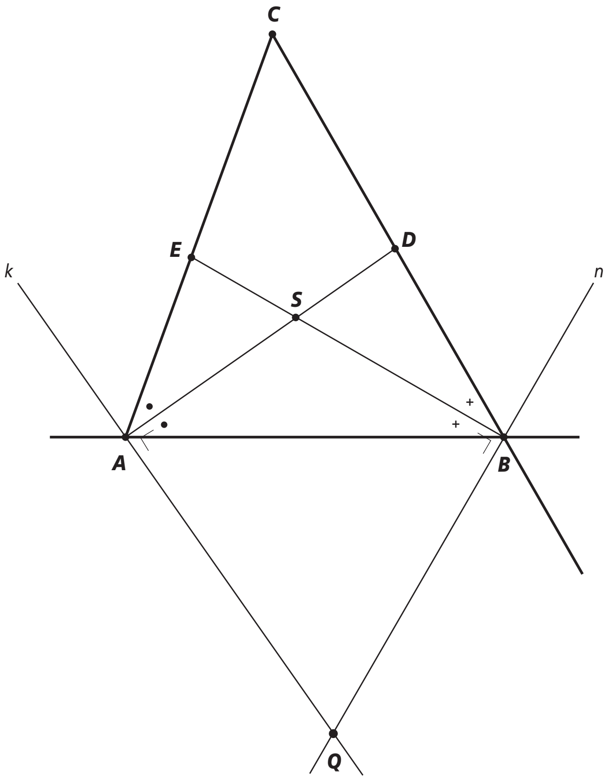
1a



b $|PA| = |AS| = |SB| = |BP| = r \Rightarrow PASB$ is een ruit $\Rightarrow PS \perp AB = m$.

c In dat geval wordt $PASB$ een vlieger en ook dan staan de diagonalen loodrecht op elkaar.

2a



b De deellijn van een hoek is de meetkundige plaats van de punten met gelijke afstanden tot de benen van die hoek.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{d}(S,AB) = \mathrm{d}(S,AC) \\ \mathrm{d}(S,AB) = \mathrm{d}(S,BC) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}(S,AC) = \mathrm{d}(S,BC) \Rightarrow S \text{ op deellijn van } \angle C.$$

c Zie de tekening bij opdracht a.

d k is de deellijn van de buitenhoek bij A, dus van de hoek gevormd door de lijnen AB en AC. Voor een punt P op k geldt: $\mathrm{d}(P,AB) = \mathrm{d}(P,AC)$.

e Ook voor een punt R op lijn n geldt $\mathrm{d}(R, AB) = \mathrm{d}(R, BC)$.
Als Q het snijpunt is van k en n dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{d}(Q, AB) = \mathrm{d}(Q, AC) \\ \mathrm{d}(Q, AB) = \mathrm{d}(Q, BC)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{d}(Q, AC) = \mathrm{d}(Q, BC) \Rightarrow Q \text{ op deellijn van } \angle C.$$

Dus gaan de lijnen k, n en CS door één punt Q.

f De cirkel met middelpunt Q en straal $\mathrm{d}(Q, AB)$ raakt de zijden AB, AC en BC.

3a Het middelpunt moet je dan vinden door de middelloodlijnen van BC en AD die elkaar op BD moeten snijden.

b $\angle SAB = 40^\circ \Rightarrow \text{bg } BC = 80^\circ$ en $\angle SBC = 50^\circ \Rightarrow \text{bg } DC = 100^\circ$
Dus is $\text{bg } BCD = \text{bg } BC + \text{bg } CD = 80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$ en dus is BD een middellijn.
Dus is het midden van BD het middelpunt van de cirkel.

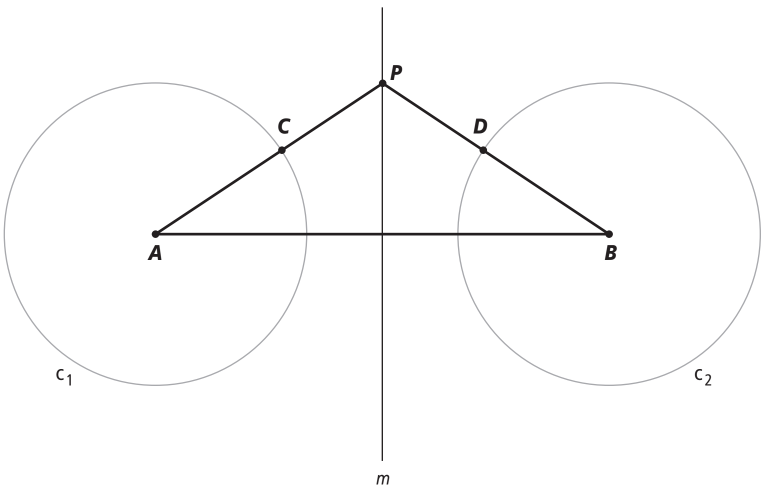
4 Vierhoek $ADFB$ is een koordenvierhoek $\Rightarrow \angle BFD + \angle BAD = 180^\circ$ (1)
$\angle BAD + \angle CAB = 180^\circ$ (2)
Uit (1) en (2) volgt $\angle BFD = \angle CAB$ (3)
$\angle CEB = \frac{1}{2} \text{bg } CB = \angle CAB$ (4)
(3) en (4) geeft $\angle BFD = \angle CEB \Rightarrow CE // FD$ (Z-hoeken).

5 Vierhoek ABDE is een koordenvierhoek
$\Rightarrow \angle EAB + \angle EDB = 180^\circ \Rightarrow \angle EAB = \angle EDC$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle ECD = \angle BCA \\ \angle CDE = \angle CAB\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ECD \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|ED|}{|BA|} = \frac{|CD|}{|CA|} \Rightarrow$$

$$\frac{|EC|}{12} = \frac{3}{6} \Rightarrow |EC| = 6 \Rightarrow |AE| = 14 - 6 = 8 \text{ en } \frac{|CD|}{14} = \frac{3}{6} \Rightarrow |CD| = 7 \Rightarrow |BD| = 12 - 7 = 5.$$

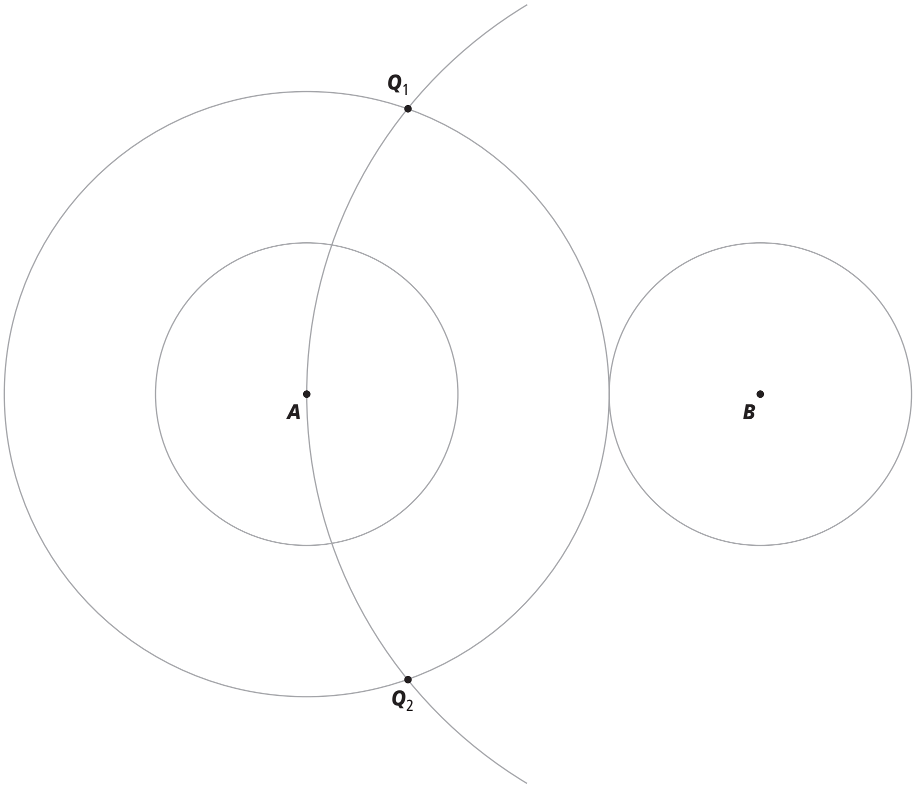
6a



De gevraagde verzameling is de middelloodlijn m van AB.

b Punt P op de lijn m, dan geldt: $\text{d}(P, c_1) = |PA| - 2 = |PB| - 2 = \text{d}(P, c_2)$.

c



Punten Q waarvoor geldt $|AQ| = 4$ en $|BQ| = 6$ zijn de snijpunten van de cirkels $(A, 4)$ en $(B, 6)$.

d M is het midden van AB. Cirkel $(M, 5)$ raakt de gegeven cirkels inwendig.
Teken de cirkel $(A, 7)$. Deze snijdt de middelloodlijn m in de punten P en Q. De cirkels $(P, 5)$ en $(Q, 5)$ raken de gegeven cirkels uitwendig.

Extra oefening bij hoofdstuk 7

1a Periode $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = \frac{1}{5}\pi$; frequentie $\frac{5}{\pi}$; amplitude 3

b Periode $\frac{2\pi}{300\pi} = \frac{1}{150}$; frequentie 150; amplitude 0,2

c Periode $\frac{2\pi}{628} = \frac{1}{314}\pi$; frequentie $\frac{314}{\pi}$; amplitude 2

d Periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$; frequentie $\frac{1}{\pi}$; amplitude 8

2a Periode van beide is $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = \frac{1}{5}\pi \approx 0,6283$ en voor de tweede functie geldt $u = 3\sin 10(t - 2,3)$ dus is het faseverschil gelijk aan $\frac{2,3}{\frac{1}{5}\pi} \approx 3,66$.

Dit is groter dan één periode. Je reduceert dit faseverschil tot 0,66.

b De periode van beide is $\frac{1}{150}$ en de tweede functie kun je herschrijven als $u = 0,2\sin 300\pi(t - \frac{2}{3\pi})$ dus is de verschuiving $\frac{2}{3\pi}$.

Het faseverschil is dan in eerste instantie $\frac{\frac{2}{3\pi}}{\frac{1}{150}} = \frac{300}{3\pi} = \frac{100}{\pi} \approx 31,83$.

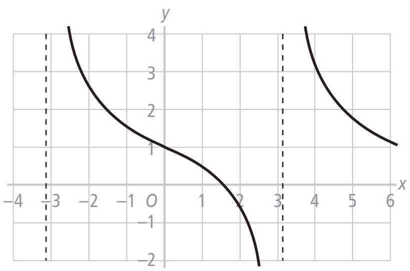
Dit reduceer je tot 0,83.

c Omdat $\sin x = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ geldt voor de eerste functie

$u = 2\cos(628t - \frac{1}{2}\pi) = 2\cos 628(t - \frac{\pi}{1256})$. De periode van beide functies is $\frac{2\pi}{628} = \frac{\pi}{314}$.

Dus is het faseverschil $\frac{\frac{\pi}{1256}}{\frac{\pi}{314}} = 0,25$.

3a



b Stel $1 - \tan 0,5x = 2$ dan is $\tan 0,5x = -1$.

Dus is $0,5x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ (k geheel) en is $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (k geheel)

Op het gegeven interval krijg je als oplossingen $x = -\frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

c Stel $1 - \tan 0,5x = 0$ dan is $\tan 0,5x = 1$.

Dus is $0,5x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (k geheel).

Met dit domein krijg je als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi$.

Met behulp van de plot van opdracht a vind je dan $-\pi < x \le \frac{1}{2}\pi$ of $\pi < x \le 2\pi$.

4a De afzonderlijke perioden zijn 2π en π zodat 2π de gemeenschappelijke periode is.

Invoeren en plotten en vervolgens CALC, INTERSECT of G-Solv, ISCT geeft de oplossingen: $x \approx 0,52$; $x \approx 2,62$; $x \approx 4,71$; $x \approx 6,81$; $x \approx 8,90$; $x \approx 11,00$.

b De afzonderlijke perioden zijn $\frac{2}{3}\pi$ en π zodat 2π de gemeenschappelijke periode is.

Met de rekenmachine vind je de oplossingen:

$x \approx -2,36; x \approx -1,96; x \approx -0,39; x \approx 0,79; x \approx 1,18; x \approx 2,75; x \approx 3,3; x \approx 4,32; x \approx 5,89.$

5 De perioden zijn $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi}=6$ en $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi}=8$. Dus is 24 de gemeenschappelijke periode.
Invoeren en plotten laat zien dat er binnen een interval met lengte 24 precies 8 oplossingen zijn. Dus zijn er op het interval [240, 480] precies $10\times 8=80$ oplossingen.

6a De evenwichtsstand is $h=11$ meter en de amplitude is 10 meter. De maximale hoogte is dan 21 meter.

b Met de somregel en de kettingregel volgt: $h'(t)=0+10\cdot\sin(0{,}2t)\cdot 0{,}2=2\sin 0{,}2t$.
Dan is $h'(3)=2\sin 0{,}6\approx 1{,}13$. Dat wil zeggen dat 3 seconden na het passeren van het laagste punt de verticale snelheid ongeveer 1,13 m/s is.

c De afgeleide functie is maximaal 2, dus is de verticale snelheid maximaal 2 m/s.
Deze snelheid wordt bereikt als $\sin 0{,}2t=1$.
Dus als $0{,}2t=0{,}5\pi+k\cdot 2\pi\Rightarrow t=2{,}5\pi+k\cdot 10\pi$ seconden.

7a $f'(x)=-3-5\cdot\sin 0{,}2x\cdot 0{,}2=-3-\sin 0{,}2x$

b $g'(x)=0-21\cdot\cos(\pi-\pi x)\cdot -\pi=21\pi\cdot\cos\pi(1-x)$

c $h'(x)=3(1+\cos 4x)^2\cdot(0-4\sin 4x)=-12\sin 4x\cdot(1+\cos 4x)^2$

d $k(x)=2\cdot(\cos 4x)^{-1}\Rightarrow k'(x)=-2\cdot(\cos 4x)^{-2}\cdot(-4\sin 4x)=\dfrac{8\sin 4x}{\cos^2 4x}$

8a $\int_0^{\pi}(4\sin 2x+\cos 3x)\,\mathrm{d}x=[-2\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 3x]_0^{\pi}=(-2+0)-(-2+0)=0$

b $\int_0^{\pi}(2\sin x+\cos x+2)\,\mathrm{d}x=[-2\cos x+\sin x+2x]_0^{\pi}=(2+0+2\pi)-(-2+0+0)=4+2\pi$

c $\int_0^{2\pi}(2\sin x+3\cos 2x-4\sin 3x)\,\mathrm{d}x=[-2\cos x+1\frac{1}{2}\sin 2x+1\frac{1}{3}\cos 3x]_0^{2\pi}=$

$(-2+0+1\frac{1}{3})-(-2+0+1\frac{1}{3})=0$

Extra oefening bij hoofdstuk 8

1a $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$ en $h(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=-2$ of $x=3$

b Er moet gelden $h(x)\neq 0$ dus moet $x\neq -2$ en $x\neq 3$.
Dus bestaat het domein uit de intervallen $\langle\leftarrow, -2\rangle, \langle -2, 3\rangle$ en $\langle 3, \rightarrow\rangle$.

c $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{x+3}{x+2}$ mits $x\neq 3$.

d Als $x\uparrow 3$ dan $f(x)\downarrow \dfrac{3+3}{3+2}=1\frac{1}{5}$.

Als $x\downarrow 3$ dan $f(x)\uparrow \dfrac{3+3}{3+2}=1\frac{1}{5}$.

Als $x\uparrow -2$ dan $f(x)\rightarrow -\infty$.

Als $x\downarrow -2$ dan $f(x)\rightarrow \infty$.

e $f(3)=\dfrac{0}{0}$ en dit is een zinloze uitdrukking. Als je de grafiek plot lijkt die toch door te lopen en door het punt $(3, 1\frac{1}{5})$ te gaan. Je ziet niet dat er precies één punt mist, een perforatie.

2a Het domein bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow, 3\rangle$ en $\langle 3, \rightarrow\rangle$.
Verticale asymptoot $x=3$ en horizontale asymptoot $y=4$.

$f'(x)=\dfrac{4\cdot(x-3)-4x\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{-12}{(x-3)^2}$

b Domein $\langle 3, \rightarrow\rangle$.
Verticale asymptoot $x=3$.

$$g'(x)=\frac{4\cdot\sqrt{x-3}-4x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}}{(\sqrt{x-3})^2}=\frac{4(x-3)-2x}{(x-3)\sqrt{x-3}}=\frac{2x-12}{(x-3)\sqrt{x-3}}$$

c Het domein bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow, -\sqrt{3}\rangle$ en $\langle\sqrt{3}, \rightarrow\rangle$.
Geen asymptoten.

$$h'(x)=-1\cdot\sqrt{x^2-3}+(-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-3}}\cdot 2x=-\sqrt{x^2-3}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{-(x^2-3)}{\sqrt{x^2-3}}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=$$
$$\frac{-2x^2+3}{\sqrt{x^2-3}}$$

d Het domein bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow, -2\rangle$, $\langle -2, 2\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$.
Verticale asymptoot $x=2$ en horizontale asymptoot $y=0$.

Perforatie $(-2, -\frac{1}{4})$ want $j(x)=\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}$ mits $x\neq -2$.

$j(x)=(x-2)^{-1}\Rightarrow j'(x)=-1\cdot(x-2)^{-2}\cdot 1=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$ mits $x\neq -2$.

e Het domein bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow, -3\rangle$, $\langle -3, 0\rangle$ en $\langle 0, \rightarrow\rangle$.
Verticale asymptoot $x=-3$ en horizontale asymptoot $y=4$.

Perforatie $(0,0)$ want $m(x)=\dfrac{4x\cdot x}{(x+3)\cdot x}=\dfrac{4x}{x+3}$ mits $x\neq 0$.

$m(x)=\dfrac{4x}{x+3}\Rightarrow m'(x)=\dfrac{4\cdot(x+3)-4x\cdot 1}{(x+3)^2}=\dfrac{12}{(x+3)^2}$ mits $x\neq 0$.

f Het domein bestaat uit de intervallen $\langle\leftarrow, 3\rangle$ en $\langle 3, \rightarrow\rangle$.
Verticale asymptoot $t = 3$.

Omdat $r(t) = \dfrac{t(t-3)+6(t-3)+18}{t-3} = t+6+\dfrac{18}{t-3}$ is er een scheve asymptoot $r = t+6$.

$$r'(t) = \frac{(2t+3)\cdot(t-3)-(t^2+3t)\cdot 1}{(t-3)^2} = \frac{t^2-6t-9}{(t-3)^2}$$

3a Verticale asymptoot $x = 3$ en horizontale asymptoot $y = 0$.

b $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{(x-3)^2} & \text{als } x \geq -5 \text{ en } x \neq 3 \\ -\dfrac{x+5}{(x-3)^2} & \text{als } x < -5 \end{cases}$$

c De waarde van $g(x)$ is altijd groter of gelijk aan 0. Dus is er een minimum $g(-5) = 0$.
Met behulp van een plot kun je inzien dat er een maximum is voor $x < -5$.
Daar is $g'(x) = \dfrac{-1\cdot(x-3)^2-(-x-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \dfrac{-1(x-3)-(-x-5)\cdot 2}{(x-3)^3} = \dfrac{x+13}{(x-3)^3}$
Er is een maximum $(-13, \frac{1}{32})$.
De toppen zijn $(-13, \frac{1}{32})$ en $(-5, 0)$.

4a $$f_2(x) = \frac{x^2}{2x+2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x(x+1)-(x+1)+1}{x+1} = \tfrac{1}{2}(x-1)+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

Dus is de scheve asymptoot $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

b Dan moet de situatie $\frac{0}{0}$ kunnen ontstaan. Dat is het geval als $a = 0$.
Dan is $f_0(x) = \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2}$ mits $x \neq 0$. De perforatie in de grafiek is dan het punt $(0, 0)$.

c $$f_a'(x) = \frac{2x\cdot(2x+a)-x^2\cdot 2}{(2x+a)^2} = \frac{2x^2+2ax}{4x^2+4ax+a^2} = \frac{2+\dfrac{2a}{x}}{4+\dfrac{4a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}}$$

Voor $x \to \pm\infty$ volgt $f_a'(x) \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en dus is de helling van elke eventuele scheve asymptoot steeds $\frac{1}{2}$ en dus zijn alle scheve asymptoten evenwijdig.

Oefentoets bij hoofdstuk 7 en 8

1 $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot - \sin x}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Ook geldt $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

2a Het domein bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, -2 \rangle$, $\langle -2, 2 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

b De term $\dfrac{5}{x^2 - 4}$ nadert 0 als $x \to \pm\infty$. Dus is $y = ax - 3$ de (scheve) asymptoot.

Dit is voor $a = 0$ de horizontale asymptoot $y = -3$.

c $f_0(x) = -3 + \dfrac{5}{x^2 - 4} = \dfrac{-3(x^2 - 4)}{x^2 - 4} + \dfrac{5}{x^2 - 4} = \dfrac{-3x^2 + 17}{x^2 - 4}$

d Zie opdracht b: $y = ax - 3$

e $(0, -3)$ want $y = a \cdot 0 - 3 = -3$ voor elke waarde van a.

f $x = -2$ en $x = 2$

3a $\dfrac{dC}{dt} = \dfrac{0{,}16 \cdot (t+2)^2 - 0{,}16t \cdot (2(t+2))}{(t+2)^4} = \dfrac{-0{,}16t + 0{,}32}{(t+2)^3}$ mg per liter per uur.

b $\dfrac{dC}{dt} = \dfrac{-0{,}16t + 0{,}32}{(t+2)^3} = 0$ als $t = 2$.

De concentratie is maximaal $C(2) = \dfrac{0{,}32}{(2+2)^2} = 0{,}02$ mg per liter.

c Plot de grafieken van C en $y = 0{,}01$ en bereken de snijpunten. Dan vind je $t \approx 0{,}34$ en $t \approx 11{,}66$.

Algebraïsch kan het als volgt: $\dfrac{0{,}16t}{(t+2)^2} = \frac{1}{100} \Rightarrow 16t = t^2 + 4t + 4$

Uit $t^2 - 12t + 4 = 0$ volgt met de abc-formule weer $t \approx 0{,}34$ en $t \approx 11{,}66$.

Duidelijk zal zijn dat alleen $t \approx 11{,}66$ voldoet.

Dus na ruim 11 uur moet de volgende injectie worden gegeven.

d $C'(11{,}66) \approx -0{,}0006$ en voor de nieuwe injectie geldt $C'(0) = 0{,}04$.

De veranderingssnelheid op dat moment is $0{,}04 - 0{,}0006 = 0{,}034$ en dat is niet te groot.

4a $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$ dus $a = 1$, de lijn $y = x$ raakt *f*.

b Uit opdracht a volgt dat er voor $a \geq 1$ precies één snijpunt is.

Voor negatieve a krijg je dat er drie snijpunten zijn als de lijn raakt aan de grafiek van f.

Dat is het geval als $f(x) = ax$ en $f'(x) = a$ in een raakpunt.

Dus als geldt $\sin x = ax$ en $\cos x = a$. Hieruit volgt $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{ax}{a} = x$ in een raakpunt.

Met behulp van de rekenmachine vind je dat dit het geval is als $x \approx 4{,}4934$ en daarmee is $a \approx \cos(4{,}4934) \approx -0{,}217$. Met behulp van de grafieken kun je inzien dat voor $a < -0{,}217$ er één snijpunt is. Dus één snijpunt voor $a < -0{,}217$ of $a > 1$.

c Nee, want de grafieken zijn puntsymmetrisch in $(0, 0)$ en dan is er naast $(0, 0)$ altijd een even aantal snijpunten.

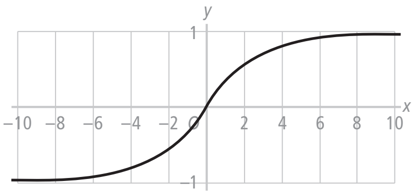
d Van de vijf snijpunten zijn er twee raakpunten. Dan geldt weer $\tan x = x$.

De na $x \approx 4{,}4934$ volgende positieve oplossing is $x \approx 7{,}7253$.

Dus voor $a \approx \cos(7{,}7253) \approx 0{,}128$ zijn er vijf snijpunten waarvan twee raakpunten.

Voor een andere waarde van *a,* dichter bij nul, zijn meer dan vijf snijpunten.

5a



Horizontale asymptoot $y = 1$ naar rechts en horizontale asymptoot $y = -1$ naar links.

b Voor grote positieve of negatieve waarden van x geldt $\sqrt{x^2+9} \approx \sqrt{x^2} = |x|$.
Dus geldt $f(x) \approx \frac{x}{x} = 1$ als $x \to +\infty$ en $f(x) \approx \frac{x}{-x} = -1$ als $x \to -\infty$.

6a De hoogste stand is 16 en de laagste is 0 dus is de evenwichtsstand $h = 8$ en het amplitude is 8.
100 omwentelingen per 60 seconden dus is de periode 0,6 seconden en dus is $b = \frac{2\pi}{0{,}6}$.
Dus is de formule van de vorm $h = 8 + 8\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}6}(t-c)\right)$.
4 cm boven het laagste punt dus de helft van de amplitude onder de evenwichtsstand dus moet gelden dat $\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}6}(t-c)\right) = -\frac{1}{2}$ als $t = 0$. Dus is $\frac{2\pi}{0{,}6}(0-c) = -\frac{1}{6}\pi \Rightarrow c = 0{,}05$.

b $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0 + 8 \cdot \frac{2\pi}{0{,}6}\cos(\frac{2\pi}{0{,}6}(t-0{,}05)) = \frac{16\pi}{0{,}6}\cos(\frac{2\pi}{0{,}6}(t-0{,}05))$

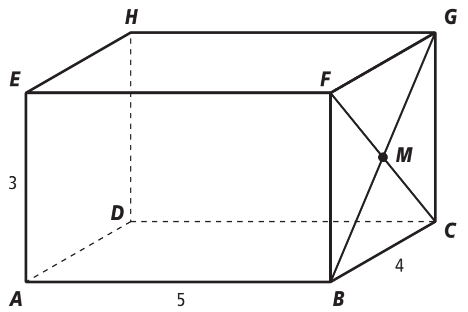
Voor $t = 5$ geldt $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{16\pi}{0{,}6}\cos(\frac{2\pi}{0{,}6}(5-0{,}05)) = \frac{16\pi}{0{,}6}\cos\frac{20\pi \cdot 99}{6 \cdot 20} = \frac{16\pi}{0{,}6}\cos 16{,}5\pi = 0$

c De zuiger bevindt zich op het hoogste of het laagste punt.
Omdat $h(5) = 8 + 8\sin 16\tfrac{1}{2}\pi = 8 + 8 = 16$ bevindt de zuiger zich op het hoogste punt.

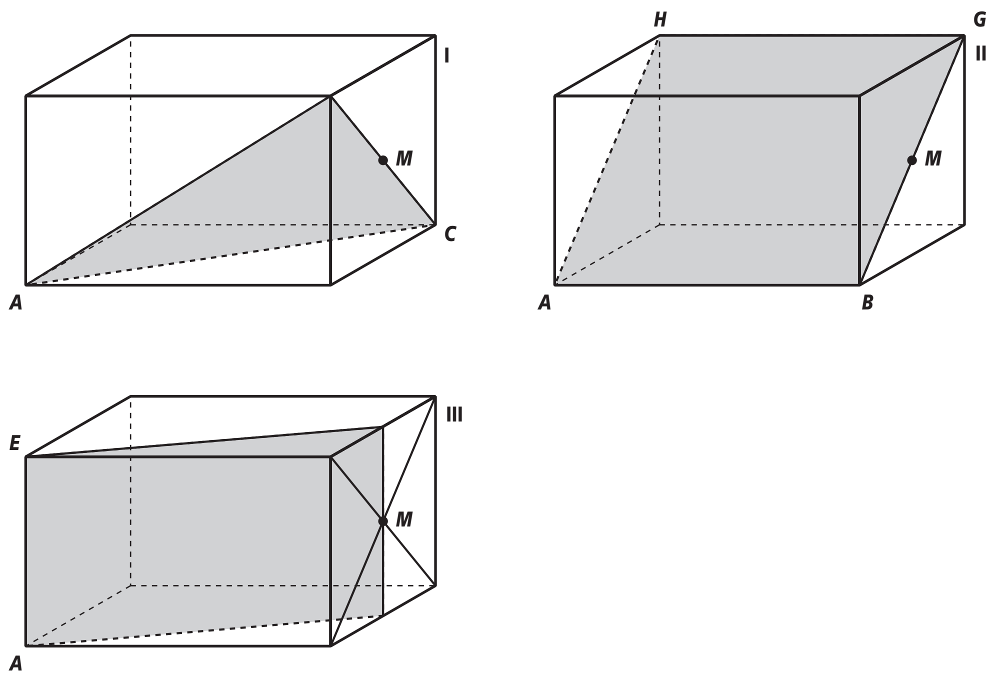
d De afgeleide is maximaal gelijk aan zijn amplitude, dus is de maximale snelheid $\frac{16\pi}{0{,}6} \approx 83{,}8$ cm/s.

Extra oefening bij hoofdstuk 9

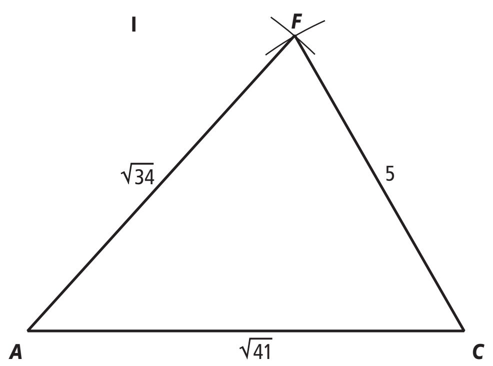
1a



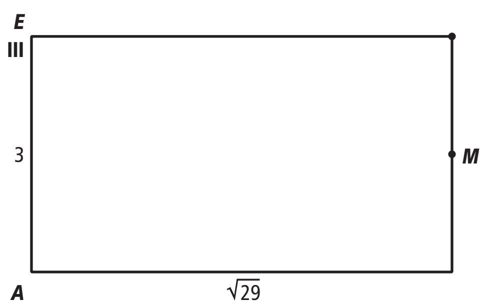
b



c I:



III:



II: De doorsnede is een vierkant met zijde 5 cm.

2a AB en BC, AD en HK, FL en BF, CG en FG, …

b EK, KL, AE, BF, AD en BC.

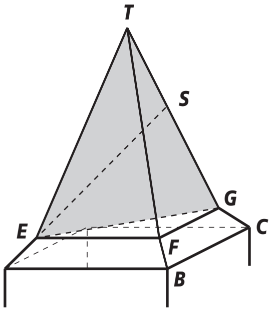
c HG, EF, AB en DC.

d HK ligt in het vlak $HKEAD$. In dit vlak wordt HK gesneden door EK, AE, AD, DH en EH.
HK ligt ook in het vlak $HKLG$. In dit vlak wordt HK gesneden door KL, GL en GH.

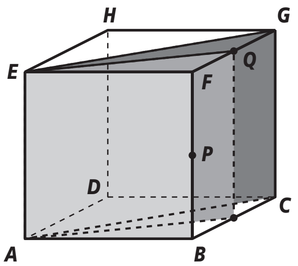
3a 1. A ligt niet in het vlak TEF dus kruisen.
2. Liggen in het vlak $ABFE$ en zijn niet evenwijdig, dus snijden.
3. Liggen in het vlak $BFTH$ en zijn niet evenwijdig, dus snijden.
4. C ligt niet in het vlak TFG dus kruisen.

b Liggen in het vlak TEG en zijn niet evenwijdig, dus snijden.

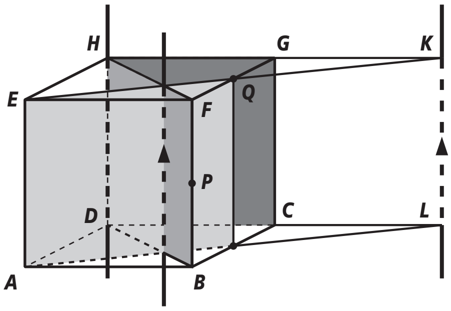
c



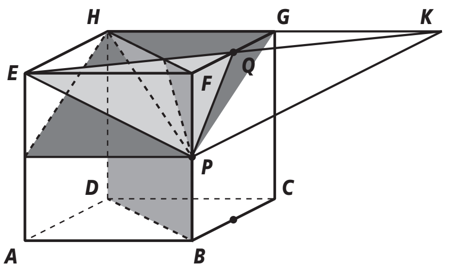
4a Er is geen gemeenschappelijk snijpunt maar een gemeenschappelijke snijlijn AE.



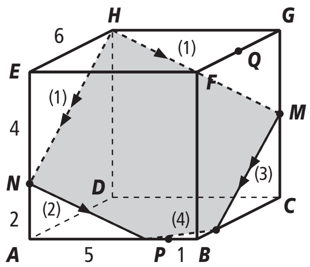
b Het gaat om drie verticale vlakken. In de figuur zie dat elk tweetal een verticale snijlijn heeft. Dit geeft drie verticale snijlijnen en dus is er geen enkel gemeenschappelijk punt.



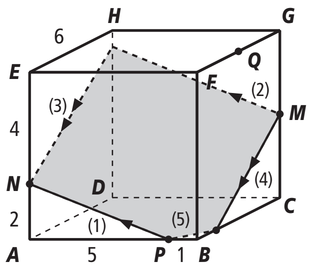
c De snijlijn van de vlakken $BDHF$ en PHG is de lijn HP.
De snijlijn van PHG en EPQ is de lijn PK.
De snijlijn van $BDHF$ en EPQ is de lijn door P en het snijpunt van HF en EG.
De drie snijlijnen gaan alle drie door P. Punt P is het gemeenschappelijke punt.



5a,b (1) Teken HN en HM.
(2) Teken in het voorvlak de lijn door N evenwijdig aan HM.
(3) Ten door M in het rechter zijvlak de lijn evenwijdig aan HN.
(4) Voltooi in het grondvlak de doorsnede.



c (1) Teken NP.
(2) Teken in het achtervlak de lijn door M evenwijdig aan NP.
(3) Teken in het linker zijvlak de lijn door het snijpunt van (2) met DH en N.
(4) Teken in het rechter zijvlak door M de lijn evenwijdig aan de lijn van (3).
(5) Voltooi in het grondvlak de doorsnede.



Extra oefening bij hoofdstuk 10

1a De hoek tussen AF en AD is $\angle DAF$. Er geldt $\angle DAF = \tan^{-1} \frac{2}{6} \approx 18^\circ$.

b Met Pythagoras: $|AP| = |PF| = \sqrt{16+9} = 5$ en $|AF| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.

De cosinusregel in $\triangle PAF$ geeft:

$$\cos\angle PAF = \frac{|AP|^2 + |AF|^2 - |PF|^2}{2 \cdot |AP| \cdot |AF|} = \frac{25+20-25}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{20}} \approx 0{,}57 \Rightarrow \angle PAF \approx 63^\circ$$

c De hoek tussen AF en AC is $\angle CAF \approx 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

2a De hoek tussen PG en HD is $\angle PGC = 90^\circ$.

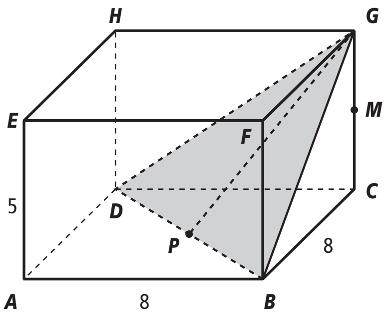
b De hoek tussen PG en DC is $\angle PGH = \tan^{-1} \frac{6}{4} \approx 56^\circ$.

c De hoek tussen PG en ED is $\angle GPM$ als M het midden is van DC.
Met Pythagoras: $|PG| = |GM| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$ en $|PM| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$.
Met de cosinusregel in $\triangle GPM$ volgt:

$$\cos\angle GPM = \frac{52+72-52}{2 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{72}} \approx 0{,}588 \Rightarrow \angle GPM \approx 54^\circ$$

d Stel N is het midden van AB. Dan is de hoek tussen PG en HC gelijk aan $\angle HCN$.
Met Pythagoras vind je dat: $|HC| = \sqrt{36+64} = 10$, $|NC| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$ en
$|HN| = \sqrt{36+36+16} = \sqrt{88}$.
De cosinusregel geeft $\angle HCN = \dfrac{100+52-88}{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{52}} \approx 0{,}444 \Rightarrow \angle HCN \approx 64^\circ$

3a



b Neem P het midden van DB. Dan is: $|AC| = |DB| = \sqrt{64+64} = \sqrt{128}$,
$|CP| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{128} = \sqrt{32}$ en $|GP| = \sqrt{32+25} = \sqrt{57}$.
Oppervlakte driehoek BDG is $\frac{1}{2} \cdot DB \cdot GP = \frac{1}{2}\sqrt{128} \cdot \sqrt{57} = \sqrt{1824} \approx 42{,}7$.

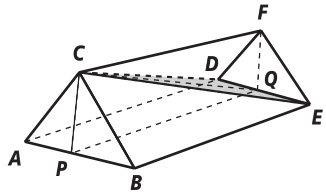
c De afstand tussen C en het vlak BDG kun je berekenen in vlak CPG.

d Met de oppervlakte van driehoek CPG vind je de afstand $\dfrac{|CG| \cdot |CP|}{|GP|} = \dfrac{5\sqrt{32}}{\sqrt{57}} \approx 3{,}75$.

e In vlak CPG zie je met behulp van een evenredigheid dat de afstand van M tot GP de helft is van de afstand vanuit C. Dus is de afstand van M tot BDG gelijk aan

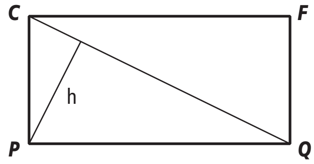
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{32}}{\sqrt{57}} \approx 1{,}87 .$$

4a De lijn PQ moet evenwijdig zijn aan het vlak $ACFD$ en dus aan CF.
De afstand van P tot C is dus gelijk aan de afstand van Q tot F.



b Zie driehoek CED in de figuur.

c Teken de hoogtelijn CP uit C op AB.
FQ is de hoogtelijn uit F op DE.
Vlak V is nu het vlak $PQFC$.

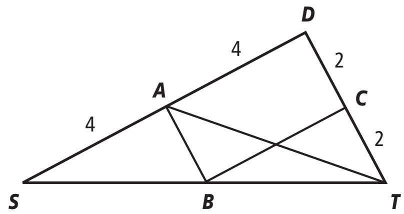


d $|CB| = \sqrt{625 - 225} = 20$, $|CP| = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$ en

$|CQ| = \sqrt{144 + 576} = \sqrt{720}$

Dan geldt voor de afstand h dat $h = \dfrac{|CP| \cdot |PQ|}{|CQ|} = \dfrac{12 \cdot 24}{\sqrt{720}} \approx 10,73$.

5a Omdat DH evenwijdig is aan BF.



b Het grondvlak $ABCD$ staat loodrecht op BTF.
Trek hierin TB en DA door tot hun snijpunt S.
Dan is driehoek SDT een vergroting met factor 2 van driehoek SAB. Dus is de afstand van D tot ST het dubbele van de afstand van A tot ST.

c Ook deze afstand kun je in het grondvlak berekenen, want TAE staat loodrecht op $ABCD$.
Uit $|AD| = |DT| = 4$ volgt $|AT| = \sqrt{32}$.
De gezochte afstand is de afstand van D tot AT.
Deze is $\dfrac{4 \cdot 4}{\sqrt{32}} \approx 2,83$

Oefentoets bij hoofdstuk 9 en 10

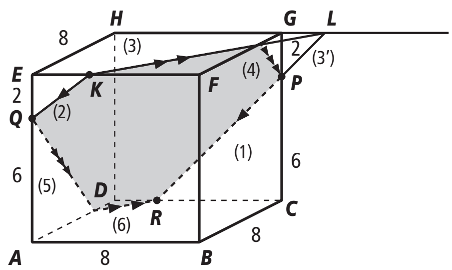
1a PQ en AC liggen in het vlak $ACGE$ en zijn evenwijdig.
PR en CE kruisen want P, R en C liggen in het achtervlak en E ligt daar niet in.
QR en DF kruisen want D, F en R liggen in het vlak $CDEF$ en Q ligt daar niet in.
AP en EG snijden want ze liggen in het vlak $ACGE$ en ze zijn niet evenwijdig.

b Dat zijn: $\triangle BFQ$, $\triangle BAR$, $\triangle GHR$, $\triangle BFP$ en $\triangle DHP$.

c De vlakken EPQ en DFH zijn dezelfde als de vlakken $ACGE$ en $BDHF$.
Deze laatste twee vlakken snijden elkaar in een verticale lijn.
De vlakken ACE en BDR zijn dezelfde vlakken als de vlakken $ACGE$ en $ABCD$.
Deze laatste twee hebben AC als snijlijn.
De vlakken ABC en PQR hebben punt R gemeenschappelijk en snijden elkaar in de lijn door R evenwijdig aan PQ of AC.

d Alle drie liggen onder het vlak BEG.

e (1) Teken PR.
(2) Teken door Q de lijn evenwijdig aan PR.
(3) Teken het snijpunt L van PR en HG en daarna KL.
(4) Teken in het rechter zijvlak de snijlijn door P.
(5) Teken in het linker zijvlak de snijlijn door Q.
(6) Teken in het grondvlak de snijlijn door R evenwijdig aan KL.



f $|PR| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, $|PQ| = |AC| = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ en
$|QR| = \sqrt{4+64+36} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.
Om de hoogte h te kunnen berekenen heb je $\angle QPR$ nodig. Met de cosinusregel vind je $104 = 128 + 72 - 2 \cdot \sqrt{128} \cdot \sqrt{72} \cdot \cos\angle QPR \Rightarrow \cos\angle QPR = 0{,}5$ en dus is $\angle QPR = 60^\circ$.
Dan is $h = |PR| \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{6}$ en dus is de gevraagde oppervlakte
$\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} = 12\sqrt{12} \approx 41{,}6$

2a Dit is het vlak ADM, waarbij M het midden is van BC.

b Dat is de lijn PM.

c Dat is een driehoek, gelijkvormig met driehoek ADM en vergrotingsfactor $\dfrac{|QC|}{|DC|}$.

d Dat is de lijn $P'Q'$ in de figuur.
Het punt D' vind je door AM te snijden met CN waarbij N het midden is van AB.
De punten P' en Q' vind je door de lijnen door P en Q evenwijdig aan DD' te snijden met AM respectievelijk CN.

3a Met Pythagoras vind je $|BG| = \sqrt{9+16} = 5$ zodat $\angle BGA = \tan^{-1}\frac{6}{5} \approx 50^\circ$.

b $|AC| = |EG| = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$, $\angle CPA = \angle CPE = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{45}}{2} \approx 73{,}4^\circ$ en dus is
$\angle APE = 180^\circ - \angle CPA - \angle CPE \approx 33^\circ$.

c Hiervoor moet je $\angle HBD$ berekenen. Omdat $|DB| = |AC| = \sqrt{45}$ geldt
$\angle HBD = \tan^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{45}} \approx 31^\circ$.

d Neem Q als het midden van BF. Dan is QG evenwijdig aan BP, zodat de gezochte hoek tussen BP en EG gelijk is aan $\angle QGE$. Voor de zijden van driehoek QGE geldt: $|EQ| = \sqrt{40}$, $|QG| = \sqrt{13}$ en $|EG| = \sqrt{45}$. Met de cosinusregel vind je

$$\cos\angle QGE = \frac{13+45-40}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{45}} \approx 0{,}372 \Rightarrow \angle QGE \approx \cos^{-1} 0{,}372 \approx 68^\circ.$$

e Voor de zijden van driehoek EBG geldt: $|EB| = \sqrt{52}$, $|EG| = \sqrt{45}$ en $|BG| = 5$.

Met de cosinusregel vind je $\cos\angle GBE = \dfrac{25+52-45}{2\cdot 5\cdot\sqrt{52}} \approx 0{,}444 \Rightarrow \angle GBE \approx 63{,}6^\circ$.

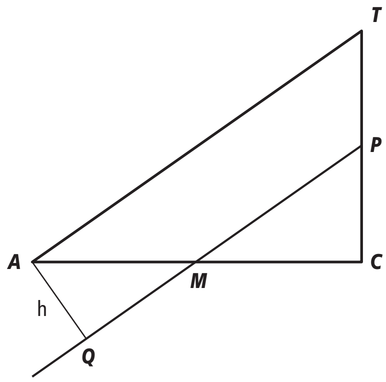
Voor de lengte van de hoogtelijn h vanuit G op BE geldt:
$h = |BG|\cdot\sin\angle GBE \approx 5\cdot\sin 63{,}6^\circ \approx 4{,}48$.
De gevraagde oppervlakte is $\frac{1}{2}\cdot|EG|\cdot h \approx 15{,}0$

f Inhoud $(EBF.G) = \frac{1}{3}\cdot\text{Opp.}(\Delta EBF)\cdot|FG| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|EF|\cdot|BF|\cdot|FG| = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 4\cdot 3 = 12$

g Noem de gezochte afstand a en gebruik dat Inhoud($EBF.G$) = Inhoud($EBG.F$) =

$\frac{1}{3}\cdot\text{Opp}(\Delta EBG)\cdot a = 12$.

Dan geldt $a = \dfrac{3\cdot\text{Inhoud}(EBF.G)}{\text{Opp.}(\triangle EBG)} \approx \dfrac{3\cdot 12}{15{,}0} = 2{,}4$



4a DC staat loodrecht BC en loodrecht CT dus staat DC loodrecht het vlak BCT. Dus staat DC loodrecht elke lijn in BCT en dus ook staat DC loodrecht BP.

b Deze hoek is gelijk aan $\angle PBC$.

Er geldt $\angle PBC = \tan^{-1}\dfrac{2}{4} \Rightarrow \angle PBC \approx 27^\circ$

c Zie de figuur, hierin is $|AC| = \sqrt{32} \approx 5{,}66$.

d Stel M is het midden van AC.
Dan is $|AM| = |MC| = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \sqrt{8}$.
Vlak ACT staat loodrecht op BDP.
In het vlak ACT bereken je dus de gezochte afstand h.
Uit gelijkvormigheid van de driehoeken AMQ en PMC volgt

$$\frac{h}{|AM|} = \frac{|PC|}{|MP|} \Rightarrow h = \frac{|AM|\cdot|PC|}{|MP|} = \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{12}} \approx 1{,}63.$$

5a Omdat BC evenwijdig is aan NM.

b Het vlak $HBFN$, want MN staat loodrecht op $HBFN$, dus CMN loodrecht $HBFN$. En dus kun je de afstand van H tot CMN berekenen in rechthoek $HBFN$.

c In de regelmatige zeshoek met zijde 2 die het grondvlak is bereken je de lengte van BF.

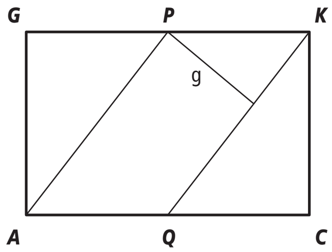
Er geldt $|BF| = 2\cdot 2\cos 30^\circ = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Met Pythagoras vind je $|BN| = \sqrt{4+12} = 4$.
Stel de gevraagde afstand is h. Omdat $|BN|\cdot h = |BF|\cdot|FN| \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot 2}{4} = \sqrt{3}$.

d Omdat de vlakken $ACKG$ en $FDLN$ evenwijdig zijn.

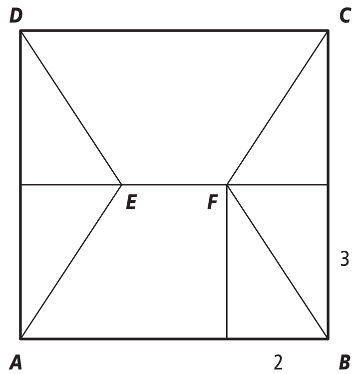
e Lijn CD loodrecht vlak FDL, dus is de gevraagde afstand gelijk aan de lengte van CD, dus 2.

f De vlakken AFH en BEL zijn evenwijdig want AF, HM, BE en LK zijn evenwijdig. Hiernaast is de doorsnede van $ACKG$ met het prisma getekend. Daarin in P het snijpunt van GK en HM en is Q het snijpunt van AC en BE.



In deze figuur is $|KC| = 2$, $|PK| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ en $|QK| = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$.
De gezochte afstand g bereken je met $\frac{g}{|PK|} = \frac{|KC|}{|QK|} \Rightarrow g = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{7}} \approx 1{,}31$.

6a



b Stel h is de afstand van EF tot het grondvlak.
Met Pythagoras volgt dan dat $h^2 + 3^2 + 2^2 = 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{12}$.

Stel α is de gezochte hoek tussen BCF en $ABCD$, dan $\alpha = \tan^{-1} \frac{h}{2} = \tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ$.

c Stel β is de hoek tussen $ABFE$ en $ABCD$ dan is $\beta = \tan^{-1} \frac{h}{3} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{12}}{3} \approx 49{,}1^\circ$.
De gezochte hoek is dan $180^\circ - 2\beta \approx 82^\circ$.

d Stel F' is de projectie van F op $ABCD$. Dan is

$\cos \angle BFF' = \frac{h}{|BF|} = \frac{\sqrt{12}}{5} \approx 0{,}69 \Rightarrow \angle BFF' \approx 46{,}1^\circ$.

De gezochte hoek is twee keer $\angle BFF'$ (verschuif DE evenwijdig aan zichzelf 2 naar rechts), dus ongeveer 92°.

e Zie opdracht a: $h = \sqrt{12}$.

f Kies P op AB zodat $|AP| = 2$, dan is hoek EPB recht, $|PB| = 4$ en $|EP| = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ en $|EB| = \sqrt{21+16} = \sqrt{37}$.