Hoofdstuk 3 - Differentiëren

Voorkennis: Machten en differentiëren

bladzijde 74

V-1a $(2x^2)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 = 8x^6$

b $\dfrac{x^2}{x(x^2)^2} = \dfrac{x^2}{x \cdot x^4} = \dfrac{x^2}{x^5} = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$

c $\dfrac{2(3x)^4}{(9x^2)^3} = \dfrac{2 \cdot 3^4 x^4}{9^3 x^6} = \dfrac{2 \cdot 3^4}{(3^2)^3 x^2} = \dfrac{2 \cdot 3^4}{3^6 x^2} = \dfrac{2}{3^2 x^2} = \frac{2}{9} x^{-2}$

d $\dfrac{(3x^2)^6}{x^2 \cdot 3x^4} = \dfrac{3^6 x^{12}}{3x^2 \cdot x^4} = \dfrac{3^5 x^{12}}{x^6} = 3^5 x^6 = 243x^6$

e $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^5}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{4}}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}} = \dfrac{x^2}{x^{2\frac{3}{4}}} = x^{2-2\frac{3}{4}} = x^{-\frac{3}{4}}$

f $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{(2x)^3} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{2^3 x^3} = \frac{1}{8} x^{-2\frac{2}{3}}$

g $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{(\sqrt[3]{x})^2} = \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}})^2} = \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

h $\dfrac{x^2}{2\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{x^2}{2x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2} x^{\frac{2}{3}}$

V-2a $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$

b $\dfrac{x^6}{(x^2)^3} = \dfrac{x^6}{x^6} = 1$

c $x(x+1)^2 = x(x^2+2x+1) = x^3 + 2x^2 + x$

d $(x - x^{-1})^2 = (x - x^{-1})(x - x^{-1}) = x^2 - x \cdot x^{-1} - x^{-1} \cdot x + x^{-2} = x^2 - 1 - 1 + x^{-2} = -2 + x^2 + x^{-2}$

e $\sqrt{4x} + \sqrt{x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 3\sqrt{x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{9x}$

f $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[2]{x} = x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$

g $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

bladzijde 75

V-3a Plot de functies en gebruik op de TI Calc > maximum en Calc > maximum of op de Casio:
G-Solv > MAX en G-Solv > MIN om de toppen te vinden en de coördinaten ervan af te lezen.
Je vindt voor *f* een minimum op (–0,75; –1,125),
voor *g* een maximum op (–0,816; 2,089) en een minimum op (0,816; –0,089) en
voor *h* een maximum op (–0,317; –0,633) en een minimum op (6,317; 12,633).

b De helling benader je door het differentiequotiënt te berekenen over een klein interval.
De helling voor *f* wordt dan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(2{,}001) - f(2)}{2{,}001 - 2} = \dfrac{14{,}011002 - 14}{0{,}001} = 11{,}002 \approx 11$.
Voor *g* vind je op deze manier een helling van ongeveer 10 en voor *h* ongeveer –10.

V-4a $f(x) = 30x^7$
$f'(x) = 30 \cdot 7x^6 = 210x^6$

b $t(x) = 30 + x^7$
$t'(x) = 0 + 7x^6 = 7x^6$

c $s(x) = -28x^2 - 18$
$s'(x) = -56x$

d $g(t) = 15t - 3$
$g'(t) = 15$

e $h(u)=(u+2)(u^3+1)=u^4+2u^3+u+2$
$h'(u)=4u^3+6u^2+1$

f $j(x)=\sqrt{7}-x\sqrt{x}=\sqrt{7}-x^{1\frac{1}{2}}$ ($\sqrt{7}$ is een constante!)
$j'(x)=-1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}=-1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

g $p(s)=s(1-\sqrt{s})^2=s(1-2\sqrt{s}+s)=$
$s-2s\sqrt{s}+s^2=s-2s^{1\frac{1}{2}}+s^2$
$p'(s)=1-3s^{\frac{1}{2}}+2s=1-3\sqrt{s}+2s$

h $t(v)=\frac{1}{2}v^2(2+\frac{1}{v})=v^2+\frac{1}{2}v$
$t'(v)=2v+\frac{1}{2}$

i $m(r)=(1-r)(1+r+r^2)=$
$1+r+r^2-r-r^2-r^3=1-r^3$
$m'(r)=-3r^2$

j $z(x)=x^{-3}+2x^{-2}$
$z'(x)=-3x^{-4}-4x^{-3}$

V-5a Voor A geldt $y=f(x)=0$, dus los op $\frac{1}{6}x^3+4\frac{1}{2}=0\rightarrow x^3=-27\rightarrow x=-3$.
Punt A ligt dus op $(-3, 0)$.
Voor B geldt $x=0\rightarrow y=f(0)=\frac{1}{6}\cdot 0^3+4\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$. Punt B ligt dus op $(0,\ 4\frac{1}{2})$.

b Voor $x=-3$ heeft de lijn de y-waarde $4\frac{1}{2}\cdot -3+13\frac{1}{2}=0$, dus gaat de lijn ook door $(-3, 0)$.
De helling van de lijn is steeds de waarde van de richtingscoëfficiënt. Dat is $4\frac{1}{2}$.
De grafiek van f heeft in $x=-3$ een helling $f'(-3)$. Met $f'(x)=\frac{1}{2}x^2$ is dat $f'(-3)=\frac{1}{2}\cdot(-3)^2=\frac{1}{2}\cdot 9=4\frac{1}{2}$. De hellingen zijn dus gelijk.

c De algemene vergelijking van de raaklijn is $y=ax+b$. De richtingscoëfficiënt a van de raaklijn is gelijk aan de helling in punt $B(0,\ 4\frac{1}{2})$ van de grafiek van f, ofwel $f'(0)=0$ (de helling is 0, dus de raaklijn loopt horizontaal).
De lijn gaat door punt B. Invullen van de coördinaten van punt B in de vergelijking van de raaklijn geeft $4\frac{1}{2}=0\cdot 0+b\rightarrow b=4\frac{1}{2}$. De vergelijking van de raaklijn is dus $y=4\frac{1}{2}$.

3.1 Negatieve en gebroken exponenten

bladzijde 76

1a De helling benader je door het differentiequotiënt te berekenen over een klein interval.
De helling in $(1, 1)$ wordt $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1{,}001)-f(1)}{1{,}001-1}\approx -2$.

De helling in $(2; 0{,}25)$ wordt $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2{,}001)-f(2)}{2{,}001-2}\approx -0{,}25$.

De helling in $(-5;\ 0{,}04)$ wordt $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-4{,}999)-f(-5)}{-4{,}999-(-5)}\approx 0{,}016$.

b De afgeleide wordt dan $f'(x)=-2\cdot x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

c $f'(1)=-\frac{2}{1^2}=-2$; $f'(2)=-\frac{2}{2^3}=-\frac{1}{4}=-0{,}25$; $f'(-5)=-\frac{2}{(-5)^3}=\frac{2}{125}=\frac{16}{1000}=0{,}016$

2a $f(x)=\frac{-4}{x^4}=-4x^{-4}$
$f'(x)=-4\cdot -4x^{-5}=16x^{-5}=\frac{16}{x^5}$

b $f(x)=3+\frac{-1}{(2x)^3}=3+\frac{-1}{2^3x^3}=3-\frac{1}{8}x^{-3}$
$f'(x)=\frac{3}{8}x^{-4}=\frac{3}{8x^4}$

c $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}=1+2x^{-2}$
$f'(x)=-4x^{-3}=-\frac{4}{x^3}$

d $f(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}=1+2x^{-1}+3x^{-2}+4x^{-3}$
$f'(x)=-2x^{-2}-6x^{-3}-12x^{-4}=-\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}-\frac{12}{x^4}$

bladzijde 77

3a $f(x) = x - \frac{4}{x^2} = x - 4x^{-2}$

$f'(x) = 1 + 8x^{-3} = 1 + \frac{8}{x^3}$

b De helling is 0 als $f'(x) = 0$. Dus los op:

$1 + \frac{8}{x^3} = 0 \to \frac{8}{x^3} = -1 \to x^3 = -8 \to x = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Bij $x = -2$ hoort de functiewaarde $f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -3$. Dus het punt is (–2, –3).

c De helling in het punt (2, 1) is $f'(2) = 1 + \frac{8}{2^3} = 2$.

De raaklijn heeft daarmee als vergelijking $y = 2x + b$. De raaklijn gaat ook door (2, 1). Invullen van de coördinaten van het punt geeft $1 = 2 \cdot 2 + b \to b = -3$.

De vergelijking van de raaklijn wordt daarmee $y = 2x - 3$.

d De helling van *f* kan geen 1 worden want $1 + \frac{8}{x^3} \neq 1$ voor elke waarde van *x*.

4a De helling benader je door het differentiequotiënt te berekenen over een klein interval.

De helling in (1, 1) wordt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1{,}001) - f(1)}{1{,}001 - 1} \approx 0{,}50$.

De helling in (4, 2) wordt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4{,}001) - f(4)}{4{,}001 - 4} \approx 0{,}25$.

De helling in (9, 3) wordt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9{,}001) - f(9)}{9{,}001 - 9} \approx 0{,}17$.

b De afgeleide wordt dan $f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

c $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$; $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}(\approx 0{,}1667)$

5a $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

b $f(x) = x^5 \sqrt{x} = x^5 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{5\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 5\tfrac{1}{2} x^{4\frac{1}{2}} = 5\tfrac{1}{2} \cdot x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 5\tfrac{1}{2} x^4 \sqrt{x}$

c $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\tfrac{1}{2} x^{-1\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} =$

$-\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

d $f(x) = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[6]{x^5} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{7}{6}}$

$f'(x) = \tfrac{7}{6} \cdot x^{\frac{1}{6}} = 1\tfrac{1}{6} \sqrt[6]{x}$

e $f(x) = (x + \sqrt{x})^2 = (x + \sqrt{x})(x + \sqrt{x}) =$

$x^2 + 2x\sqrt{x} + x = x^2 + 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} + x = x^2 + 2x^{1\frac{1}{2}} + x$

$f'(x) = 2x + 3x^{\frac{1}{2}} + 1 = 2x + 3\sqrt{x} + 1$

f $f(x) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$

$x^2 - 2\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} = x^2 - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}$

$f'(x) = 2x - x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

6a $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. De helling is 0 als $f'(x) = 0$. Oplossen geeft

$1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

Daarbij hoort de y-waarde $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. Het punt is dus $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

b De helling $\frac{3}{4}$ als $f'(x) = \frac{3}{4}$. Oplossen geeft

$1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2 \rightarrow x = 2^2 = 4$

Daarbij hoort de y-waarde $f(4) = 4 - \sqrt{4} = 2$. Het punt is dus (4, 2).

c De raaklijn heeft helling $\frac{3}{4}$ en gaat door die door (4, 2).

De helling invullen in de algemene vergelijking $y = ax + b$ geeft de vergelijking $y = \frac{3}{4}x + b$.

Het punt invullen geeft $2 = \frac{3}{4} \cdot 4 + b \rightarrow b = -1$.

De vergelijking van de raaklijn wordt hiermee dus $y = \frac{3}{4}x - 1$.

d De helling is $f'(0) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{0}} \rightarrow$ kan niet. Uit een plot blijkt dat f een verticale raaklijn heeft in de oorsprong.

3.2 Maxima en minima

bladzijde 78

7a $f'(x) = 3x^2 - 12$

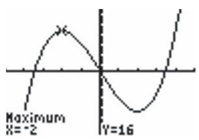
b $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ of $x = -2$

Voor $x = 2$ en $x = -2$ loopt de raaklijn horizontaal.

c De y-coördinaat bij $x = 2$ is $f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$.

De y-coördinaat bij $x = -2$ is $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot -2 = 16$.

d



Plot
Invoer: Y1 = X^3−12X
Venster: Xmin = −5 ; Xmax = 5
Ymin = −25; Ymax = 25

De antwoorden bij b en c kloppen met de grafiek.

8a $f'(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

b $f'(x) = 0 \rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 2 = 0 \rightarrow \frac{1}{3}x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \sqrt{6}$ of $x = -\sqrt{6}$

De exacte uiterste waarde bij $x = \sqrt{6}$ is

$f(\sqrt{6}) = -\frac{1}{9} \cdot (\sqrt{6})^3 + 2\sqrt{6} = -\frac{1}{9} \cdot 6\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = -\frac{2}{3}\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 1\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

De exacte uiterste waarde bij $x = -\sqrt{6}$ is

$f(-\sqrt{6}) = -\frac{1}{9} \cdot (-\sqrt{6})^3 + 2 \cdot -\sqrt{6} = -\frac{1}{9} \cdot -6\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = -1\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

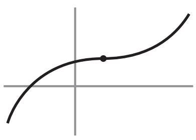
bladzijde 79

9a $f'(x) = 8x^3 - 16x$ en $g'(x) = 8x^3 - 8$

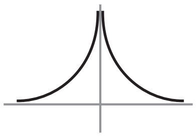
b Voor *f*: $f'(x) = 0 \rightarrow 8x^3 - 16x = 0 \rightarrow 8x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow 8x = 0$ of $x^2 - 2 = 0 \rightarrow$
$x = 0$ of $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$
De bijbehorende *y*-waarden zijn $f(0) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 = -8$ en
$f(-\sqrt{2}) = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 = -8$
De punten voor *f* zijn dus $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -8)$ en $(-\sqrt{2}, -8)$.
Voor *g*: $g'(x) = 0 \rightarrow 8x^3 - 8 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$. De bijbehorende *y*-waarde is
$g(1) = 2 - 8 = -6$
Het punt voor *g* is dus $(1, -6)$.

c De uiterste waarden van *f* zijn de functiewaarden bij de toppen, dus –8 en 0.
De uiterste waarde van *g* is de functiewaarde –6.

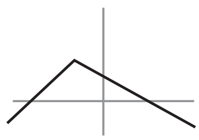
10 De grafiek hieronder heeft een punt waar de raaklijn horizontaal loopt (dus de afgeleide nul is), maar waar geen uiterste waarde bestaat.



Een grafiek die overgaat van stijgend in dalend maar waar de afgeleide niet nul is staat hieronder.



De afgeleide bestaat niet in de oorsprong.



De afgeleide bestaat niet bij de knik.

11a De zinnige waarden die *x* kan hebben liggen tussen 0 en 3. Het domein van *f* is dus het interval $[0, 3]$.

b De oppervlakte van de rechthoek is
$f(x) = AB \times BC = 2x \times (9 - x^2) = 18x - 2x^3 = -2x^3 + 18x$.

c Het maximum is een top dus los op $f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 18 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{3}$.
De maximale oppervlakte is $f(\sqrt{3}) = -2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

12 De toppen vind je door op te lossen $f'(x) = 0$.
$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ of $x = -2$
De *y*-waarden zijn $f(2) = \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 2 = -\frac{2}{3}$ en $f(-2) = \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot -2 + 2 = 4\frac{2}{3}$.
De coördinaten van de toppen zijn dus $(-2, 4\frac{2}{3})$ en $(2, -\frac{2}{3})$.
De helling van de lijn is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\frac{2}{3} - 4\frac{2}{3}}{2 - (-2)} = -1\frac{1}{3}$.
De vergelijking van de lijn *l* wordt alvast $y = -1\frac{1}{3}x + b$.
Laat de lijn door bijvoorbeeld de top op $(2, -\frac{2}{3})$ gaan. Invullen geeft
$-\frac{2}{3} = -1\frac{1}{3} \cdot 2 + b \rightarrow b = 2$.
De lijn *l* met vergelijking $y = -1\frac{1}{3}x + 2$ gaat dus door de twee toppen.

13a De afgeleide is $f'(x) = 3x^2 + c$. Er zijn geen extreme waarden als overal geldt $f'(x) \neq 0$.
De afgeleide is een dalparabool. De waarde van c verschuift de parabool verticaal. Voor $c > 0$ ligt de parabool altijd boven de x-as en geldt overal $f'(x) \neq 0$.
De functie f heeft voor $c > 0$ dus geen extreme waarden.

b Als de dalparabool onder de x-as komt zijn er twee nulpunten en dus twee extreme waarden. Voor $c < 0$ zijn er dus twee extreme waarden.

c $f'(x) = 3x^2 + c$ heeft voor $c = 0$ wel één nulpunt, $x = 0$, maar de afgeleide blijft verder groter dan nul, dus is er geen extreem. Bovendien staat in de opgave $c \neq 0$.

14a

Plot
Invoer: Y1 = √(X^3+8)
Venster: Xmin = –3 ; Xmax = 10
Ymin = –1 ; Ymax = 10

Het domein is [–2, →⟩. De waarde onder het wortelteken mag niet negatief zijn.

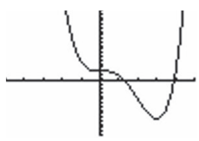
b Plot bijvoorbeeld het differentiequotiënt als benadering voor de afgeleide en zoek de waarde van X waar de grafiek nul is. Gebruik voor het differentiequotiënt op de rekenmachine de functie
Y1=(√((X+0.001)^3+8)– √(X^3+8))/0.001.
Je vindt bij X=0 de waarde 0, dus de oplossing van $f'(x) = 0$ is $x = 0$.

c Er is geen extreme waarde bij $x = 0$ want de grafiek verandert niet van stijgend in dalend of van dalend in stijgend. Omdat de functie echter een begrensd domein heeft bestaat er wel een minimale functiewaarde. Voor $x = -2$ heeft f een randminimum 0.

3.3 Buigpunten

bladzijde 80

15a



Plot
Invoer: Y1 = 0.5X^4–2X^3+3
Venster: Xmin = –5 ; Xmax = 5
Ymin = –15; Ymax = 20

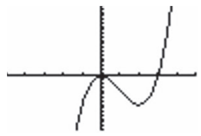
De functie heeft alleen één uiterste waarde bij het minimum.

b $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \to 2x^3 - 6x^2 = 0 \to 2x^2(x-3) = 0 \to 2x^2 = 0$ of $x - 3 = 0 \to x = 0$ of $x = 3$

Bij $x = 0$ hoort geen uiterste waarde want de grafiek vertoont geen overgang van dalend naar stijgend of omgekeerd. Bij $x = 3$ hoort wel een uiterste waarde.

c



Plot
Invoer: Y1 = 2X^3–6X2
Venster: Xmin = –5 ; Xmax = 5
Ymin = –15; Ymax = 20

Hierboven staat de plot van f'.
De uiterste waarde van f' bereken je op dezelfde manier als je de uiterste waarde van een gewone functie berekent, dus door de functie te differentiëren en de nulpunten te bepalen.
Het differentiëren van de afgeleide geeft de functie

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f'(x)) = 6x^2 - 12x$. De nulpunten zijn de oplossing van

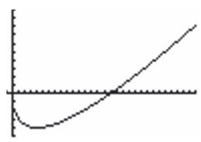
$6x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 6x(x-2) = 0 \Rightarrow 6x = 0$ of $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = 2$.

f' heeft voor $x = 0$ een uiterste waarde $f'(0) = 0$ en voor $x = 2$ een uiterste waarde $f'(2) = -8$.

d Voor de x-waarden waar f' een uiterste waarde heeft verandert de grafiek van f van hol naar bol of omgekeerd.

bladzijde 81

16a



Plot
Invoer: Y1 = X–4√(X)
Venster: Xmin = –1 ; Xmax = 30
Ymin = –5 ; Ymax = 10

$f(x) = x - 4x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \to 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \to \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \to \sqrt{x} = 2 \to x = 4$

De extreme waarde is $f(4) = 4 - 4\sqrt{4} = -4$, ook is er een randmaximum 0.

b $f''(x) = -2 \cdot -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = x^{-1\frac{1}{2}} = x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
Als $x > 0$ is $x^3 > 0$, dus $\sqrt{x^3} > 0$ en $f''(x) > 0$.

Omdat f'' nooit 0 is heeft de grafiek van f' geen extreme waarden.
De grafiek van f heeft geen buigpunten.

17a $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$
$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$
$f'(x) = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \rightarrow x(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = 2$
De bijbehorende y-waarden zijn $f(0) = 0$ en $f(2) = 1\frac{1}{3}$.
De raaklijn loopt horizontaal in de punten $(0, 0)$ en $(2, 1\frac{1}{3})$.

b $f''(x) = 3x^2 - 8x + 4$
Voor de buigpunten geldt $f''(x) = 0$. Oplossen met de *abc*-formule geeft

$$3x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{8 + \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = 2 \ ; \ x = \frac{8 - \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

De bijbehorende y-waarden zijn $f(2) = 1\frac{1}{3}$ en $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{81} - \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{27} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{81} - \frac{32}{81} + \frac{72}{81} = \frac{44}{81}$.

De exacte coördinaten van de buigpunten zijn dus $(2, 1\frac{1}{3})$ en $(\frac{2}{3}, \frac{44}{81})$.

18a $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - x^4 - 2\frac{2}{3}x^3$
$f'(x) = 4x^4 - 4x^3 - 8x^2$

b $f'(x) = 0 \rightarrow 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 = 0 \rightarrow 4x^2(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow 4x^2(x-2)(x+1) = 0 \rightarrow$
$x = 0$ of $x = 2$ of $x = -1$

c De extreme waarden van f zijn $f(2) = \frac{4}{5} \cdot 32 - 16 - 2\frac{2}{3} \cdot 8 = -11\frac{11}{15}$ en $f(-1) = \frac{13}{15}$.
Uit een plot blijkt dat voor $x = 2$ de grafiek een minimum heeft en voor $x = -1$ een maximum.
Bij $x = 0$ bevindt zich een buigpunt.

d De lijn gaat voor $x = 1$ door de y-waarde $f(1) = -2\frac{13}{15}$. De helling in het punt is $f'(1) = 4 - 4 - 8 = -8$. De raaklijn heeft alvast de vergelijking $y = -8x + b$. Invullen van de y-waarde voor $x = 1$ geeft $-2\frac{13}{15} = -8 \cdot 1 + b \rightarrow b = 5\frac{2}{15}$.
De vergelijking van de raaklijn is dus $y = -8x + 5\frac{2}{15}$.

e Als de helling minimaal is heeft f' een extreme waarde en heeft f'' een nulpunt.
Dus los op:
$f''(x) = 0 \rightarrow 16x^3 - 12x^2 - 16x = 0 \rightarrow 4x(4x^2 - 3x - 4) = 0$. Oplossen met de *abc*-formule geeft

$$x = 0 \text{ of } x = \frac{3 + \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -4}}{2 \cdot 4} = \frac{3 + \sqrt{73}}{8} \approx 1{,}44 \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{73}}{8} \approx -0{,}69$$

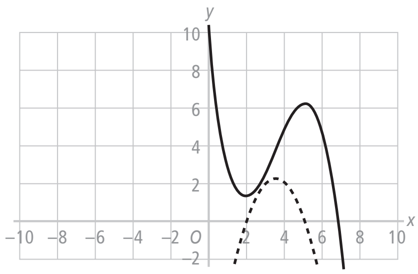
Met een plot van f' vind je dat deze bij $x \approx 1{,}44$ minimaal is.

19a f' heeft in alle drie de gevallen een maximum, dus f heeft een buigpunt.

b Nee, f heeft geen extreem als f' geen nulpunt heeft. Omdat f' een parabool is heeft f geen extreem als de parabool geen nulpunten heeft. In de derde figuur heeft f dus geen extreem.
f heeft op één plaats een horizontale raaklijn als f' één nulpunt heeft. Dat is het geval als de parabool de x-as raakt, dus bij de tweede figuur. Er is hier géén extreem want de helling is steeds negatief en de grafiek van f is dus steeds dalend. Pas bij een verandering van dalend naar stijgend of omgekeerd is er sprake van een extreem.
f heeft twee extremen als f' twee nulpunten heeft. Dat is het geval bij de eerste figuur.

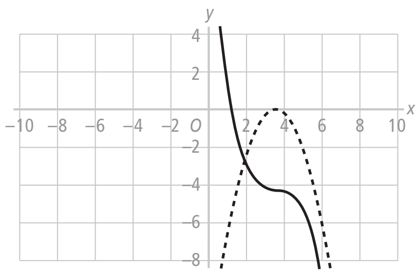
c In figuur 1 heeft de parabool snijpunten voor $x = 2$ en $x = 5$ dus heeft de grafiek van *f* daar extremen. De parabool is tussen de snijpunten positief dus is de grafiek van *f* hiertussen stijgend.
Bij de top van de parabool op $x = 3\frac{1}{2}$ heeft de grafiek van *f* een buigpunt.

Een functie die hierbij past is bijvoorbeeld $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 10x + 10$ (ga na dat deze functie past bij de getekende parabool van $y = -(x-2)(x-5)$).



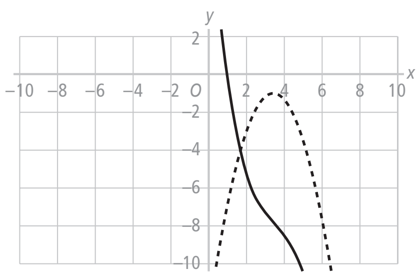
In figuur 2 heeft de parabool een nulpunt (maar geen snijpunt!) voor $x = 3\frac{1}{2}$. De grafiek van *f* heeft daar dus een horizontale raaklijn. Voor $x = 3\frac{1}{2}$ heeft de parabool ook een extreme waarde dus heeft de grafiek van *f* daar weer een buigpunt. De parabool heeft verder alleen negatieve waarden, dus de grafiek van *f* is steeds dalend en heeft geen extreme waarde.

Een functie die hierbij past is bijvoorbeeld $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 12\frac{1}{4}x + 10$ (ga na dat deze functie past bij de getekende parabool van $y = -(x-2)(x-5) - 2\frac{1}{4}$).



In figuur 3 heeft de parabool geen nulpunten maar alleen een extreem bij de top op $x = 3\frac{1}{2}$. De grafiek van *f* heeft daar weer een buigpunt. De helling van de raaklijn op het buigpunt is de negatieve waarde waarop de top van de parabool ligt. De parabool heeft alleen negatieve waarden, dus de grafiek van *f* is weer steeds dalend en heeft geen extreme waarde.

Een functie die hierbij past is bijvoorbeeld $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 - 13\frac{1}{4}x + 10$ (ga na dat deze functie past bij de getekende parabool van $y = -(x-2)(x-5) - 3\frac{1}{4}$).



20 Voor de top geldt $f'(x)=0$.

$f(x)=\frac{10}{x}-\frac{5}{x^2}=10x^{-1}-5x^{-2}$ waaruit de afgeleide volgt

$f'(x)=-10x^{-2}+10x^{-3}=-\frac{10}{x^2}+\frac{10}{x^3}$.

Oplossen van $f'(x)=0$ geeft

$-\frac{10}{x^2}+\frac{10}{x^3}=0\rightarrow\frac{10}{x^2}(-1+\frac{1}{x})=0\rightarrow-1+\frac{1}{x}=0\rightarrow\frac{1}{x}=1\rightarrow x=1$

$f(1)=\frac{10}{1}-\frac{5}{1^2}=5$. De exacte coördinaten van de top zijn dus $(1, 5)$.

Voor het buigpunt geldt $f''(x)=0$.

$f''(x)=-10\cdot-2x^{-3}+10\cdot-3x^{-4}=20x^{-3}-30x^{-4}=\frac{20}{x^3}-\frac{30}{x^4}=0\rightarrow$

$\frac{10}{x^3}(2-\frac{3}{x})=0\rightarrow(2-\frac{3}{x})=0\rightarrow x=1\frac{1}{2}$

$f(1\frac{1}{2})=\frac{10}{1\frac{1}{2}}-\frac{5}{(1\frac{1}{2})^2}=\frac{10\cdot1\frac{1}{2}}{(1\frac{1}{2})^2}-\frac{5}{(1\frac{1}{2})^2}=\frac{15}{(1\frac{1}{2})^2}-\frac{5}{(1\frac{1}{2})^2}=\frac{10}{(1\frac{1}{2})^2}=\frac{10}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{10}{\frac{9}{4}}=10\cdot\frac{4}{9}=\frac{40}{9}=4\frac{4}{9}$

De exacte coördinaten van het buigpunt zijn dus $(1\frac{1}{2}, 4\frac{4}{9})$.

3.4 Kettingfuncties

bladzijde 82

21a De huidoppervlakte O is $2L^2=2\cdot6,0^2=2\cdot36=72$ dm^2.
Het volume V is $0,1L^3=0,1\cdot6,0^3=21,6$ dm^3.
Het gewicht G is $1,06V=1,06\cdot21,6\approx22,9$ kg.

b Uit $G=1,06V$ volgt $V=\frac{G}{1,06}$.

Uit $V=0,1L^3$ volgt $L^3=\frac{V}{0,1}\rightarrow L^2=\left(\frac{V}{0,1}\right)^{\frac{2}{3}}$

Invullen in $O=2L^2$ geeft $O=2\left(\frac{V}{0,1}\right)^{\frac{2}{3}}=2\left(\frac{\left(\frac{G}{1,06}\right)}{0,1}\right)^{\frac{2}{3}}=2\left(\frac{\left(\frac{80}{1,06}\right)}{0,1}\right)^{\frac{2}{3}}\approx166$ dm^2

22

x	0	1	2
$2x+1$	1	3	5
3^{2x+1}	3	27	243

23a $f(x)=3x-2$ en $g(x)=2\sin x$ want $g(f(x))=2\sin(3x-2)$

b $f(x)=x+1$ en $g(x)=x^3$ want $g(f(x))=(x+1)^3$

c $f(x)=2x+2$ en $g(x)={}^2\log x$ want $g(f(x))={}^2\log(2x+2)$

d $f(x)=x+1$ en $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ want $g(f(x))=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

bladzijde 83

24a $x \xrightarrow{\sqrt{...}} \sqrt{x} \xrightarrow{\frac{1}{...}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\sin(...)} \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ dus $f(x) = \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b $x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{\cos(...)} \cos 2x \xrightarrow{\sqrt{...}} \sqrt{\cos 2x}$ dus $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$

25a $k(x) = f(g(x)) = 2 \cdot 3^x + 1$
b $y = 3(2x+1)^2 = 3(4x^2 + 4x + 1) = 12x^2 + 12x + 3$

26a $y = -\frac{1}{2}(3x+1) - 3 = -1\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$
b De richtingscoëfficiënt is $-1\frac{1}{2}$ en is het product van de richtingscoëfficiënten 3 en $-\frac{1}{2}$ van de lineaire functies waaruit de kettingfunctie is samengesteld.

27a $h(x) = g(f(x)) = -2(3x-2) + 1 = -6x + 5$
b $k(x) = f(g(x)) = 3(-2x+1) - 2 = -6x + 1$
c $f(g(x)) = a(mx + p) + b = am \cdot x + (ap + b)$
$g(f(x)) = m(ax + b) + p = ma \cdot x + (mb + p)$
In beide gevallen is de richtingscoëfficiënt het product van de hellingen a en m dus de uitspraak is juist.
Als $a = 0$ wordt het product ook 0 en geldt de bewering ook.

28a De rechte lijn is de raaklijn. Uit de afgeleide $f'(x) = 2x + 2$ volgt de helling $f'(1) = 4$ in het punt $(1, 4)$.
b De rechte lijn is de raaklijn. Uit de afgeleide $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ volgt de helling $g'(4) = \frac{1}{4}$ in het punt $(4, 2)$.
c De x-waarde 1 geeft de y-waarde 4 in f en de x-waarde 4 geeft de y-waarde 2 in g, dus de x-waarde 1 geeft de y-waarde 2 in h. Daarom ligt het punt $(1, 2)$ op de grafiek van $h(x) = g(f(x))$.
d $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
e De helling benader je door het differentiequotiënt te berekenen over een klein interval.
De helling voor h wordt dan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{h(1{,}001) - h(1)}{1{,}001 - 1} = \dfrac{\sqrt{4{,}004001} - \sqrt{4}}{0{,}001} \approx 1$.
Het product van de hellingen voor $x = 1$ bij a en b is de helling voor de kettingfunctie h want $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.
f $f'(2) = 4 + 2 = 6$, $g'(9) = \dfrac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$ en $h'(2) \approx \dfrac{h(2{,}001) - h(2)}{2{,}001 - 2} = \dfrac{\sqrt{9{,}006001} - \sqrt{9}}{0{,}001} \approx 1$.
De uitkomst is weer het product van de hellingen want $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

3.5 Kettingregel

bladzijde 84

29a $f'(x) = 2x + 1$ geeft de helling $f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ van l in $(1, 4)$.
b $g'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ geeft de helling $g'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ van m in $(4, 2)$.

c De helling benader je door het differentiequotiënt te berekenen over een klein interval.
De helling voor n wordt $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{h(1{,}001) - h(1)}{1{,}001 - 1} = \dfrac{\sqrt{4{,}003001} - \sqrt{4}}{0{,}001} \approx \frac{3}{4}$.

d De helling van n is het product van de hellingen van l en m want $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$.

e Als je bij het product van opdracht d de hellingen vervangt door de afgeleiden waaruit ze berekend zijn krijg je $g'(u)$ voor $\frac{1}{4}$ en $f'(x)$ voor 3. De helling van n in x vervang je door $h'(x)$ zodat volgt $h'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$.

f $f(-2) = 4 = u$ en $h'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$. Dus

$$h'(-2) = g'(4) \cdot f'(-2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (2 \cdot -2 + 1) = \tfrac{1}{4} \cdot -3 = -\tfrac{3}{4}$$

30a $h(x) = (2x+1)(2x+1)^2 = (2x+1)(4x^2+4x+1) = 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 =$
$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.
De afgeleide hiervan is $h'(x) = 24x^2 + 24x + 6$

b $f'(x) = 2$ en $g'(x) = 3x^2$

c $g'(f(x)) = 3 \cdot (f(x))^2 = 3(2x+1)^2$

d $6(2x+1)^2 = 6(4x^2+4x+1) = 24x^2 + 24x + 6$. Dat is dezelfde functie als bij a.

bladzijde 85

31a $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = x^5$ en $h(x) = 2x - 4$
$g'(x) = 5x^4$ dus $g'(h(x)) = 5(2x-4)^4$
$h'(x) = 2$
$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 5(2x-4)^4 \cdot 2 = 10(2x-4)^4$

b $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = x^3$ en $h(x) = 3x^2 + x$
$g'(x) = 3x^2$ dus $g'(h(x)) = 3(3x^2+x)^2$
$h'(x) = 6x + 1$
$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 3(3x^2+x)^2 \cdot (6x+1)$

c $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = \dfrac{2}{x^2} = 2x^{-2}$ en $h(x) = 3x - 2$
$g'(x) = -4x^{-3}$ dus $g'(h(x)) = -4(3x-2)^{-3}$
$h'(x) = 3$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -4(3x-2)^{-3} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^3}$$

d Van de gegeven y is alleen het eerste deel te schrijven als een kettingfunctie. Splits de formule voor y dus in de som van de kettingfunctie $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ en de functie $h(x) = 3x$. Je kunt voor de afgeleide van y dan g' en h' bij elkaar optellen (somregel voor afgeleiden).
De functie g is op te vatten als een samenstelling van de formules $p = \sqrt{q}$ en $q = x^2 - x$.
De afgeleide van g is

$$g'(x) = p'(q) \cdot q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot (2x-1) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-x}} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

De afgeleide van h is $h'(x) = 3$.

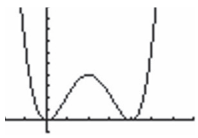
De afgeleide van y is dus $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g' + h' = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} + 3$.

e Splits de formule voor y in de kettingfuncties $g(x)=\dfrac{1}{2x^2+2}$ en $h(x)=\sqrt{x^2-1}$. Je kunt voor de afgeleide van y dan g' en h' bij elkaar optellen (somregel voor afgeleiden).

De functie g is op te vatten als een samenstelling van de formules $p=\dfrac{1}{q}$ en $q=2x^2+2$.
De functie h is op te vatten als een samenstelling van de formules $r=\sqrt{s}$ en $s=x^2-1$.
De afgeleide van g is $g'(x)=p'(q)\cdot q'(x)=\dfrac{-1}{q^2}\cdot 4x=\dfrac{-1}{(2x^2+2)^2}\cdot 4x=\dfrac{-4x}{(2x^2+2)^2}$.
De afgeleide van h is
$h'(x)=r'(s)\cdot s'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{s}}\cdot 2x=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
De afgeleide van y is dus $y'=\dfrac{dy}{dx}=g'+h'=-\dfrac{4x}{(2x^2+2)^2}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

32a Kies $g(u)=u^2$ en $u(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$. Dan is
$f'(x)=g'(u)\cdot u'(x)=2u\cdot(x-2)=2(\frac{1}{2}x^2-2x)\cdot(x-2)=$
$(x^2-4x)(x-2)=x(x-4)(x-2)$.

b



Plot
Invoer: Y1 = (0,5X²–2X)²
Venster: Xmin = –2 ; Xmax = 7
Ymin = –1 ; Ymax = 10

Voor de uiterste waarden geldt
$f'(x)=0\rightarrow x(x-4)(x-2)=0\rightarrow x=0$ of $x=4$ of $x=2$.

33a

Plot
Invoer: Y1 = 0,1(X²–2X–3)²
Y1 = 0,1(X²–2X–3)³
Y1 = 0,1(X²–2X–3)⁴
Venster: Xmin = –5 ; Xmax = 7
Ymin = –10; Ymax = 30

Omdat $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$ voor $x=-1$ en $x=3$ gaat elke grafiek door de punten (–1, 0) en (3, 0).

b Uit de kettingregel volgt de afgeleide $f'(x)=0{,}1\cdot n(x^2-2x-3)^{n-1}\cdot(2x-2)$. In de vermenigvuldiging van functies die hier staat is $(2x-2)=0$ voor $x=1$ en dus wordt het product ook 0. De afgeleide is dus 0 voor $x=1$ en dat is onafhankelijk van n.
Alle functie van deze familie hebben dus een uiterste waarde voor $x=1$.

c Voor bijvoorbeeld bij $n=3$ zie je in de plot dat *f* een buigpunt heeft voor $x=-1$. De afgeleide voor $n=3$ is $f'(x)=0{,}3\cdot(x^2-2x-3)^2\cdot(2x-2)$. Het kwadraat is altijd positief maar $2x-2$ is rond $x=-1$ negatief. Rond het nulpunt $x=-1$ heeft f' dus geen tekenwisseling en verandert *f* niet van dalend in stijgend. Er is bij deze *n* voor $x=-1$ dus geen extreme waarde maar alleen een buigpunt. Ga na dat dit geldt voor elke oneven waarde van *n*.

34a Voor $a=-1$ geldt $f(x)=(-x+2)^3$. Met de kettingregel volgt de afgeleide $f'(x)=3(-x+2)^2\cdot -1=-3(-x+2)^2$, en de tweede afgeleide volgt met de kettingregel hier weer uit: $f''(x)=-3\cdot 2(-x+2)\cdot -1=6(-x+2)$.
Er is een buigpunt voor $f''(x)=0\Rightarrow 6(-x+2)=0\Rightarrow x=2$. De afgeleide f' is dan ook nul, maar er is hierbij dus geen uiterste waarde maar alleen een buigpunt.

b *f* is overal stijgend als f' overal positief is. Met de kettingregel volgt voor $f(x)=(ax+2)^3$ de afgeleide $f'(x)=3(ax+2)^2\cdot a=3a\cdot(ax+2)^2$. Hierin is het kwadraat $(ax+2)^2$ altijd positief, dus f' is altijd positief als de $3a$ ervoor ook positief is, en dat is het geval als $a>0$.
Voor $a>0$ is de functie dus overal stijgend.

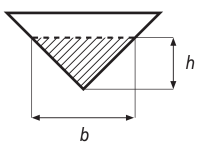
c *f* is overal dalend als f' overal negatief is. Het kwadraat $(ax+2)^2$ in f' hierboven is altijd positief, dus f' wordt altijd negatief als de $3a$ ervoor negatief is, en dat is het geval als $a<0$.
Voor $a<0$ is de functie dus overal dalend.

3.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 86

35a Het reservoir is een prisma. Het grondvlak is een driehoek van 2 meter breed en 1 meter hoog. De oppervlakte hiervan is dus $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$ m^2. De lengte van het reservoir is 4 meter.
De inhoud van het reservoir is de inhoud van een prisma, dat is oppervlakte grondvlak × lengte = 1 × 4 = 4 m^3 = 4000 dm^3.

b



$b=2h$ want het reservoir heeft als verhouding breedte : hoogte = 2 : 1.

c $V(h)=\frac{1}{2}\cdot h\cdot b\cdot l=\frac{1}{2}\cdot h\cdot 2h\cdot 40=40h^2$

d 1 liter = 1 dm^3, dus 20 liter water per seconde wil zeggen dat *V* met 20 dm^3 per seconde gevuld wordt, dus $V(t)=20t$.

e $V(h)=V(t)\rightarrow 40h^2=20t\rightarrow h^2=\frac{1}{2}t\rightarrow h=\sqrt{\frac{1}{2}t}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{t}$

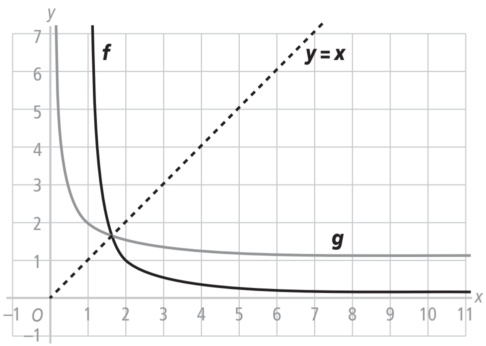
f De snelheid is $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=h'(t)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{t}}$.
Na 1 seconde is de snelheid $h'(1)=\frac{1}{4}\sqrt{2}\approx 0{,}35$ dm/s.
Het reservoir is vol na 4000 : 20 = 200 seconde. De snelheid is dan $h'(200)=\frac{1}{4}\sqrt{0{,}01}=0{,}25\cdot 0{,}1=0{,}025$ dm/s.

36a Het aantal liter water W na t seconden is $400 + 20 \cdot t$.
b $W(t) = 400 + 20t$ met W in liter (= dm^3) en t in seconden.
c $400 + 20t = 40h^2 \rightarrow h^2 = \dfrac{400+20t}{40} = 10 + \frac{1}{2}t \rightarrow h(t) = \sqrt{10 + \frac{1}{2}t}$
d $h(t) = (10 + \frac{1}{2}t)^{\frac{1}{2}}$. De snelheid is $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = h'(t) = \frac{1}{2}(10 + \frac{1}{2}t)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \dfrac{1}{4\sqrt{10 + \frac{1}{2}t}}$.
De snelheid na 10 seconden is $h'(10) = \dfrac{1}{4\sqrt{10 + \frac{1}{2} \cdot 10}} = \dfrac{1}{4\sqrt{15}} \approx 0{,}065$ liter/s.
e $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ voor $t = 150$ is $h'(150) = \dfrac{1}{4\sqrt{10 + \frac{1}{2} \cdot 150}} = \dfrac{1}{4\sqrt{85}} \approx 0{,}027$ liter/s.

37a Na 1 seconde is de hoogte 1500 + 6 = 1506 meter. Na 2 en 3 seconden 1512 en 1518 meter.
b $H(t) = 1500 + 6t$
c Op 1506 meter is de luchtdruk $1013 - 6 \cdot 0{,}095 = 1012{,}43$ millibar.
Op 1512 meter is de luchtdruk $1013 - 12 \cdot 0{,}095 = 1011{,}86$ millibar.
Op 1518 meter is de luchtdruk $1013 - 18 \cdot 0{,}095 = 1011{,}29$ millibar.
d $p(H) = 1013 - 0{,}095(H - 1500) = -0{,}095H + 1155{,}5$
e $p(t) = p(H(t)) = -0{,}095(1500 + 6t) + 1155{,}5 = -0{,}57t + 1013$

bladzijde 87

38a Bij spiegeling van een punt in de lijn $y = x$ verwisselen de coördinaten. Het punt (a, b) krijgt dus als spiegeling het punt (b, a) . Hiermee vind je de volgende tekening:



b Spiegeling in de lijn $y = x$ verwisselt de coördinaten.
I. Voor een punt (x, y) op de grafiek van f geldt $y = f(x)$. Na spiegeling wordt dat het punt (y, x) op de grafiek van g. Maar als (y, x) op de grafiek van g ligt, dan is $g(y) = x$ en met $y = f(x)$ volgt $g(f(x)) = x$.
II. Voor een punt (x, y) op de grafiek van g geldt $y = g(x)$. Na spiegeling wordt dat het punt (y, x) op de grafiek van f. Maar als (y, x) op de grafiek van f ligt, dan is $f(y) = x$ en met $y = g(x)$ volgt $f(g(x)) = x$.
Uit I en II volgt de $g(f(x)) = f(g(x)) = x$.
c $g(x) = x^{-1} + 1 \rightarrow g'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$
De exacte helling van de raaklijn l in het punt $(1, 2)$ is $g'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$.
d De raaklijn l met helling –1 maakt een hoek van –45° met de x-as. Dat is 90° met de lijn $y = x$ dus door een spiegeling in deze lijn verandert de raaklijn niet. De raaklijn m van f in $(1, 2)$ is dus hetzelfde de raaklijn l en de helling blijft –1.

e Uit $g(f(x)) = x$ volgt $\dfrac{1}{f(x)} + 1 = x \to \dfrac{1}{f(x)} = x - 1 \to f(x) = \dfrac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$.

De afgeleide hiervan is met de kettingregel $f'(x) = -(x-1)^{-2} \cdot 1 = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

De helling van p voor $x = a$ op g is $g'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

De helling van q voor $x = g(a)$ op f is

$$f'(g(a)) = -\frac{1}{(g(a)-1)^2} = -\frac{1}{\left(\left(\frac{1}{a}+1\right)-1\right)^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{a^2}} = -a^2.$$

Het product van de hellingen is $g'(a) \cdot f'(g(a)) = -\dfrac{1}{a^2} \cdot -a^2 = 1$.

39a Met de stelling van Pythagoras volgt:
$l_{20} = AP + BP + PT = 2AP + (100 - x) = 2\sqrt{x^2 + 10^2} + (100 - x) = 100 - x + \sqrt{4x^2 + 400}$

b De minimale waarde ligt bij een extreem, dus bereken voor welke x de afgeleide nul is.
$l_{20} = 100 - x + (4x^2 + 400)^{\frac{1}{2}}$
$l_{20}'(x) = -1 + \frac{1}{2}(4x^2 + 400)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = -1 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+400}} = 0 \to \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+400}} = 1 \to 4x = \sqrt{4x^2+400}$

$16x^2 = 4x^2 + 400 \to 12x^2 = 400 \to x^2 = 33\frac{1}{3} \to x = \sqrt{33\frac{1}{3}}$ meter

c $l_{40} = AP + BP + PT = 2AP + (100 - x) = 2\sqrt{x^2 + 20^2} + (100 - x) = 100 - x + \sqrt{4x^2 + 1600}$

De minimale waarde hiervan is:
$l_{40}'(x) = -1 + \frac{1}{2}(4x^2 + 1600)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = -1 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1600}} = 0 \to \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1600}} = 1 \to$
$4x = \sqrt{4x^2+1600} \to 16x^2 = 4x^2 + 1600 \to 12x^2 = 1600 \to x^2 = 133\frac{1}{3} \to x = \sqrt{133\frac{1}{3}}$ meter.

$l_{80} = AP + BP + PT = 2AP + (100 - x) = 2\sqrt{x^2 + 40^2} + (100 - x) = 100 - x + \sqrt{4x^2 + 6400}$
De minimale waarde hiervan is
$l_{80}'(x) = -1 + \frac{1}{2}(4x^2 + 6400)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = -1 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+6400}} = 0 \to \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+6400}} = 1 \to$
$4x = \sqrt{4x^2+6400} \to 16x^2 = 4x^2 + 6400 \to 12x^2 = 6400 \to x^2 = 533\frac{1}{3} \to x = \sqrt{533\frac{1}{3}}$ meter.

d Voor het algemene geval geldt:
$l_a = AP + BP + PT = 2AP + (100 - x) = 2\sqrt{x^2 + (\frac{1}{2}a)^2} + (100 - x) = 100 - x + \sqrt{4x^2 + a^2}$
$l_a'(x) = -1 + \frac{1}{2}(4x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = -1 + \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+a^2}} = 0 \to \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+a^2}} = 1 \to 4x = \sqrt{4x^2+a^2}$

$16x^2 = 4x^2 + a^2 \to 12x^2 = a^2 \to x^2 = \dfrac{a^2}{12} \to x = \dfrac{a}{\sqrt{12}}$.

De optimale waarde voor x is dus $x_{opt} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}a$.

e Omdat gegeven is dat $0 < x < 100$ geldt ook $x_{opt} < 100$, dus $\dfrac{1}{\sqrt{12}}a < 100 \to a < 100\sqrt{12}$.

f Noem M het midden van AB. In de optimale situatie heeft ΔAPM een zijde
$AM = \frac{1}{2}a$ en $MP = x_{opt} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}a$.
Omdat $\angle AMP = 90°$ is

$$\tan \angle APM = \frac{AM}{MP} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{\sqrt{12}}a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{12} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{3} = \sqrt{3} \to \angle APM = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60°$$

$\angle APB = 2 \times \angle APM = 2 \times 60° = 120°$.

ICT Kettingfuncties

bladzijde 88

I-1a Gebruik de knop 'Uitkomst en helling', vul 5 in en lees af $V = 950$ m^3.
b Open het nieuwe bestand met de *volume-hoogte* grafiek. Gebruik de knop 'Uitkomst en helling', vul $V = 950$ in (het volume op tijdstip $t = 5$) en lees af hoogte $H = 15{,}1$ dm.
c Open het nieuwe bestand met de *tijd-hoogte* grafiek. In de *tijd-hoogte* grafiek hoort bij dag 5 een hoogte $15{,}05 \approx 15{,}1$ dm. Je hebt dus het punt (5; 15,1) van de grafiek gevonden.
d Bij $t = 3$ bijvoorbeeld hoort $V = 1300$ en bij $V = 1300$ hoort $H = 15{,}46 \approx 15{,}5$.
e Er zijn drie verschillende assen: *tijd*, *volume* en *hoogte*. Alleen grafieken waarvan beide assen gelijk zijn kun je in één assenstelsel tekenen.

I-2a $f(3) = 3^2 - 4 = 5$; $g(5) = \sqrt{5}$, dus $k(3) = \sqrt{5}$.
b Het domein van k is $\langle \leftarrow, -2]$ en $[2, \rightarrow\rangle$. Voor het interval $\langle -2,\ 2\rangle$ is f negatief. De wortel van f bestaat dus niet en k evenmin.
c $k(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Gebruik de formuleknop door deze functie in VU-Grafiek in te voeren. Je ziet dat hij samenvalt met de grafiek van k.

I-3a $g(3) = \sqrt{3}$; $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 4 = 3 - 4 = -1$, dus $h(3) = -1$.
b Het domein van h is $[0, \rightarrow\rangle$. Voor het interval $\langle \leftarrow,\ 0\rangle$ bestaat de wortel niet en g dus ook niet. De functie h bestaat daarom evenmin.
c $h(x) = (\sqrt{x})^2 - 4 = x - 4$. Gebruik de formuleknop door deze functie in VU-Grafiek in te voeren. Je ziet dat hij samenvalt met de grafiek van h.

bladzijde 89

I-4a De functies $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \dfrac{1}{x}$ zijn standaardfuncties, dus een schets ervan ken je.
b De grafiek van g heeft een verticale asymptoot voor $x = 0$. Overal waar $\sin(x) = 0$ heeft de grafiek van $h(x) = g(f(x))$ een verticale asymptoot. Dat geldt voor $x = ..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...$. Die verticale asymptoten schets je alvast.
De waarde van de sinus varieert tussen –1 en 1 tussen de nulpunten. Voor de x-waarden die hierbij horen heeft g de waarde –1 en 1. Deze punten van h teken je ook in je schets en trekt de lijn van de grafiek van h hierdoor en tussen de asymptoten.
Ter controle teken je de grafiek van $h(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ in VU-Grafiek.
c De grafiek van f varieert tussen –1 en 1. De grafiek van k heeft deze begrenzing dus ook. De grafiek van k heeft meer kenmerken van de sinus zoals de nulpunten tussen de grenswaarden –1 en 1 en het golvend verloop. De x-waarden voor de sinus worden bij k geleverd door g waar een verticale asymptoot bestaat voor $x = 0$. Rond $x = 0$ verandert de grafiek van g zeer sterk. De sinus zal rond $x = 0$ dus zeer sterk 'golven'. Hoe verder je van $x = 0$ verwijdert des te langzamer verandert g en gaat k steeds minder 'golven'.
Ter controle teken je de grafiek van $k(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ in VU-Grafiek.

I-5a $f(x)=\sin x$ en $g(x)=x^2$ want $h(x)=g(f(x))=(\sin x)^2=\sin^2 x$.
De grafiek van *f* is nooit negatief. De grafiek van *g* varieert tussen –1 en 1 met daartussen de nulpunten voor $x=...,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,...$ Bij deze nulpunten is *h* dus ook nul en varieert de grafiek van *h* ertussen naar +1.

b $f(x)=x^2-4$ en $g(x)=\frac{2}{x}$ want $h(x)=g(f(x))=\frac{2}{x^2-4}$.
De grafiek van *g* is een parabool die –4 naar beneden geschoven is en nulpunten heeft voor $x=-2$ en $x=2$.
Bij deze nulpunten bestaat *f* niet en heeft *h* een verticale asymptoot. Verder is *g* symmetrisch in de *y*-as dus is *h* dat ook. Voor $x=0$ heeft *h* de waarde –0,5. Teken dat punt in je schets en voeg de asymptoten toe. Teken de grafiek van *h* door het punt en tussen de asymptoten.

I-6a $h(x)=g(f(x))=2-\frac{1}{2}(4x-3)=2-2x+1\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}-2x$
b $k(x)=f(g(x))=4(2-\frac{1}{2}x)-3=8-2x-3=5-2x$
c De grafieken van *h* en *k* zijn weer rechte lijnen. De helling van de lijnen is in beide gevallen –2. Dat is de vermenigvuldiging van de hellingen van de lineaire functies waar *h* en *k* uit samengesteld zijn: $4\cdot-\frac{1}{2}=-2$. De lijnen zijn dus evenwijdig.

I-7a Verander *a* en *p* met de schuif en je ziet dat voor alle waarden van *a* en *p* de kettingfuncties *h* en *k* rechte lijnen zijn die parallel blijven lopen, dus dezelfde helling hebben. De waarde van *b* en *q* laten de kettingfuncties iets verschuiven maar hebben geen invloed op de helling.
b $h(x)=g(f(x))=p(ax+b)+q=pa\cdot x+pb+q$
$k(x)=f(g(x))=a(px+q)+b=ap\cdot x+aq+b$
De helling van de kettingfuncties *h* en *k* is alleen het product van *a* en *p*, dus van de hellingen van de afzonderlijke schakels.

ICT Kettingregel

bladzijde 90

I-8a Selecteer alleen de formule. Gebruik de knop ‘Uitkomst en helling’, vul 5 in en lees af $V=937{,}5$ en de helling $=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=337{,}5$.
De waarde betekent dat het volume op dag 5 met 337,5 m^3 toeneemt per dag.
b Open het nieuwe bestand met de *volume-hoogte* grafiek. Selecteer alleen de formule. Gebruik de knop ‘Uitkomst en helling’, vul 937,5 in (het volume op tijdstip $t=5$) en lees af $H=15{,}06$ en helling $=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}V}=0{,}0016$.
De waarde betekent dat de hoogte bij 937,5 m^3 met 0,0016 dm toeneemt per m^3.
c Schrijf $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ als vermenigvuldiging van afgeleiden: $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}V}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$.
(vergelijk dit bijvoorbeeld met het schrijven van $\frac{a}{b}$ als $\frac{a}{b}=\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{b}$)
Met de waarden voor $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}V}=0{,}0016$ en $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=337{,}5$ geeft dat
$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0{,}0016\cdot337{,}5=0{,}54$.

Open het nieuwe bestand met de *tijd-hoogte* grafiek. Selecteer alleen de formule. Gebruik de knop ‘Uitkomst en helling’, vul 5 in en lees af H = 15,06 en helling = $\frac{dH}{dt} = 0,55$.

De afwijking in beide uitkomsten ontstaat door de wijze waarop VU-grafiek de hellingen benadert.

d Het verband heb je al gebruikt bij vraag c en luidt $\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dV} \cdot \frac{dV}{dt}$.

I-9a Voor $p = 3$, $q = 0,25$ en $r = 0,75$ veranderen de lijnen in raaklijnen.

b $p \cdot q = r$ want $3 \cdot 0,25 = 0,75$

c h is de kettingfunctie van f en g volgens $h(x) = g(f(x))$. Bij het punt $(2, \sqrt{8})$ op h hoort het punt $(2, 8)$ op f en $(8, \sqrt{8})$ op g. De afgeleide van f is $f'(x) = 2x + 1$ en de afgeleide van g is $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. De helling van f in $(2, 8)$ is $f'(2) = 5$ en de helling van g in $(8, \sqrt{8})$ is $g'(8) = \frac{1}{2\sqrt{8}}$. Als je weer de hellingen met elkaar mag vermenigvuldigen volgens de manier van opdracht b is de helling van h gelijk aan $f'(2) \cdot g'(8) = \frac{5}{2\sqrt{8}} \approx 0,8839$.

Controle: gebruik de knop ‘Lijst van formules en tabellen’. Selecteer alleen formule h.

Gebruik de knop ‘Uitkomst en helling’, vul $x = 2$ in en lees af: helling = 0,8839.

d De hellingen van de grafiek van een kettingfunctie vind je door de afgeleiden van de samenstellende functies met elkaar te vermenigvuldigen.

bladzijde 91

I-10a $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = x^5$ en $h(x) = 2x - 4$

$g'(x) = 5x^4$ dus $g'(h(x)) = 5(2x-4)^4$

$h'(x) = 2$

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 5(2x-4)^4 \cdot 2 = 10(2x-4)^4$

b $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = x^3$ en $h(x) = 3x^2 + x$

$g'(x) = 3x^2$ dus $g'(h(x)) = 3(3x^2 + x)^2$

$h'(x) = 6x + 1$

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x + 1)$

c $f(x) = g(h(x))$ met $g(x) = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$ en $h(x) = 3x - 2$

$g'(x) = -4x^{-3}$ dus $g'(h(x)) = -4(3x-2)^{-3}$

$h'(x) = 3$

$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -4(3x-2)^{-3} \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^3}$

d Van de gegeven $f(x)$ is alleen het eerste deel te schrijven als een kettingfunctie. Splits de formule voor $f(x)$ dus in de som van de kettingfunctie $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ en de functie $h(x) = 3x$. Je kunt voor de afgeleide van $f(x)$ dan g' en h' bij elkaar optellen (somregel voor afgeleiden).

De functie g is op te vatten als een samenstelling van de formules $p = \sqrt{q}$ en $q = x^2 - x$.

De afgeleide van g is

$$g'(x) = p'(q) \cdot q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \cdot (2x-1) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

De afgeleide van h is $h'(x) = 3$.

De afgeleide van $f(x)$ is dus $f'(x) = g' + h' = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x}} + 3$.

e Splits de formule voor $f(x)$ in de kettingfuncties $g(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 2}$ en $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Je kunt voor de afgeleide van $f(x)$ dan g' en h' bij elkaar optellen (somregel voor afgeleiden).

De functie g is op te vatten als een samenstelling van de formules $p = \dfrac{1}{q}$ en $q = 2x^2 + 2$.

De functie h is op te vatten als een samenstelling van de formules $r = \sqrt{s}$ en $s = x^2 - 1$.

De afgeleide van g is $g'(x) = p'(q) \cdot q'(x) = \dfrac{-1}{q^2} \cdot 4x = \dfrac{-1}{(2x^2+2)^2} \cdot 4x = \dfrac{-4x}{(2x^2+2)^2}$

De afgeleide van h is

$$h'(x) = r'(s) \cdot s'(x) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

De afgeleide van $f(x)$ is dus $f'(x) = g' + h' = -\dfrac{4x}{(2x^2+2)^2} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

I-11a $f(x) = x^2 - 2x$ en $g(x) = x^{-2}$

b $k'(x) = -2(x^2 - 2x)^{-3} \cdot (2x-2)$. De nulpunten volgen uit $k'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$.

c De extreme waarde bij $x = 1$ van k is $k(1) = (1^2 - 2 \cdot 1)^{-2} = 1$.

d $f(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ is een dalparabool met nulpunten $x = 0$ en $x = 2$.
Tussen de nulpunten heeft een parabool de top, dus een extreme waarde. De x-waarde tussen 0 en 2 is 1, dus voor $x = 1$ heeft f een extreme waarde.
De afgeleide van de kettingfunctie is het product van de afgeleiden van de samenstellende functies. Als één van de afgeleiden nul is dan is het product ook nul. Dus als f een extreem voor $x = 1$ heeft moet de kettingfunctie daar ook een extreem hebben.

I-12a Omdat $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$ voor $x = -1$ en $x = 3$ gaat elke grafiek door de punten $(-1, 0)$ en $(3, 0)$.

b Uit de kettingregel volgt de afgeleide $f_n'(x) = 0{,}1 \cdot n(x^2 - 2x - 3)^{n-1} \cdot (2x-2)$. In de vermenigvuldiging van functies die hier staat is $(2x-2) = 0$ voor $x = 1$ en dus wordt het product ook 0. De term $(x^2 - 2x - 3)^{n-1}$ is 0 voor $x = -1$ en $x = 3$ (zie a) en ook onafhankelijk van n voor gehele waarden groter dan 1. Alle afgeleiden van f_n hebben dus drie nulpunten voor elke geldige waarde van n.

c Voor bijvoorbeeld bij $n = 3$ zie je in de plot dat f_3 een buigpunt heeft voor $x = -1$.
De afgeleide voor $n = 3$ is $f_3'(x) = 0{,}3 \cdot (x^2 - 2x - 3)^2 \cdot (2x-2)$. Het kwadraat is altijd positief maar $2x - 2$ is rond $x = -1$ negatief. Rond het nulpunt $x = -1$ heeft f_3' dus geen tekenwisseling en verandert f_n niet van dalend in stijgend. Er is bij deze n voor $x = -1$ dus geen extreme waarde maar alleen een buigpunt. Ga na dat dit geldt voor elke oneven waarde van n.

I-13a De grafiek gaat steeds door het punt $(0, 8)$.
Voor $a > 0$ is de grafiek steeds stijgend. Voor $a < 0$ is de grafiek steeds dalend.
De grafiek bezit voor $a \neq 0$ steeds een buigpunt.

b De grafiek gaat steeds door het punt $(0, 8)$. Als $x = 0$ is $f_a(0) = (a \cdot 0 + 2)^3 = 2^3 = 8$ en onafhankelijk van de waarde van a.

c Voor $a > 0$ is de grafiek steeds stijgend.
De afgeleide van f is volgens de kettingregel $f_a'(x) = 3(ax+2)^2 \cdot a = 3a(ax+2)^2$
Dat is de functie van een parabool. De waarde is steeds positief als $a > 0$. De helling van f is dus steeds positief en f is altijd stijgend.

d Voor een buigpunt geldt $f''(x) = 0$. Oplossen geeft

$$f''(x) = 3a \cdot 2(ax+2) \cdot a = 6a(ax+2) = 0 \rightarrow ax + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{a}$$

De y-waarde die hierbij hoort is $f(-\frac{2}{a}) = (a \cdot -\frac{2}{a} + 2)^3 = (-2+2)^3 = 0^3 = 0$. Alle buigpunten liggen dus op de x-as.

Test jezelf

bladzijde 94

T-1a $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \tfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

b $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{2+\frac{1}{3}} = x^{2\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 2\tfrac{1}{3}x^{1\frac{1}{3}} = 2\tfrac{1}{3}x \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2\tfrac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$$

c $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -1\tfrac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = -1\tfrac{1}{2}x^{-2-\frac{1}{2}} =$$

$$-\tfrac{3}{2}x^{-2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

d $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}}$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

e $f(x) = (2x - \sqrt{x})^2 = (2x - \sqrt{x})(2x - \sqrt{x}) =$

$$4x^2 - 4x\sqrt{x} + x = 4x^2 - 4x^{1\frac{1}{2}} + x$$

$$f'(x) = 8x - 4 \cdot 1\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 = 8x - 6\sqrt{x} + 1$$

f $f(x) = \left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\left(x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) =$

$$x^2 + \frac{4x}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} = x^2 + 4\sqrt{x} + \frac{4}{x} = x^2 + 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 2x + 2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-2} = 2x + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}$$

T-2a De helling is 0 als $f'(x)=0$. Oplossen geeft:

$f'(x) = -2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \rightarrow \frac{1}{2} = 2\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \rightarrow x = (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$

$f(\frac{1}{16}) = -2 \cdot \frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

De helling is 0 in het punt $(\frac{1}{16}, \frac{1}{8})$.

b De helling is –1 als $f'(x) = -1$. Oplossen geeft:

$f'(x) = -2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -1 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \rightarrow 1 = 2\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

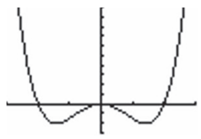
$f(\frac{1}{4}) = -2 \cdot \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

De helling is –1 in het punt $(\frac{1}{4}, 0)$.

c De raaklijn in $(\frac{1}{4}, 0)$ heeft helling –1 dus de vergelijking wordt alvast
$y = -1 \cdot x + b = -x + b$.
Invullen van de coördinaten van het punt geeft $0 = -\frac{1}{4} + b \rightarrow b = \frac{1}{4}$.
De vergelijking van de raaklijn is dus $y = -x + \frac{1}{4}$.

T-3a Voor de nulpunten geldt $f(x) = 0$. Oplossen geeft
$\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 = x^2(\frac{1}{2}x^2 - 2) = 0 \rightarrow x^2 = 0$ of $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = 0$ of $x^2 = 4 \rightarrow$
$x = 0$ of $x = 2$ of $x = -2$.

b



Plot
Invoer: Y1 = 0.5X^4–2X²
Venster: Xmin = –3 ; Xmax = 3
Ymin = –3 ; Ymax = 10

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2)$
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow x = 0$ of $x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = 0$ of $x^2 = 2 \rightarrow$
$x = 0$ of $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$
De uiterste waarde bij $x = 0$ is $f(0) = 0$.
De uiterste waarde bij $x = \sqrt{2}$ is $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2$.
De uiterste waarde bij $x = -\sqrt{2}$ is $f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2$.

T-4a $s'(t) = -0{,}00045t^2 + 0{,}034t + 0{,}116$
$s''(t) = -0{,}0009t + 0{,}034$
$s''(t) = 0 \rightarrow -0{,}0009t + 0{,}034 = 0 \rightarrow t = \dfrac{0{,}034}{0{,}0009} = 37{,}78$
$s(37{,}78) = -0{,}00015 \cdot 37{,}78^3 + 0{,}017 \cdot 37{,}78^2 + 0{,}116 \cdot 37{,}78 \approx 20{,}56$
Het buigpunt ligt op (37,78; 20,56).

b Na 37,78 minuten heeft zij 20,56 km afgelegd en bereikt daar haar grootste snelheid.

T-5a $k(x) = g(f(x)) = \sqrt{2 - 3x}$

b $m(x) = f(g(x)) = 2 - 3\sqrt{x}$

c $x \xrightarrow{\times\ -3} -3x \xrightarrow{+2} 2 - 3x \xrightarrow{\sqrt{\ldots}} k(x) = \sqrt{2 - 3x}$

bladzijde 95

T-6a $f'(x)=3(2x^2-4)^2\cdot(4x)=12x(2x^2-4)^2$

b $f'(x)=0 \Rightarrow 12x(2x^2-4)^2=0 \Rightarrow 12x=0$ of $2x^2-4=0 \Rightarrow x=0$ of $x^2=2 \Rightarrow$
$x=0$ of $x=\sqrt{2}$ of $x=-\sqrt{2}$
$f(0)=-64$; $f(\sqrt{2})=12\sqrt{2}(2\cdot 2-4)^2=0$; $f(-\sqrt{2})=-12\sqrt{2}(2\cdot 2-4)^2=0$
De coördinaten van de punten met helling 0 zijn $(0,-64)$, $(\sqrt{2},0)$ en $(-\sqrt{2},0)$.

T-7a *f* is samengesteld uit de functies $p(x)=\sqrt{x}$ en $q(x)=2x+3$ want $f(x)=p(q(x))$.

b $p'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $q'(x)=2$. Met de kettingregel volgt hiermee
$f'(x)=p'(q(x))\cdot q'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{q(x)}}\cdot 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

c a) *h* is samengesteld uit de functies $p(x)=\sqrt{x}$ en $q(x)=x^3+x$ want $h(x)=p(q(x))$.
b) $p'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $q'(x)=3x^2+1$. Met de kettingregel volgt hiermee
$h'(x)=p'(q(x))\cdot q'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{q(x)}}\cdot(3x^2+1)=\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$.

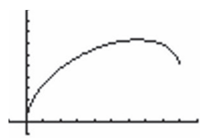
T-8a Bij een prijs van € 3,- per doos is de afzet de oplossing van $3=\dfrac{20\,000}{q+500}$. Oplossen geeft
$q+500=\dfrac{20\,000}{3} \to q=\dfrac{20\,000}{3}-500=6167$ dozen.

b De verkoop van 6167 dozen van € 3,- per doos levert 6167 · 3 = 18 501 euro op.
De kosten zijn $K=0,75(50+q)=0,75(50+6167)=4662,75$ euro.
De winst is 18 501 – 4662,75 = 13 838,25 euro.

c Uit $p=\dfrac{20\,000}{q+500}$ volgt $q=\dfrac{20\,000}{p}-500$. Invullen in de formule voor *K* geeft
$K(p)=0,75(50+\dfrac{20\,000}{p}-500)=\dfrac{15\,000}{p}-337,5$.

d De winst is
$W(p)=p\cdot q-K(p)=p(\dfrac{20\,000}{p}-500)-(\dfrac{15\,000}{p}-337,5)=20\,337,5-500p-\dfrac{15\,000}{p}$
De winst is maximaal als $W'(p)=0$
$W'(p)=-500+\dfrac{15\,000}{p^2}=0 \to p^2=30 \to p=\sqrt{30}\approx 5,48$ euro.
De maximale winst is $W(5,48)\approx 14\,860$ euro.

T-9a



Plot
Invoer: Y1 = 0.5X+√(9X–X²)
Venster: Xmin = –1 ; Xmax = 10
Ymin = –1 ; Ymax = 10

b De waarde onder de wortel moet nul of positief zijn. Dat is alleen het geval als *x* tussen 0 en 9 ligt. Het domein is dus [0, 9].

c Er is een randpunt voor $x=0$ en $x=9$. De coördinaten hierbij zijn $(0,0)$ en $(9, 4\frac{1}{2})$.

d $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(9x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(9-2x)=\frac{1}{2}+\dfrac{9-2x}{2\sqrt{9x-x^2}}$

e Voor het maximum geldt $f'(x)=0$. Oplossing:

$f'(x)=\frac{1}{2}+\dfrac{9-2x}{2\sqrt{9x-x^2}}=0 \Rightarrow \dfrac{9-2x}{2\sqrt{9x-x^2}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 9-2x=-\sqrt{9x-x^2} \xrightarrow[\text{oplossing controleren!}]{\text{kwadrateren dus}}$

$(9-2x)^2=9x-x^2 \Rightarrow 81-36x+4x^2=9x-x^2 \Rightarrow 5x^2-45x+81=0$

Met de *abc*-formule volgt $x=\dfrac{45+\sqrt{405}}{10}\approx 6{,}512$ of $x=\dfrac{45-\sqrt{405}}{10}\approx 2{,}488$ (voldoet niet)

De exacte x-coördinaat van het maximum is dus

$x=\dfrac{45+\sqrt{405}}{10}=\dfrac{45+\sqrt{81\cdot 5}}{10}=4{,}5+0{,}9\sqrt{5}$

f $f(4\frac{1}{2})=6\frac{3}{4}$. Het punt heeft dus als coördinaten $(4\frac{1}{2},6\frac{3}{4})$. Met de helling in het punt volgens $f'(4\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ wordt de vergelijking van de raaklijn alvast $y=\frac{1}{2}x+b$. Invullen van de coördinaten geeft $6\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{2}+b \rightarrow b=4\frac{1}{2}$.
De vergelijking van de raaklijn is dus $y=\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}$.

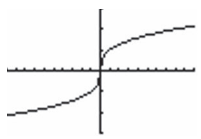
T-10a $H'(t)=\frac{1}{2}(0{,}025t^2+1000)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0{,}05t)=\dfrac{0{,}025t}{\sqrt{0{,}025t^2+1000}}$.

De hoogte verandert met een snelheid van

$H'(300)\approx 0{,}132$ cm/s na 300 seconden.
$H'(600)=0{,}15$ cm/s na 600 seconden.

b $H'(t)=\dfrac{0{,}025t}{\sqrt{0{,}025t^2+1000}}=0{,}1$. Oplossen met de rekenmachine geeft $t\approx 163{,}3$ seconde.
De grafiek van $H'(t)$ is steeds stijgend, dus vanaf 163,3 seconden neemt de snelheid sneller toe dan 0,1 cm/s.

T-11a



Plot
Invoer: Y1 = X^(1/3)
Venster: Xmin = –10 ; Xmax = 10
Ymin = –3 ; Ymax = 3

b De oorsprong is een buigpunt. De raaklijn loopt daar verticaal.

c De grafiek verandert van hol in bol of omgekeerd.