Hoofdstuk 6 - Cirkeleigenschappen

Voorkennis: hoeken en cirkels

bladzijde 156

V-1a $\angle A = \angle B = 2 \times 34° = 68°$; dus $\angle C = 44°$

b $\angle ASC = 180° - 34° - 22° = 124° = \angle DSE$. Dus $\angle CSE = \angle ASD = 56°$
$\angle CES = 180° - 22° - 56° = 102°$. Dus $\angle SEB = 78°$.

V-2 $\angle A + \alpha = 360°$. Ook geldt $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Dus $\alpha = \angle B + \angle C + \angle D$.

V-3a Er geldt: $\begin{cases} \angle B_1 = 180° - \angle B_2 \\ \angle B_1 = 180° - (\angle A_1 + \angle C_1) \end{cases} \Rightarrow \angle B_2 = \angle A_1 + \angle C_1$

b $\angle A_2 = \angle B_1 + \angle C_1$ en $\angle C_2 = \angle A_1 + \angle B_1$

c $\angle A_2 + \angle B_2 + \angle C_2 = (\angle B_1 + \angle C_1) + (\angle A_1 + \angle C_1) + (\angle A_1 + \angle B_1) =$
$2\angle A_1 + 2\angle B_1 + 2\angle C_1 = 2(\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1) = 2 \times 180° = 360°$

V-4a In $\triangle AFD$ geldt: $FA = FD \Rightarrow \angle A = \angle D = 60°$ dus ook $\angle F = 60°$. Dus $\triangle AFD$ is gelijkzijdig. Net zo valt te bewijzen dat $\triangle BFE$ gelijkzijdig is.

b De driehoeken AFD en ABC zijn gelijkzijdig, dus $DA = DF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$. Net zo is te bewijzen dat $BE = \frac{1}{2}BC$. Dus D en E zijn de middens van AC en BC .

c $30°$; $90°$

V-5a In $\triangle AMD$ geldt: $MA = MD$ dus $\angle A = \angle D = \alpha$.
Dus $\angle M = 180 - 2\alpha$, dus $\angle BMD = 2\alpha$.
Ook geldt $\angle BMC = \angle A = \alpha$ (F-hoeken), dus MC is bissectrice van $\angle BMD$.

b $\triangle AMD \cong \triangle BME$ want straal cirkel, $MD = ME =$ straal cirkel en $\angle AMD = \angle BME$ (overstaande hoeken), ZHZ, dus $\angle BEM = \angle CAM$. Hieruit volgt dat $EB // AD$ (Z-hoeken).

c $\angle BED = \frac{1}{2}\angle BMD$

bladzijde 157

V-6 De raaklijnen staan loodrecht op de stralen MS en MR . In vierhoek $PRMS$ zijn de hoeken R en S dus samen $180°$, dus geldt ook dat $\angle P + \angle M = 180°$.

V-7 Omdat $MR \perp AB$ (eigenschap raaklijn) en $MA = MB =$ straal grote cirkel.

V-8a Hoekensom 8-hoek is $1080°$. Dus $\angle BAH = \dfrac{1080}{8} = 135°$.

b $45°$; $\dfrac{135}{2} - 45 = 22{,}5°$

c $\angle AMF = (90 + 45) = 135°$ dus $\angle MAF = \dfrac{180 - 135}{2} = 22{,}5°$

d $\angle EMF = 45° \Rightarrow \angle EFM = \dfrac{180 - 45}{2} = 67{,}5°$
Dus $\angle AFE = \angle AFM + \angle EFM = 22{,}5 + 67{,}5 = 90°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

V-9a Omdat DE middenparallel is.

b Rechthoek want $|DE| = |AF|$ (gevolg middenparallel) en $DE // AF$ met verder nog $\angle A = 90°$ (geg). Dus vierhoek $ADEF$ is parallellogram met een rechte hoek, dus een rechthoek.

c Volgens de omgekeerde stelling van Thales gaat er een cirkel door driehoek ADE met middellijn AE. Het zelfde geldt voor de driehoeken AEG en AEF. Dus alle genoemde punten liggen op deze cirkel.

d Het midden van AE.

6.1 Hoeken en bogen

bladzijde 158

1a $85°$

b $\text{bg } A_1B_1 = \frac{85}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 \approx 4,45$ en $\text{bg } A_2B_2 = \frac{85}{360} \cdot 2\pi \cdot 4 \approx 5,93$

c $140°$

d 2 keer een draaiing van $85°$, 2 keer een draaiing van $140°$ en 2 keer een hoek van $135°$.

2a Omdat $MA = MB$.

b $\angle ACM = \frac{180 - 100}{2} = 40°$

c $\text{bg } AB = 80°$

d $\angle C = \frac{1}{2}\text{bg}AB$ en $\angle B = \frac{1}{2}\text{bg}CA$.

e Stel $\angle AMC = \alpha \Rightarrow \angle AMB = 180° - \alpha$. Dus $\text{bg } AB = 180° - \alpha$.

Verder geldt dat $\angle C = \frac{180 - \alpha}{2} = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Dus $\text{bg } AB = 2\angle C$.

bladzijde 159

3a Noem het snijpunt van CM met de cirkel D. Uit opgave 2 volgt $\text{bg } AD = 2\angle ACM$ en $\text{bg } DB = 2\angle BMC$, dus $\text{bg } AB = \angle AMB = 2\angle ACB$.

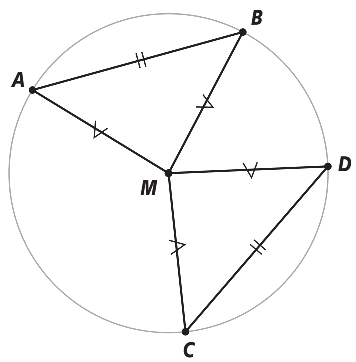
b Trek CM, deze snijdt de cirkel in D. Uit opgave 2 volgt $\text{bg } DA = 2\angle DCA$ en bg $BC = 2\angle CDB$.

$\text{bg } AB = 180° - \text{bg}DA - \text{bg}BC = 180° - 2\angle DCA - 2\angle CDB$.

Dus $\angle AMB = 2(90° - \angle DCA - \angle CDB) = 2(90° - \angle DCA - (90° - \angle DCB))$ (immers $\angle DBC = 90°$, Thales)

Dus $\angle AMB = 2(90° - \angle DCA - 90° + \angle DCB) = 2(-\angle DCA + \angle DCA + \angle ACB) = 2\angle ACB$

4a

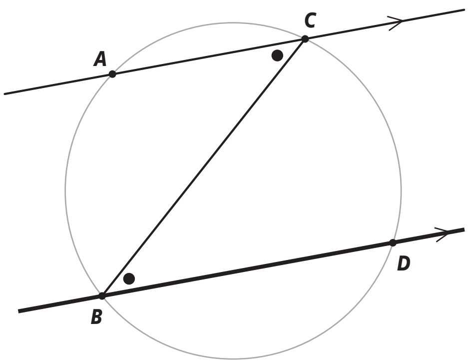


© Noordhoff Uitgevers bv

b De driehoeken MAB en MCD zijn congruent, want $MA = MB = MC = MD$ en $\angle AMB = \angle CMD$ (immers gelijk aan de gelijke bogen); ZHZ
Dus $|AB| = |CD|$.

c De driehoeken zijn dan congruent volgens ZZZ en daaruit volgt de gelijkheid van de beide middelpuntshoeken en derhalve de gelijkheid van de bijbehorende bogen AB en CD.

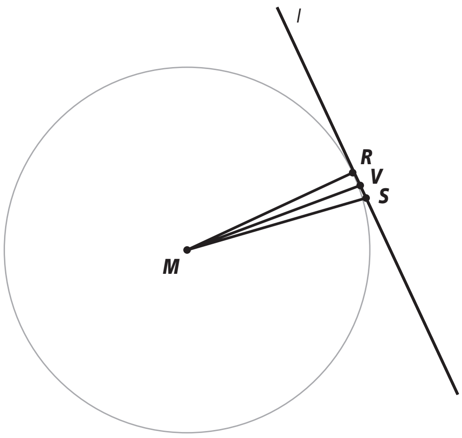
5a



$\angle CBD = \angle BCA$ (Z-hoeken) ; bij gelijke hoeken horen gelijke bogen, dus $\text{bg}AB = \text{bg}CD$.

b Als de bogen AB en CD gelijk zijn betekent dit dat de bijbehorende omtrekshoeken $\angle BCA$ en $\angle CBD$ gelijk zijn. Hieruit volgt dat l en m evenwijdig zijn (Z-hoeken).

6a



b Zie hierboven.

c De driehoeken MRV en MSV zijn congruent volgens ZZZ want:

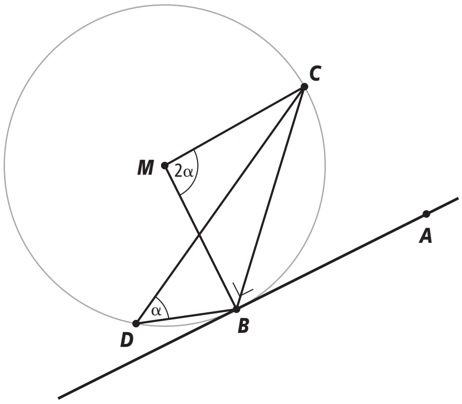
$$\begin{cases} RV = SV (\text{geg}) \\ MV = MV \\ \angle R_1 = \angle R_2 = 90^\circ \end{cases}$$

Uit deze congruentie volgt dat $MR = MS$ dus S ook op de cirkel.

d Dit laatste kan niet want dit zou betekenen dat de raaklijn in R de cirkel ook nog in S snijdt.

© Noordhoff Uitgevers bv

7a



Teken een bij de koorde horende omtrekshoek.

b Die hoek is $90°$.

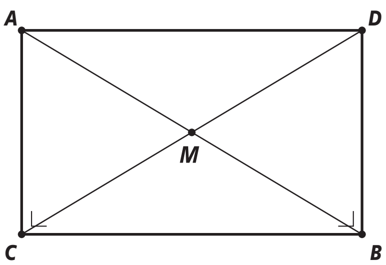
c Stel $\angle BDC = \alpha \Rightarrow \angle BMC = 2\alpha$; hieruit en omdat $MB = MC$ volgt dat

$\angle MBC = \dfrac{180 - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$. Dus $\angle ABC = 90° - (90° - \alpha) = \alpha = \frac{1}{2}\angle BMC$.

6.2 De constante hoek

bladzijde 160

8a



b -

c $MA = MB = MC$

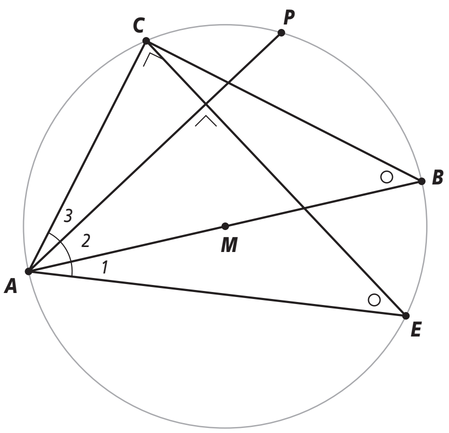
d $AB = CD$ (eigenschap rechthoek); dus zijn de halve diagonalen ook gelijk en omdat de diagonalen elkaar ook middendoor delen geldt $MA = MB = MC$.

9a Omtrekshoek C is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek M, dus gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

b Het midden.

c De helft.

10a



© Noordhoff Uitgevers bv

b $\angle ACB$, $\angle APB$ en $\angle AEB$

c AC, BC en AE

d $\angle B = \angle E = \frac{1}{2}\angle AMC = \circ$

$\begin{matrix}\angle A_2 + \angle A_3 = 90 - \circ \\ \angle A_2 + \angle A_1 = 90 - \circ\end{matrix}$ (Thales en $AP \perp CE$). Dus $\angle A_1 = \angle A_3 \Rightarrow \text{bg}CP = \text{bg}BE$.

bladzijde 161

11a $\frac{1}{2}\angle AMB$

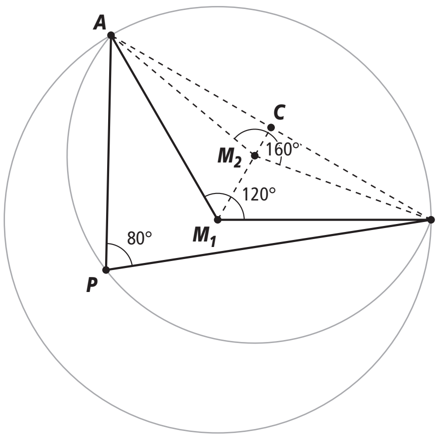
b F-hoeken.

c Met Q_1 binnen de cirkel bestaat een driehoek BQE en er kunnen geen twee zijden van een driehoek evenwijdig zijn. Dus Q binnen de cirkel kan niet.

d Zie b en c.

e Punt Q ligt op de cirkel.

12a

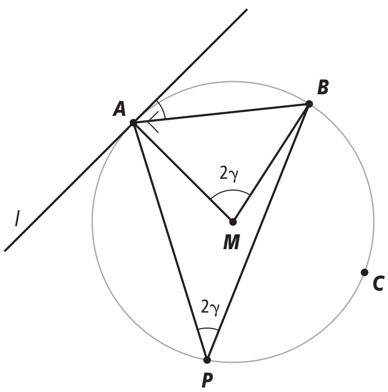


b Toelichting: $\angle AM_2B$ is dan $160°$. Dus zijn de hoeken bij A en B gelijk aan $10°$.
Hieruit volgt de ligging van het middelpunt M_2 . De straal is de lengte van M_2A .

c De straal is $|M_2A|$. Er geldt: $|AC| = 4 \cdot \sin 60° \approx 3{,}4641...$ en

$$\sin 80° = \frac{|AC|}{|M_2A|} = \frac{3{,}4641...}{|M_2A|}, \text{ dus } |M_2A| = 3{,}4641... \times \sin 80° \approx 3{,}52 .$$

13a



$$\angle AMB = 2\gamma,\ \angle MBA = \angle MAB = \frac{180 - 2\gamma}{2} = 90° - \gamma$$

b $90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$

c $\gamma = 40^\circ \Rightarrow \angle AMB = 80^\circ$ en dus geldt: $\angle MBA = \angle MAB = 50^\circ$.
Dus: teken het lijnstuk AB met lengte 4 cm. Teken door A en B lijnen l en m die hoeken van 50° met AB maken. Het snijpunt van de lijnen l en m is het punt M.

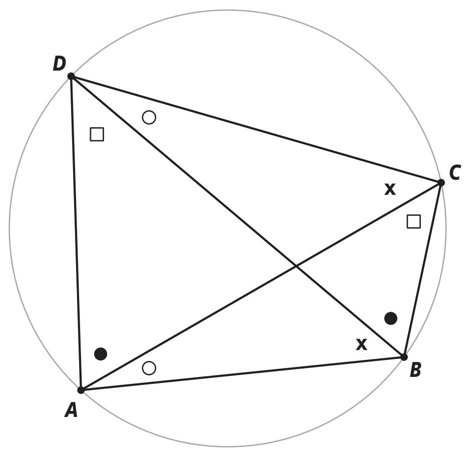
6.3 Koordenvierhoeken

bladzijde 162

14a Gegeven: vierhoek $ABCD$.
Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

b Beide zijn 90° (Thales); ja dan samen immers 180°. Ook samen 180°.

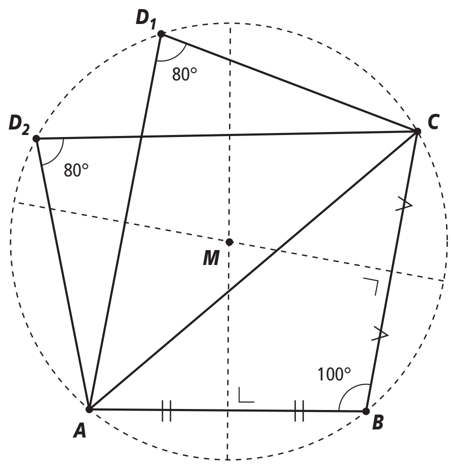
c



Zie tekening waarin gelijke hoeken zijn aangegeven. Steeds omtrekshoeken op een zelfde koorde. Omdat de som van de hoeken van een vierhoek gelijk is aan 360°, geldt: $2\times + 2\circ + 2\bullet + 2\square = 360^\circ$.
Hieruit volgt: $\times + \circ + \bullet + \square = 180^\circ$ en dus $\angle A + \angle C = 180^\circ$ en $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

15ab Zie de figuur bij 14c.

16a



b $\angle B + \angle D = 180^\circ$ dus vierhoek $ABCD$ is koordenvierhoek. De omgeschreven cirkel van driehoek ABC gaat dus ook door D. Construeer het middelpunt van deze cirkel door de middelloodlijnen van AB en BC te snijden.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Zie de figuur bij a.

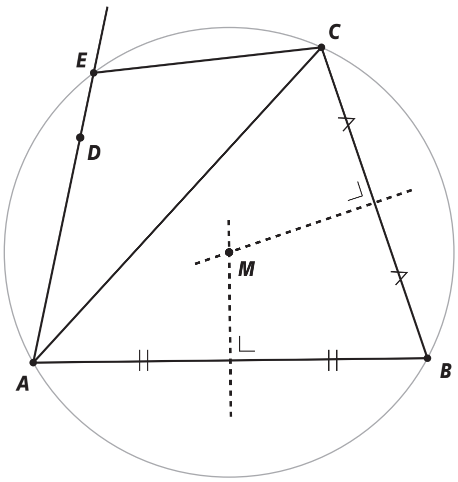
d Ja.

17a Uit $|MA|=|MD|=|MA|=|MB|=|MC|$ volgt: $|MC|=|MD|$, dus M ligt ook op de middelloodlijn van lijnstuk CD.

b Punt M heeft gelijke afstanden tot A, B, C en D en is dus middelpunt van de omgeschreven cirkel van vierhoek $ABCD$.

bladzijde 163

18a



b Vierhoek $ABCD$ is koordenvierhoek (gegeven), dus $\angle D + \angle B = 180°$. Omdat E op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt is vierhoek $ABCE$ ook een koordenvierhoek, dus geldt: $\angle E + \angle B = 180°$. Dus is $\angle D = \angle E$ en dat kan niet wanneer D en E niet samenvallen.

c Bewijs gaat net zo.

d Punt D ligt op de cirkel.

19a Driehoek ABP heeft een omgeschreven cirkel, $\angle APB$ is omtrekshoek op koorde AB. Omdat $\angle APB = \angle AQB$ is dus $\angle AQB$ ook omtrekshoek op koorde AB, dus punt Q ligt op de omgeschreven cirkel van driehoek ABP, oftewel vierhoek $ABPQ$ is een koordenvierhoek.

20a Omdat $\angle D = 90°$, ligt vanwege Thales het punt D op de cirkel met middellijn AB. Hetzelfde geldt voor punt E, dus liggen de punten A, B, D en E op één cirkel.

b De overstaande hoeken F en D zijn samen $90 + 90 = 180°$.

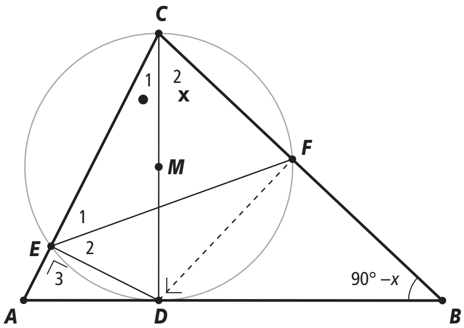
c $AFHE$, $CEHD$, $ACDF$, $BFEC$

21a Omdat $\angle P = 90°$, ligt vanwege Thales het punt P op de cirkel met middellijn AS. Van deze cirkel is dus punt T het middelpunt. Er geldt dus: $TP = TS \Rightarrow \angle TPS = \angle TSP$.

b Net zo ligt Q op de cirkel met middellijn BS, en dus punt U als middelpunt. Hieruit volgt: $\angle USQ = \angle UQS = \bullet$. Omdat (overstaande hoeken) $\angle USQ = \angle TSP$, geldt: $\angle USQ = \angle UQS = \angle TSP = \angle TPS = \bullet$. Hieruit volgt: $\angle PTS = 180° - 2\bullet$.

De driehoeken TPS en USQ zijn gelijkvormig (HH) en dus zijn de driehoeken TUS en QPS ook gelijkvormig (hoek gelijk en evenredigheid zijden).
Stel $\angle STU = \times$, dan geldt: $\angle TUS = 180 - \times - (180 - \bullet) = \bullet - \times$. Vanwege de gelijkvormigheid geldt dit ook voor $\angle SQP$.
Dus $\angle T + \angle Q = 180 - 2\bullet + \times + \bullet + \bullet - \times = 180°$.
Derhalve is vierhoek $TUQP$ een koordenvierhoek.

22a

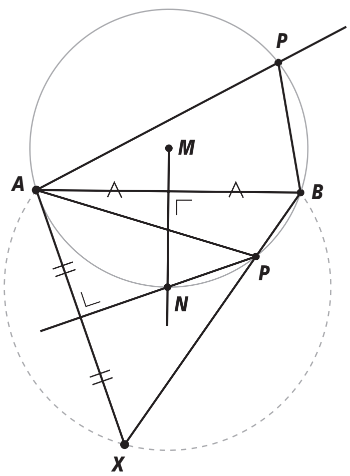


b Stel: $\angle C_1 = \bullet$ en $\angle C_2 = \times$
Hieruit volgt: $\angle E_2 = \angle C_2 = \times$ (beide omtrekshoek op koorde DF) en er geldt $\angle B = 90° - \times$.
Dus $\angle B + \angle E_{23} = 90° - \times + 90° + \times = 180°$, dus is vierhoek $ABFE$ een koordenvierhoek.

6.4 Cirkelbogen

bladzijde 164

23a



Stel $\angle AXP = \bullet$, hieruit volgt dat $\angle XAP = \bullet$ en $\angle APX = 180° - 2\bullet$. Dus geldt: $\angle APB = 180° - (180° - 2\bullet) = 2\bullet = 2 \cdot \angle AXP$.

b $\angle APB$ is een constante hoek (omtrekshoek op AB), omdat $\angle AXP$ de helft van deze hoek is, is dus ook $\angle AXP$ een constante hoek en doorloopt punt X een deel van de cirkel die ook door A en B gaat.

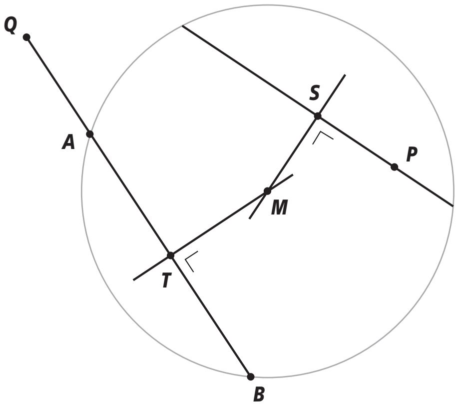
c Het bewijs verloopt identiek aan dat van vraag a.

d Het middelpunt N is het snijpunt van de middelloodlijnen van AB en AX.

© Noordhoff Uitgevers bv

24a Deel van de cirkel met middellijn AB (Thales).
b Idem.
c Zelfde middellijn AB (Thales).

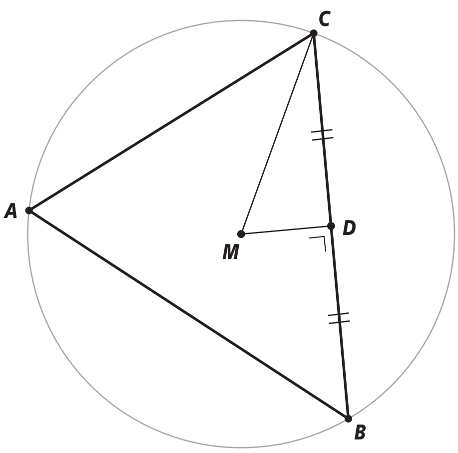
25a



b -
c Er geldt $MS \perp$ koorde door P, dus (Thales) ligt S op cirkel met middellijn MP.
d Er geldt ook hier $MT \perp AB$, dus (Thales) ligt T op cirkel met middellijn MQ.

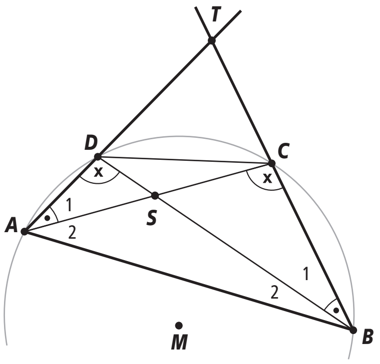
bladzijde 165

26a



b Er geldt $MD \perp BC$, dus (Thales) ligt D op cirkel met middellijn MC.
c Dezelfde cirkel om dezelfde reden.

27a Beide zijn gelijk aan $90° - \angle DAC$.
b Omdat koorde CD een constante lengte heeft, is $\angle DAC$ een constante (omtreks) hoek, dus zijn de hoeken ASD en ATC ook constant, op te vatten als omtrekshoeken op CD en doorlopen S en T dus een cirkel.
c A en B

d 

$\angle D = \angle C = \times$ is constant (omtrekshoek op AB)
$\angle A_1 = \angle B_1 = \bullet$ is constant (omtrekshoek op CD)
$\Rightarrow \angle ASD = 180 - \times - \bullet$ is ook constant, en dus ook $\angle CSD$ dus S doorloopt cirkel
$\angle ATB = 180 - \angle A_1 - \angle ACT = 180 - \bullet - (180 - \times) = \times - \bullet$ is dus ook constant, dus T doorloopt cirkel

6.5 Bewijzen

bladzijde 166

28a -

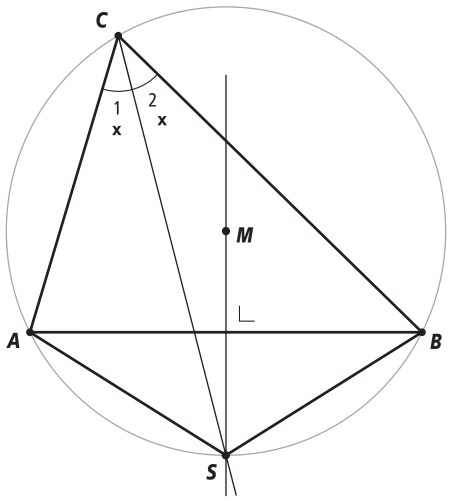
b -

c $\triangle AMP$ en $\triangle BMQ$

d $\angle MAP = \angle MBQ$ want dit zijn de basishoeken in de gelijkbenige driehoek MAB $(MA = MB)$.

e $\triangle AMP \cong \triangle BMQ$ want: $|MA| = |MB|$, $\angle MAP = \angle MBQ$, $|AP| = |BQ|$ (ZHZ).
Hieruit volgt dat $|MP| = |MQ|$ en dus $|RP| = |SQ|$ (beide straal minus een gelijk lijnstuk MP).

29a Gegeven: een driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel, MS is middelloodlijn van AB en CS is bissectrice van hoek C.
Te bewijzen: S op omgeschreven cirkel.

b 

c Bissectrice: punten hierop hebben gelijke afstanden tot de benen van de hoek.
Middelloodlijn: punten hierop hebben gelijke afstanden tot de eindpunten van het lijnstuk.

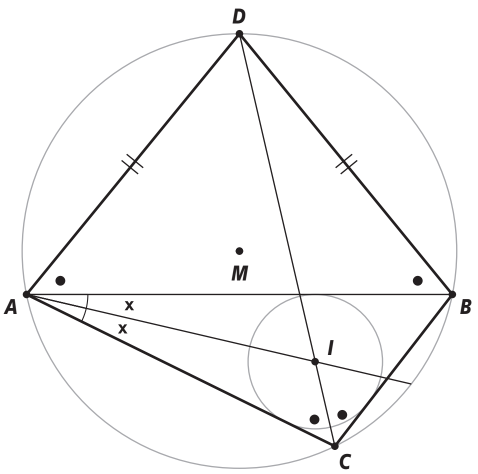
© Noordhoff Uitgevers bv

d De bogen (en koorden) AT en BT zijn gelijk dus de bijbehorende hoeken $\angle C_1$ en $\angle C_2$ zijn gelijk, dus T op de bissectrice van hoek C.
Boog AT = boog BT, dus de bijbehorende koorden AT en BT zijn ook even groot dus ligt T op de middelloodlijn van AB. Dus vallen S en T samen.

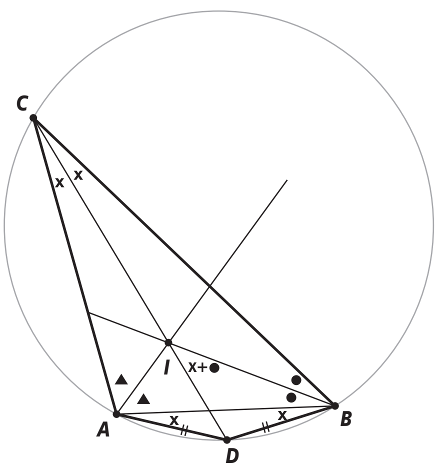
bladzijde 167

30a -
b AF en BF
c $\angle FAB$ en $\angle FBA$
d $\angle FIB = \angle FBI$
e stel $\angle C_1 = \angle C_2 = \times$, hieruit volgt dat $\angle FAB = \angle FBA = \times$
stel $\angle B_1 = \angle B_2 = \bullet$
$\angle CIB = 180° - \times - \bullet \Rightarrow \angle FIB = 180° - (180° - \times - \bullet) = \times + \bullet$
Maar ook geldt $\angle FBI = \times + \bullet$, dus geldt $|FI| = |FB|$.

31a -
b Te bewijzen: $|DA| = |DI| = |DB|$.
c Er geldt al $|DA| = |DB|$, $|DI| = |DB|$ is in opgave 30 bewezen, dus $|DA| = |DI| = |DB|$.
d Ook nu geldt $|DA| = |DI|$ want op gelijke wijze als hiervoor is $\angle A = \angle I = \times + \bullet$ (zie figuur)



e Het zelfde geldt: $|DA| = |DI| = |DB|$.



6.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 168

32a -

b $\angle A = \frac{1}{2}\text{bg}CD$ en $\angle D = \frac{1}{2}\text{bg}AB$

c $\angle APB = 180 - \angle APD = 180 - (180 - \angle A - \angle D) = \angle A + \angle D = \frac{1}{2}\text{bg}CD + \frac{1}{2}\text{bg}AB$

d -

e $\angle B = \frac{1}{2}\text{bg}CD$ en $\angle D = \frac{1}{2}\text{bg}AB$

f $\angle P = 180 - \angle D - \angle PBD = 180 - \angle D - (180 - \angle CBD) = \angle CBD - \angle D$

Dit is gelijk aan $\frac{1}{2}\text{bg}CD - \frac{1}{2}\text{bg}AB$.

33a -

b rechthoekig (Thales)

c overstaande zijden even lang en evenwijdig, diagonalen delen elkaar doormidden
de evenwijdigheid

d $CQ \perp AB$ en $RB \perp AB$ dus $CH // RB$
$BP \perp AC$ en $RC \perp AC$ dus $BP // RC$
dus $CHBR$ is een parallellogram

bladzijde 169

34a Het punt K is middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle DCS$ (Thales)
hieruit volgt $|KS| = |KC|$ en dus $\angle KCS = \angle KSC$ en deze laatste hoek is gelijk aan $\angle ASL$.

b Stel $\angle KCS = \angle KSC = \times$ en omdat $|KS| = |KD|$: $\angle KSD = \angle KDS = \bullet$; Er geldt dus:
$\times + \bullet = 90°$
Ook $\angle SAL = \bullet$ (omtrekshoek op BC)
Dus $\angle ALS = 180 - \times - \bullet = 90°$ en derhalve $AB \perp KL$

35a vierhoek $ECDH$ is koordenvierhoek want $\angle E + \angle D = 90 + 90 = 180°$

b Het staat al bij a.

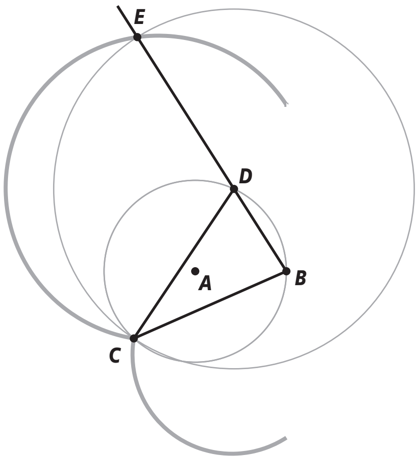
c net zo

© Noordhoff Uitgevers bv

ICT Cirkelbogen

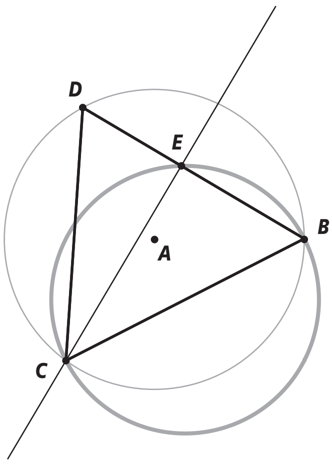
bladzijde 170

I-1ab

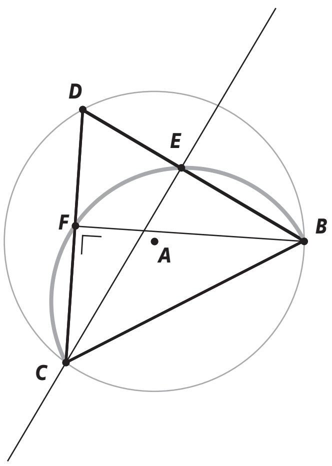


c $\angle BDC$ is constant; dus $\angle CDE = 180 - \angle CDB$ is ook constant, stel gelijk aan α
Omdat $|DC| = |DE|$ is $\angle E = \dfrac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{1}{2}\alpha$, dus ook constant, dus doorloopt E een cirkel ($\angle E$ is een omtrekshoek).

I-2ab



c Een cirkel met middellijn BC ($\triangle CBE$ is rechthoekig, Thales).

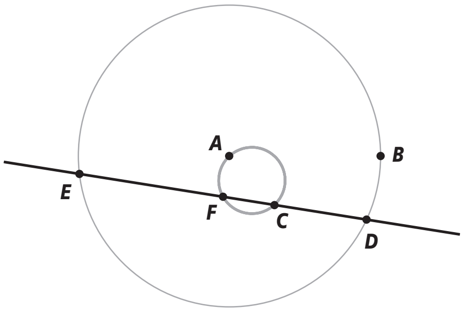


d -

e Ook $\triangle BCD$ is rechthoekig.

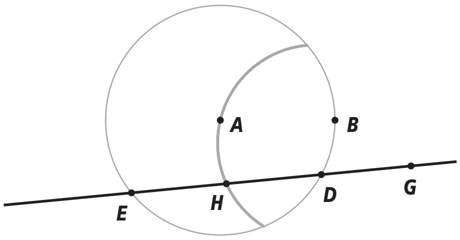
bladzijde 171

I-3a



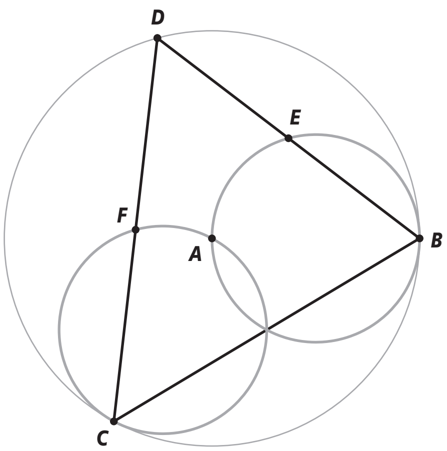
b $\triangle ACF$ is rechthoekig in F, dus F doorloopt cirkel met middellijn AC.

c



AH staat altijd loodrecht op de lijn door G, dus H doorloopt deel cirkel met middellijn GA (Thales).

I-4ab



c De driehoeken AFC en AEB zijn rechthoekig in respectievelijk F en E, dus beschrijven deze punten cirkels met middellijnen AC en AB (Thales).

I-5a Beide $90° - \angle DAC$.

b Omdat koorde CD een constante lengte heeft, is $\angle DAC$ een constante (omtreks) hoek, dus zijn de hoeken ASD en ATC ook constant, op te vatten als omtrekshoeken op CD en doorlopen S en T dus een cirkel.

c A en B

d $\angle D = \angle C = \times$ is constant (omtrekshoek op AB).

$\angle A_1 = \angle B_1 = \bullet$ is constant (omtrekshoek op CD.)

© Noordhoff Uitgevers bv

$\Rightarrow \angle ASD = 180 - \times - \bullet$ is ook constant, en dus ook $\angle CSD$ dus S doorloopt cirkel.
$\angle ATB = 180 - \angle A_1 - \angle ACT = 180 - \bullet - (180 - \times) = \times - \bullet$ is dus ook constant, dus T doorloopt cirkel.

Test jezelf

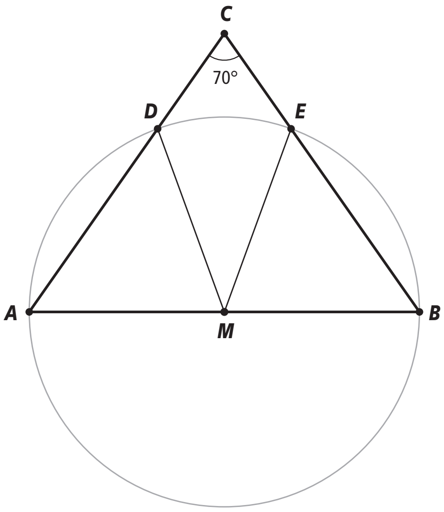
bladzijde 174

T-1a $\angle DAB = \dfrac{180-70}{2} = 55° \Rightarrow$ boog $BD = 2 \cdot 55 = 110°$

b $|MA| = |MB| \Rightarrow \angle DAM = \angle MDA = 55°$, dus $\angle M = 180 - 2 \cdot 55 = 70°$

Hieruit volgt boog $DA = 70°$ en boog $BE = 70°$; dus boog $ED = 180 - 2 \cdot 70 = 40°$.

c



d $\alpha < 90°$

e $\angle A = \angle B = \dfrac{180-\alpha}{2} = 90° - \frac{1}{2}\alpha$

$\angle D = \angle E = 180 - (90 - \frac{1}{2}\alpha) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ (koordenvierhoek).

T-2 Stel $\frac{1}{2}\angle A = \bullet$ en $\frac{1}{2}\angle B = \times$
$\angle D = \times$ (omtrekshoek op AE)
$\angle E = \bullet$ (omtrekshoek op BD)
$\angle AQD = 180 - \bullet - \times \Rightarrow \angle CQP = \bullet + \times$
Net zo is $\angle EPB = 180 - \bullet - \times \Rightarrow \angle QPC = \bullet + \times$
Dus in driehoek CPQ zijn de hoeken bij P en Q gelijk, dus geldt $|CP| = |CQ|$.

T-3a $PACQ$, $PBDQ$

b $\angle P + \angle ACQ = 180°$ (koordenvierhoek)
$\angle P + \angle D = 180°$ (koordenvierhoek)
Dus $\angle D = \angle ACQ \Rightarrow AC // BD$ (F-hoeken).

T-4a Omtrekshoek op AB.

b Ook omtrekshoek op AB, maar nu in de andere cirkel.

c $\angle PAQ = 180 - \angle TAQ = 180 - (180 - \angle ATB - \angle AQT) = \angle ATB + \angle AQT$; dit is de som van twee constante hoeken, dus is $\angle PAQ$ ook constant.

d Ook constant.

bladzijde 175

T-5a $ABRQ$ is koordenvierhoek

b $\angle PQR$

c $\angle B$

d $\angle ABR = 180 - \angle Q$

$\angle PBA = 180 - (180 - \angle Q) = \angle Q$

Raaklijneigenschap: $\angle(t, PA) =$ omtrekshoek op $PA = \angle PBA = \angle PQR$ dus $t\,//\,QR$ (Z-hoeken).

T-6 $\angle PAB = \angle PBA = \bullet \Rightarrow \angle ACP = \angle BDP = \bullet$ (omtrekshoeken op PB, PA)

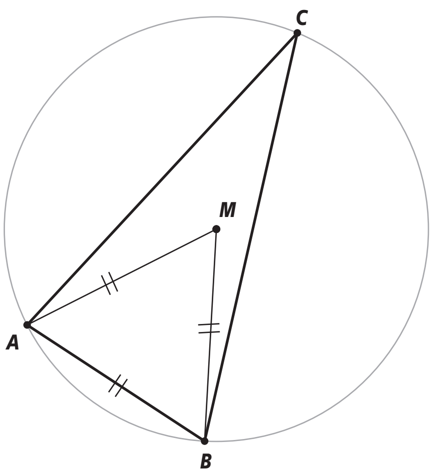
$\angle PCD = \angle PDC = \times$

$ABDC$ is koordenvierhoek, dus $\angle ABD = 180 - \bullet - \times$

Ook is $\angle CDB = \bullet + \times$, dus de hoek tussen BD en het verlengde van CD is $180 - \bullet - \times$

Hieruit volgt $AB\,//\,CD$ (Z-hoeken).

T-7



$\triangle ABM$ is gelijkzijdig, dus $\angle AMB = 60° \Rightarrow \angle ACB = 30°$ (omtrekshoek is de helft van middelpuntshoek).

T-8 $\angle D = \angle A = \alpha$ (omtrekshoek op BC)

$\angle R = 90°$ (Thales)

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow 2R\sin\alpha = a$

Dus $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$

T-9a $\angle BAD = 180 - \angle DCB$ en dit is gelijk aan

$180 - \angle PCQ = 180 - (180 - \angle CQP - \angle CPQ) = \angle CQP + \angle CPQ$

b $\angle BPS = \frac{1}{2}\angle APD = \frac{1}{2}(180 - \angle BAD - \angle ADC) = 90 - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ADC)$

c $\angle CQS = \frac{1}{2}\angle CQA = \frac{1}{2}(180 - \angle BAD - \angle ABC) = 90 - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC)$

d Stellen we $\angle BAD = \alpha$ en $\angle ABC = \beta$, dan is $\angle ADC = 180 - \beta$ (koordenvierhoek)

$\angle PSQ = 180 - \angle BQS - \angle SPC - (\angle CPQ + \angle CQP)$

dit is gelijk aan: $180 - (90 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta) - (\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha) - \alpha$ (zie a, b en c)

Dus $\angle PSQ = 180 - 90 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha - \alpha = 90°$.

Dus $PS \perp QS$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Blok 3 - Vaardigheden

bladzijde 178

1a Elke 12 uur wordt een hoeveelheid b vermenigvuldigd met 1,09.
Na 12 uur is er $b \cdot 1{,}09$. Na 1 dag = 2 × 12 = 24 uur is er $(b \cdot 1{,}09) \cdot 1{,}09 = b \cdot 1{,}09^2$
De groeifactor per dag is $1{,}09^2 \approx 1{,}19$

b De groeifactor per dag wordt 7 keer toegepast binnen een week. Dat is
$g = (1{,}09^2)^7 = 1{,}09^{14} \approx 3{,}34$.

c De groeifactor per 8 uur wordt 3 keer toegepast binnen 24 uur. Dat is
$g^3 = 1{,}09^2 \rightarrow g = 1{,}09^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}06$

d De groeifactor per 3 uur wordt 4 keer toegepast binnen 12 uur. Dat is
$g^4 = 1{,}09 \rightarrow g = 1{,}09^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}02$

2a Ja, want $2^t \cdot 4^t = 2^t \cdot (2^2)^t = 2^t \cdot 2^{2t} = 2^{t+2t} = 2^{3t} = (2^3)^t = 8^t$.

b Nee, want $2^{2t} = 2^{t+t} = 2^t \cdot 2^t$ en niet $2^t + 2^t$.

c Ja, want $2^t + 2^t + 2^t + 2^t = 4 \cdot 2^t = 2^2 \cdot 2^t = 2^{2+t} = 2^{t+2}$.

d Ja, want $8 \cdot 4^t = 2^3 \cdot (2^2)^t = 2^3 \cdot 2^{2t} = 2^{3+2t}$.

e Nee, want $(2^t)^t = 2^{t \cdot t} = 2^{t^2}$ en niet $2^{2t} (= 2^{t+t})$.

f Ja, want $\dfrac{1}{2^t} = \dfrac{1^t}{2^t} = \left(\frac{1}{2}\right)^t$

3a
$4^t = \sqrt{2}$
$(2^2)^t = 2^{\frac{1}{2}}$
$2^{2t} = 2^{\frac{1}{2}}$
$2t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{1}{4}$

b
$3^{t+2} = 9\sqrt{3}$
$3^{t+2} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2\frac{1}{2}}$
$t + 2 = 2\frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{1}{2}$

c
$(3\sqrt{3})^t = 9^{t+1} \Rightarrow (3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^t = (3^2)^{t+1}$
$(3)^t \cdot (3^{\frac{1}{2}})^t = (3^2)^t \cdot (3^2)^1$
$3^t \cdot 3^{\frac{1}{2}t} = 3^{2t} \cdot 3^2 \Rightarrow 3^{t+\frac{1}{2}t} = 3^{2t+2}$
$3^{1\frac{1}{2}t} = 3^{2t+2}$
$1\frac{1}{2}t = 2t + 2 \rightarrow -\frac{1}{2}t = 2 \rightarrow t = -4$

d
$8^t = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2-t}$
$(2^3)^t = \left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{2-t} = (2^{-\frac{1}{2}})^{2-t} = (2^{-\frac{1}{2}})^2 \cdot (2^{-\frac{1}{2}})^{-t}$
$2^{3t} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}t} = 2^{-1+\frac{1}{2}t}$
$3t = -1 + \frac{1}{2}t \rightarrow 6t = -2 + t \rightarrow 5t = -2 \rightarrow t = -\frac{2}{5}$

e
$10^{-2t} = 1000 = 10^3$
$-2t = 3 \rightarrow t = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$

f
$5^{2t-1} = 0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \dfrac{1}{5^3} = 5^{-3}$
$2t - 1 = -3 \rightarrow 2t = -2 \rightarrow t = -1$

bladzijde 179

4a $\frac{1}{64} = \dfrac{1}{4 \cdot 16} = \dfrac{1}{4 \cdot 4^2} = \dfrac{1}{4^3} = 4^{-3}$

b $\frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \dfrac{\sqrt{4}}{4^2} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-2} = 4^{-1\frac{1}{2}}$

c $32 = 2 \cdot 16 = \sqrt{4} \cdot 4^2 = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^2 = 4^{2\frac{1}{2}}$

d $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$

5a $f(t) = 4^{1-\frac{1}{2}t} = 4^1 \cdot 4^{-\frac{1}{2}t} = 4 \cdot 4^{-\frac{1}{2}t} = 4 \cdot (4^{-\frac{1}{2}})^t = 4 \cdot (\dfrac{1}{\sqrt{4}})^t = 4 \cdot (\frac{1}{2})^t$
Uit een vergelijking met het formuleschema $f(t) = b \cdot g^t$ volgt dat de beginhoeveelheid $b = 4$ en de groeifactor $g = \frac{1}{2} = 0{,}5$ is.

b $g(t) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^{3t-5} = 2 \cdot (\frac{1}{2})^{3t} \cdot (\frac{1}{2})^{-5} = 2 \cdot (\frac{1}{2})^{-5} \cdot \left((\frac{1}{2})^3\right)^t = 2 \cdot (2^{-1})^{-5} \cdot \left((2^{-1})^3\right)^t = 2 \cdot 2^5 \cdot (2^{-3})^t =$
$2^6 \cdot (2^{-3})^t = 64 \cdot (\frac{1}{2^3})^t = 64 \cdot (\frac{1}{8})^t$
De beginhoeveelheid $b = 64$ en de groeifactor $g = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

c $h(t) = 5 \cdot 3^{t+1} = 5 \cdot 3^t \cdot 3 = 15 \cdot 3^t$
De beginhoeveelheid $b = 15$ en de groeifactor $g = 3$.

© Noordhoff Uitgevers bv

d $k(t)=\dfrac{6}{2^{t-2}}=6\cdot 2^{-(t-2)}=6\cdot 2^{-t+2}=6\cdot 2^{-t}\cdot 2^{2}=6\cdot 2^{2}\cdot(2^{-1})^{t}=24\cdot(\tfrac{1}{2})^{t}$

De beginhoeveelheid $b=24$ en de groeifactor $g=\tfrac{1}{2}=0,5$.

6a Voor het snijpunt met de y-as geldt $t=0$. Invullen in de functie geeft $f(0)=5^{2}=25$. De coördinaten zijn dus $(0,25)$.

b $f(t)=5^{2-\frac{1}{2}t}=5^{2}\cdot 5^{-\frac{1}{2}t}=5^{2}\cdot(5^{-\frac{1}{2}})^{t}=25\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{t}$

Uit een vergelijking met het formuleschema $f(t)=b\cdot g^{t}$ volgt dat de beginhoeveelheid $b=25$ en de groeifactor $g=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

c $f(t)=\frac{1}{25}$

$5^{2-\frac{1}{2}t}=\frac{1}{25}$

$5^{2-\frac{1}{2}t}=\dfrac{1}{5^{2}}=5^{-2}$

$2-\frac{1}{2}t=-2$

$4-t=-4\rightarrow t=8$

7a Voor het snijpunt geldt $f(t)=g(t)$. Oplossen geeft

$9\cdot 3^{1-t}=\frac{1}{3}\cdot 9^{t}$

$3^{2}\cdot 3^{1-t}=3^{-1}\cdot(3^{2})^{t}=3^{-1}\cdot 3^{2t}$

$3^{2+1-t}=3^{-1+2t}$

$3-t=-1+2t\rightarrow 3t=4\rightarrow t=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

De y-waarde hierbij is $9\cdot 3^{1-1\frac{1}{3}}=3^{2}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}=3^{1\frac{2}{3}}=3\cdot 3^{\frac{2}{3}}=3\sqrt[3]{3^{2}}=3\sqrt[3]{9}$

Het snijpunt is $(1\frac{1}{3},\,3\sqrt[3]{9})$.

b $h(t)=f(t)\cdot g(t)=9\cdot 3^{1-t}\cdot\frac{1}{3}\cdot 9^{t}=3^{2}\cdot 3^{1-t}\cdot 3^{-1}\cdot(3^{2})^{t}=3^{2}\cdot 3^{1-t}\cdot 3^{-1}\cdot 3^{2t}=3^{2+1-t-1+2t}=3^{2+t}=$ $3^{2}\cdot 3^{t}=9\cdot 3^{t}$

Hierbij hoort de beginhoeveelheid $b=9$ en de groeifactor $g=3$.

8a Voor $t=0$ is de y-waarde $f(0)=12\cdot 1{,}5^{0}=12\cdot 1=12$. De functie f moet dus 12 naar beneden geschoven worden. Functie g wordt dus $g(t)=f(t)-f(0)=12\cdot 1{,}5^{t}-12=12(1{,}5^{t}-1)$.

b Voor een verschuiving van twee eenheden naar links wordt t vervangen door $t+2$. Functie h wordt dan $h(t)=12\cdot 1{,}5^{t+2}=12\cdot 1{,}5^{t}\cdot 1{,}5^{2}=27\cdot 1{,}5^{t}$.

$h(0)=27\cdot 1{,}5^{0}=27\cdot 1=27$

c Voor een spiegeling in de y-as wordt t vervangen door $-t$. Functie j wordt dan $j(t)=12\cdot 1{,}5^{-t}=12\cdot(1{,}5^{-1})^{t}=12\cdot((\tfrac{3}{2})^{-1})^{t}=12\cdot(\tfrac{2}{3})^{t}$.

bladzijde 180

9a 18 600 000 = 1,86 × 10 000 000 = 1,86 × 10^{7}

b 23 000 000 000 = 2,3 × 10 000 000 000 = 2,3 × 10^{10}

c 2450 = 2,450 × 1000 = 2,450 × 10^{3}

d 0,023 = 2,3 : 100 = 2,3 × 10^{-2}

e 0,000 000 931 = 9,31 : 10 000 000 = 9,31 × 10^{-7}

f 0,000 000 000 056 = 5,6 : 100 000 000 000 = 5,6 × 10^{-11}

© Noordhoff Uitgevers bv

10a 100 ligt boven $81 = 9 \times 9 = 3^2 \times 3^2 = 3^4$ en is kleiner dan $3 \times 81 = 3^5$.
Bij ${}^3\log 100$ is de uitkomst de macht waartoe 3 verheven moet worden om 100 te geven.
100 ligt tussen 81 en 3×81, dus ${}^3\log 100$ ligt tussen 4 en 5.

b 175 ligt tussen $128 = 2^7$ en $2 \times 128 = 256 = 2^8$, dus ${}^2\log 175$ ligt tussen 7 en 8.

c 3 ligt tussen $1 = 4^0$ en $4 = 4^1$, dus ${}^4\log 3$ ligt tussen 0 en 1.

d $0{,}1 = \frac{1}{10}$ ligt tussen $\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$ en $\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4$, dus ${}^{\frac{1}{2}}\log 0{,}1$ ligt tussen 3 en 4.

11 Het grondtal g is het grondtal dat geldig is bij exponentiële functies. Dat zijn alle positieve getallen behalve 0 en 1, dus $0 < g < 1$.
Uit $p = g^q$ volgt ${}^g\log p = q$. De exponentiële functie $p = g^q$ is altijd positief, dus $p > 0$. De logaritme van een negatief getal of 0 berekenen kan dus niet. In het theorievlak zijn a en b de getallen waarvan je de logaritme berekent. Er moet dus gelden $a > 0$ en $b > 0$.

12a $3 \cdot {}^3\log 2 + {}^3\log 4 = {}^3\log 2^3 + {}^3\log 2^2 = {}^3\log(2^3 \cdot 2^2) = {}^3\log 2^5 = {}^3\log 32$

b ${}^7\log 126 + 2 \cdot {}^7\log 3 - {}^7\log 81 = {}^7\log 126 + {}^7\log 3^2 - {}^7\log 81 = {}^7\log \dfrac{126 \cdot 9}{81} = {}^7\log \dfrac{126}{9} = {}^7\log 14$

c $3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 4 - \log 64 = \log 2^3 + \log 4^2 - \log 64 = \log 8 + \log 16 - \log 64 = \log \dfrac{8 \cdot 16}{64} = \log 2$

d $3 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 5 - \frac{1}{2} \cdot \log 25 = \log 2^3 + \log 5^3 - \log 25^{\frac{1}{2}} = \log 8 + \log 125 - \log \sqrt{25} = \log \dfrac{8 \cdot 125}{5} =$

$\log 200$

13a
${}^2\log 3 + {}^2\log x = 2$
${}^2\log 3x = 2$
$3x = 2^2 = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b
$2 - {}^3\log(2x+1) = 3$
$-{}^3\log(2x+1) = 3 - 2 = 1$
${}^3\log(2x+1) = -1$
$2x + 1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
$6x + 3 = 1 \rightarrow 6x = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

c
${}^3\log x - {}^3\log(2x+1) = -1$
${}^3\log \dfrac{x}{2x+1} = -1$
$\dfrac{x}{2x+1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
$\dfrac{3x}{2x+1} = 1 \rightarrow 3x = 2x + 1 \rightarrow x = 1$

d
${}^2\log(4+x) + {}^2\log(4-x) = 3$
${}^2\log(4+x)(4-x) = 3$
${}^2\log(16 - x^2) = 3$
$16 - x^2 = 2^3 = 8$
$x^2 = 8 \rightarrow x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

bladzijde 181

14a Het domein van ${}^2\log x$ is $\langle 0, \rightarrow\rangle$, dus voor f moet $3x - 4 > 0$ zijn.
Dat geeft voor f het domein $x > 1\frac{1}{3}$.
Voor g moet $x - 1 > 0$ zijn, dus het domein van g is $x > 1$.

b Voor het snijpunt geldt $f(x) = g(x)$. Oplossen geeft
${}^2\log(3x-4) = {}^2\log(x-1) + 1$
${}^2\log(3x-4) - {}^2\log(x-1) = 1$

${}^2\log \dfrac{3x-4}{x-1} = 1$

$\dfrac{3x-4}{x-1} = 2^1 = 2$

© Noordhoff Uitgevers bv

$3x-4=2(x-1)$
$3x-4=2x-2 \rightarrow x=2$
Hierbij hoort y-waarde $f(2)={}^2\log(2\cdot 3-4)={}^2\log 2=1$.
De coördinaten van het snijpunt zijn dus (2, 1).

15a $2^x=3$
$x={}^2\log 3$

b $3\cdot 5^x=4$
$5^x=\frac{4}{3}\rightarrow x={}^5\log\frac{4}{3}={}^5\log 1\frac{1}{3}$

c $1+2\cdot 3^{x+1}=5$
$2\cdot 3^{x+1}=4\rightarrow 3^{x+1}=\frac{4}{2}=2\rightarrow x+1={}^3\log 2\rightarrow$
$x=-1+{}^3\log 2=-{}^3\log 3+{}^3\log 2={}^3\log\frac{2}{3}$

d $3^x+3^{x+1}=8$
$3^x+3^x\cdot 3=8$
$3^x(1+3)=8$
$4\cdot 3^x=8\rightarrow 3^x=\frac{8}{4}=2\rightarrow x={}^3\log 2$

e $\dfrac{180}{1+2\cdot 3^x}=12$
$1+2\cdot 3^x=\dfrac{180}{12}=15\rightarrow 2\cdot 3^x=14\rightarrow$
$3^x=7\rightarrow x={}^3\log 7$

f $(6^x-8)^2=4$
$6^x-8=\sqrt{4}=2$ of $6^x-8=-\sqrt{4}=-2$
$6^x=10$ of $6^x=6$
$x={}^6\log 10$ of $x=1$

16a Voor f geldt als eis $x^2-2x>0\rightarrow x(x-2)=0$ voor $x=0$ of $x=2$. De grafiek van x^2-2x is een dalparabool, dus tussen $x=0$ en $x=2$ is de waarde negatief en niet toegestaan. Daarmee wordt het domein van f de intervallen $\langle\leftarrow, 0\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$.
Voor g geldt als eis $6-x>0\rightarrow 6-x=0\rightarrow x=6$. De ongelijkheid geldt voor $x<6$ dus het domein van g is $\langle\leftarrow, 6\rangle$.

b Los op: $f(x)={}^2\log(x^2-2x)=0$
${}^2\log(x^2-2x)={}^2\log 1$
$x^2-2x=1\rightarrow x^2-2x-1=0\rightarrow$ met de *abc*-formule volgt

$$x=\frac{2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot -1}}{2\cdot 1}=\frac{2+\sqrt{8}}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \text{ of } x=1-\sqrt{2}$$

c Los op: $f(x)=g(x)$
${}^2\log(x^2-2x)={}^2\log(6-x)$
$x^2-2x=6-x$
$x^2-x-6=0$
$(x-3)(x+2)=0$
$x=3$ of $x=-2$
De y-waarden zijn $g(3)={}^2\log(6-3)={}^2\log 3$ en
$g(-2)={}^2\log(6+2)={}^2\log 8={}^2\log 2^3=3\cdot{}^2\log 2=3\cdot 1=3$
De exacte coördinaten zijn $(3, {}^2\log 3)$ en $(-2, 3)$.

d Met behulp van de exacte snijpunten en het domein uit opdracht a lees je de oplossing van $f(x)<g(x)$ in de grafiek af.
De oplossing is $\langle -2, 0\rangle$ en $\langle 2, 3\rangle$.

17a $y=3\cdot{}^2\log x$
${}^2\log x=\dfrac{y}{3}=\frac{1}{3}y$
$x=2^{\frac{1}{3}y}$

b $y=1+{}^2\log(x-2)$
$y-1={}^2\log(x-2)$
$x-2=2^{y-1}$
$x=2+2^{y-1}=2+2^y\cdot 2^{-1}=2+\frac{1}{2}\cdot 2^y$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $y = {}^{3}\log \frac{x-4}{5}$

$\frac{x-4}{5} = 3^y$

$x - 4 = 5 \cdot 3^y$

$x = 4 + 5 \cdot 3^y$

18a ${}^{2}\log \frac{12}{\sqrt{2}} = {}^{2}\log 12 - {}^{2}\log \sqrt{2} = {}^{2}\log(4 \cdot 3) - {}^{2}\log 2^{\frac{1}{2}} = {}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 3 - \frac{1}{2} \cdot {}^{2}\log 2 =$

${}^{2}\log 2^2 + {}^{2}\log 3 - \frac{1}{2} = 2 \cdot {}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 3 - \frac{1}{2} = 2 + {}^{2}\log 3 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + {}^{2}\log 3$

b ${}^{2}\log 3 \cdot {}^{3}\log 4 \cdot {}^{4}\log 5 \cdot {}^{5}\log 2 = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$

c $(1 - {}^{9}\log 3) \cdot (1 + {}^{9}\log 3) = 1^2 - {}^{9}\log 3 \cdot {}^{9}\log 3 = 1 - {}^{9}\log \sqrt{9} \cdot {}^{9}\log \sqrt{9} = 1 - {}^{9}\log 9^{\frac{1}{2}} \cdot {}^{9}\log 9^{\frac{1}{2}} =$
$1 - \frac{1}{2} \cdot {}^{9}\log 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^{9}\log 9 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

19a Voor *f* geldt als eis $\frac{2x-1}{3} > 0 \rightarrow 2x - 1 > 0 \rightarrow 2x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{2}$. Het domein van *f* is dus $\langle \frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

b $f(x) = 2 - {}^{3}\log \frac{2x-1}{3} = 2 - \left({}^{3}\log(2x-1) - {}^{3}\log 3\right) = 2 - \left({}^{3}\log(2x-1) - 1\right) = 2 - {}^{3}\log(2x-1) + 1 =$

$3 - {}^{3}\log(2x-1)$

c $f(x) = 2 - {}^{3}\log \frac{2x-1}{3} = 2 \cdot 1 - {}^{3}\log \frac{2x-1}{3} = 2 \cdot {}^{3}\log 3 - {}^{3}\log \frac{2x-1}{3} = {}^{3}\log 3^2 - {}^{3}\log \frac{2x-1}{3} =$

${}^{3}\log \frac{3^2}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)} = {}^{3}\log \frac{3^2 \cdot 3}{2x-1} = {}^{3}\log \frac{27}{2x-1}$

d Los op: $f(x) = 2 - {}^{3}\log \frac{2x-1}{3} = 0$

${}^{3}\log \frac{2x-1}{3} = 2$

${}^{3}\log \frac{2x-1}{3} = {}^{3}\log 3^2$

$\frac{2x-1}{3} = 3^2 \rightarrow 2x - 1 = 27 \rightarrow 2x = 28 \rightarrow x = 14$

e Met behulp van het nulpunt en het domein uit opdracht a lees je de oplossing van

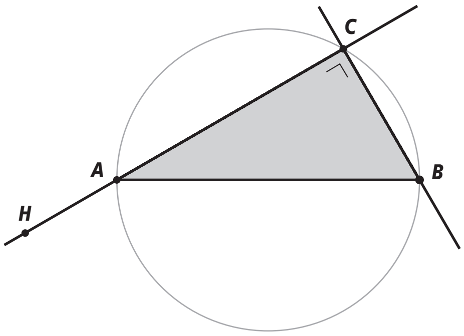
$f(x) > 0$ in de grafiek af. De oplossing is $\langle \frac{1}{2}, 14 \rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Blok 3 ICT - Meetkundige plaatsen met Geogebra

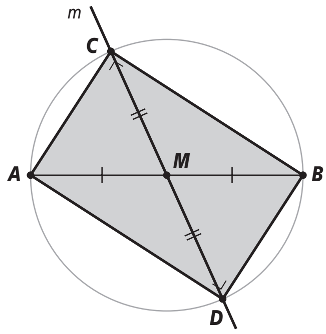
bladzijde 182

I-1a



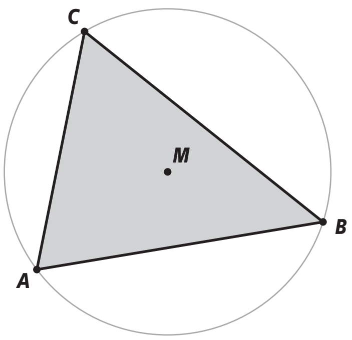
b Het spoor van C lijkt een cirkel te zijn.

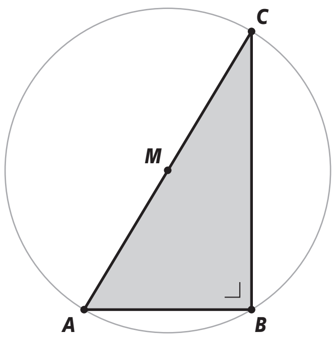
c De cirkel is de meetkundige plaats van een constante hoek. Het bewijs komt voor bij de stelling van Thales.
Gegeven: een rechthoekige driehoek $\triangle ABC$ met $\angle C = 90°$.
Te bewijzen: C ligt op de cirkel met middellijn AB.
Bewijs: Construeer het midden M van $|AB|$. Trek lijn m door C en M en construeer punt D op m met $|MD| = |MC|$. Punt D is puntsymmetrisch met C ten opzichte van $M \Rightarrow \angle ADB = 90° \Rightarrow AB$ en CD zijn lichaamsdiagonalen van rechthoek $ACBD \Rightarrow$
$|MA| = |MB| = |MC| = |MD| \Rightarrow$ er is een cirkel met middelpunt M en straal $|MC|$ die door A, B en C gaat.

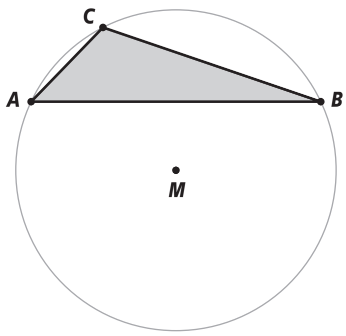


I-2a Gebruik de knop *Veelhoek* voor het tekenen van $\triangle ABC$.
Gebruik de knop *Cirkel door drie punten* om de cirkel door A, B, en C te tekenen.
Gebruik de pijl (de knop *Verplaatsen*) om A, B en/of C naar een andere plaats te slepen en te zien hoe de driehoek en de cirkel veranderen.

b Kies de knop *Midden of middelpunt* en klik de cirkel om het middelpunt van de cirkel te tekenen.
Verplaats weer A, B, en/of C en kijk hoe het middelpunt M meeverplaatst.
Bij een scherpe driehoek zijn alle hoeken kleiner dan 90° en ligt M altijd binnen de driehoek.
Bij een rechthoekige driehoek is een hoek 90° en ligt M altijd op een driehoekszijde.
Bij een stompe driehoek is een hoek groter dan 90° en ligt M altijd buiten de driehoek.

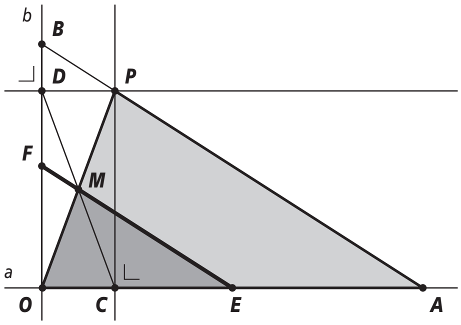






© Noordhoff Uitgevers bv

I-3ab



Gebruik de knop *Midden of middelpunt* om M in het midden van CD te tekenen.
De meetkundige plaats van punten M is het lijnstuk EF evenwijdig aan AB dat het midden van OA en het midden van OB verbindt.

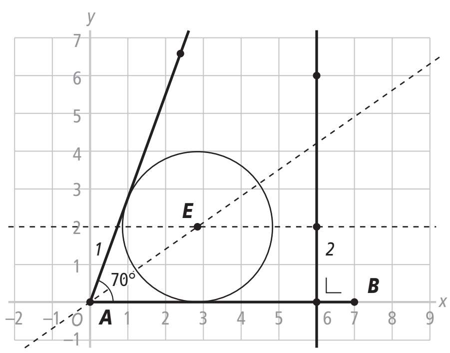
c

$$\left.\begin{array}{l}\angle ODP = \angle OCP = 90^\circ \;\Rightarrow OCPD \text{ is een rechthoek}\\ CD \text{ en } OP \text{ zijn diagonalen van rechthoek } OCPD\\ CM = \tfrac{1}{2}CD\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}P \text{ naar } A \Rightarrow OE = \tfrac{1}{2}OA\\ P \text{ naar } B \Rightarrow OF = \tfrac{1}{2}OB\end{array}\right.$$

P naar $B \Rightarrow \angle OAP \sim \angle OEF \Rightarrow EF \,//\, AB \;\Rightarrow$
P op $AB \Rightarrow \angle OAP \sim \angle OEM \Rightarrow M$ op EF

I-4a –

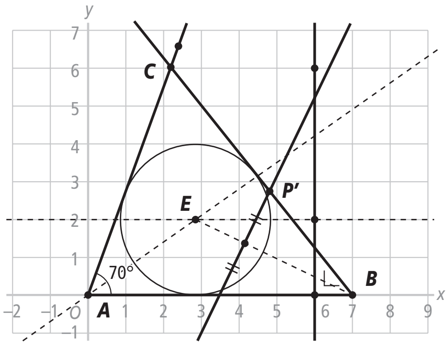
b



Het middelpunt van de ingeschreven cirkel ligt op de het snijpunt van de deellijnen (bissectrices).
Teken de bissectrice door $\angle A$ met de knop *Bissectrices*. Selecteer de lijn AB en de halve lijn. GeoGebra tekent twee bissectrices. Verwijder de bissectrice die niet door de driehoek gaat.
De straal van de cirkel is 2 dus de afstand van het middelpunt E tot AB is 2. Trek een parallelle lijn boven AB op afstand 2. Het snijpunt van de parallelle lijn met de bissectrice is het middelpunt E van de cirkel.
Construeer voor de parallelle lijn eerst een loodlijn op AB en pas hier een lijnstuk op af van 2 (zet de optie *Vastzetten op Rooster* aan. Begin het lijnstuk op het snijpunt van de loodlijn met AB. Draai het eindpunt naar boven tot het samenvalt met de loodlijn.) Trek de parallelle lijn met de knop *Evenwijdige rechte* door dit eindpunt.
Gebruik de knop *Snijpunt(en) van 2 objecten* en klik op het snijpunt van de parallelle lijn en de bissectrice. Teken tenslotte de cirkel met de knop *Cirkel met middelpunt en straal*.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Manier 1:
Met de knop *Raaklijnen* wordt de zijde BC als raaklijn van de ingeschreven cirkel getekend die door punt B gaat.
Manier 2:
Trek bissectrice EB en verdubbel hoek ABE door middel van een loodlijn en een spiegeling van P naar P' in de bissectrice via de knop *Lijnspiegeling*. Hoek B is $\angle PBP'$.
Opmerking: Ga na, door B te verschuiven, dat het ene snijpunt van de bissectrice van $\angle A$ met de cirkel *niet* samenvalt met het raakpunt van de raaklijn die door B gaat en slechts op het oog zo lijkt bij de gegeven afmetingen in de opgave.

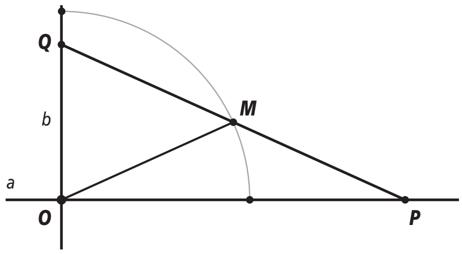


bladzijde 183

I-5a Door de constructie met de cirkel zorg je ervoor dat $PQ = 8$.
Zet het Rooster aan en trek horizontale lijn a door twee punten. Teken daarna een loodlijn op a. Gebruik het hulppunt om de loodlijn te trekken niet als middelpunt van de cirkel anders verschuift de loodlijn tijdens het verplaatsen van Q. Gebruik de knop *Snijpunt(en) met 2 objecten* om snijpunt P te creëren. Trek met de knop *Lijnstuk tussen 2 punten* een lijnstuk tussen P en Q.

b Creëer het punt M met de knop *Midden of middelpunt* en klik de lijn PQ.

c

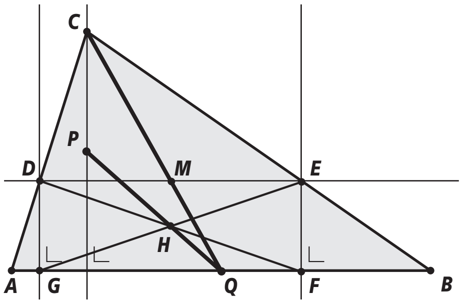


De cirkel heeft het snijpunt O van a en b als middelpunt. Als Q naar O gaat valt OP samen met QP. De straal is $QM = \frac{1}{2} \cdot PQ = 4$.

d Trek lijn OM. M is het midden van $PQ \Rightarrow$ de loodlijn op OQ door M deelt OQ middendoor $\Rightarrow \triangle OMQ$ is gelijkbenig $\Rightarrow |OM| = |OQ|$.
$|OM| = \frac{1}{2} \cdot |PQ|$ = constant = straal van cirkel met O als middelpunt $\Rightarrow M$ ligt op de cirkel met O als middelpunt en straal $\frac{1}{2} \cdot |PQ|$.
aOb verdeelt de cirkel in vieren. De ladder (= het lijnstuk PQ) ligt in het 1e kwadrant hiervan. $\Rightarrow M$ op PQ ligt altijd in het 1e kwadrant $\Rightarrow M$ doorloopt een kwartcirkel.

© Noordhoff Uitgevers bv

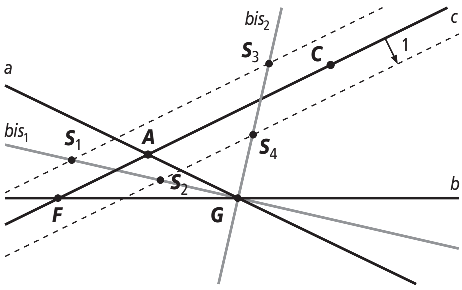
I-6abc



De figuur laat zien dat punt H het lijnstuk PQ als baan doorloopt.

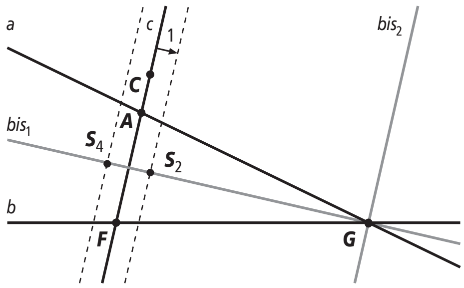
d Als D naar C gaat dan gaan GD en FE naar de hoogtelijn door C en H naar het midden P van de hoogtelijn.
Als D naar A gaat dan gaat DE naar AB en H naar het midden Q van AB.
In $\triangle ABC$ is de zwaartelijn uit C de lijn CQ. $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ en hebben $\angle C$ gemeen $\Rightarrow$ het midden M van DE doorloopt de zwaartelijn CQ.
De zwaartelijn is een rechte. Het snijpunt H van EG en DF is het midden van rechthoek $GFED \Rightarrow H$ heeft dezelfde horizontale plaats als M en de halve afstand tot de lijn $AB \Rightarrow H$ ligt op de rechte met eindpunten P en Q.

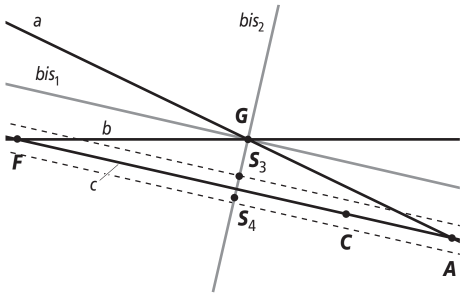
I-7ab



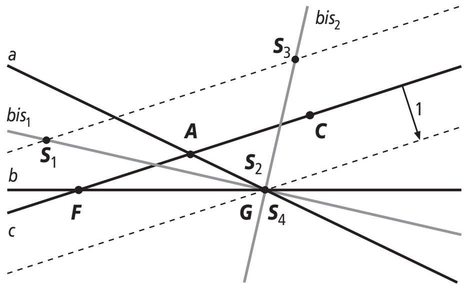
Een punt dat even ver van lijn a als lijn b ligt bevindt zich op de bissectrice tussen beide lijnen. Construeer met de knop *Bissectrices* en aanklikken van lijn a en b de binnen- en buitenbissectrices bis_1 en bis_2.
Een punt dat op een afstand 1 van lijn c ligt bevindt zich op een parallelle lijn hieraan aan die raakt aan de cirkel met straal 1 en middelpunt op c heeft. Construeer met de knop *Cirkel met middelpunt en straal* een cirkel op c met straal 1. Construeer met de knop *Loodlijn* een loodlijn door het middelpunt van de cirkel en c door het het middelpunt en c aan te klikken. Construeer de snijpunten van de loodlijn met de cirkel door middel van de knop *Snijpunt(en) van 2 objecten*. Construeer twee parallelle lijnen aan c met de knop *Evenwijdige rechte* en aanklikken van c en een snijpunt. Construeer met de knop *Snijpunt(en) van 2 objecten* de vier snijpunten S_1, S_2 , S_3 en S_4 tussen de twee bissectrices en de twee parallelle lijnen. Er zijn dus vier punten die even ver van lijn a als lijn b liggen en die op een afstand 1 van lijn c liggen.

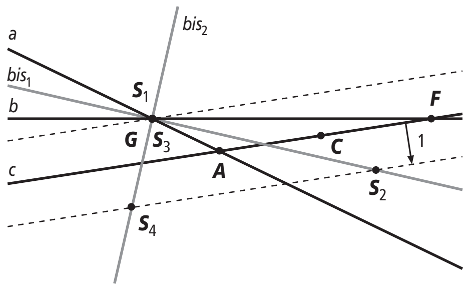
c In het algemene geval zijn er vier snijpunten. Zie de figuur bij opdracht b.
In het geval dat de parallelle lijnen parallel zijn aan een bissectrice zijn er slechts twee snijpunten:





In het geval G een afstand van 1 tot c heeft (een van de parallelle lijnen gaat door G) vallen twee snijpunten samen en zijn er drie snijpunten:



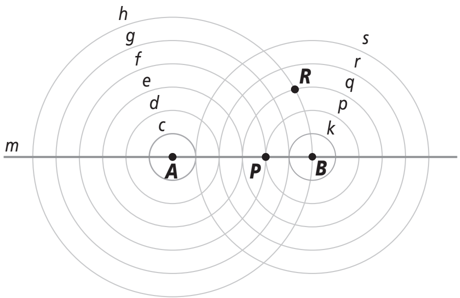


© Noordhoff Uitgevers bv

Blok 3 Praktische opdracht - Gewogen centra

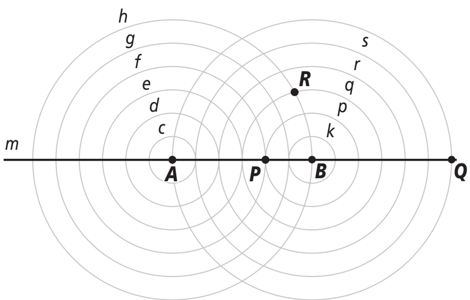
bladzijde 187

1a



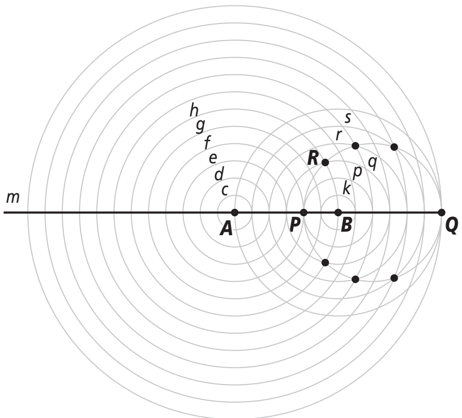
Afstand $AB = 3$ en h is de 6e cirkel rond A, dus de afstand tussen de cirkels is $\frac{1}{2}$.
Als Op lijn m ligt punt P op het snijpunt van cirkel f met straal 2 en cirkel p met straal 1.

b



Verleng m en breid de cirkels rond B uit met een cirkel die door A gaat. Voor het snijpunt Q met m geldt $|AP| = 2 \cdot |PB|$.

cd Punt R voldoet aan de formule $|AR| = 2 \cdot |RB|$ want $|AR| = 3$ en $|RB| = 1\frac{1}{2}$.



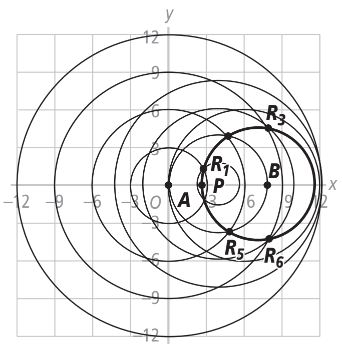
Breid het aantal cirkels uit en zoek de snijpunten waar de stralen een verhouding 1 : 2 hebben. Je vindt 8 snijpunten, inclusief P en Q die op lijn m liggen.
De geschetste lijn lijkt op de grijze cirkel met middellijn PQ te liggen.

2a

Een benadering van de ligging kun je op het oog aangeven:
P ligt tussen AB. Als $2 \cdot |AP| = 3 \cdot |PB|$ dan $|AP| = 3 \cdot (\frac{1}{2}|PB|)$, dus een halve lengte PB moet 3 keer passen in AP.
Q ligt voorbij B. Als $2 \cdot |AQ| = 3 \cdot |QB|$ dan $|AQ| = 3 \cdot (\frac{1}{2}|QB|)$, dus een halve lengte BQ moet 3 keer passen in AQ.

b Kies $|PA| = 3$ en $|PB| = 2$ om aan $2 \cdot |AP| = 3 \cdot |PB|$ te voldoen. Dan volgt $|AB| = 3 + 2 = 5$, maar lengte $|AB|$ moet 4 zijn volgens opdracht a, dus vergroot $|AP|$ en $|PB|$ met $\frac{4}{5}$.
Dat geeft $|PA| = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ en $|PB| = 4 - 2{,}4 = 1{,}6$.
Kies $|QA| = 3$ en $|QB| = 2$ om aan $2 \cdot |AQ| = 3 \cdot |QB|$ te voldoen.
$|QA| = |QB| + |AB| \Rightarrow |AB| = |QA| - |QB| = 3 - 2 = 1$, maar lengte $|AB|$ moet 4 zijn volgens opdracht a, dus vergroot $|QA|$ en $|QB|$ met 4. Dat geeft $|QA| = 12$ en $|QB| = 8$.

c Voor een punt R op de grens geldt $2 \cdot |AR| = 3 \cdot |RB| \Rightarrow |AR| = 1\frac{1}{2} \cdot |RB|$.
Teken cirkels rond B met stralen 2, 4, 6 en 8 en cirkels rond A met stralen die $1\frac{1}{2}$ keer groter zijn, dus 3, 6, 9, en 12. Teken de snijpunten op de cirkels die voldoen aan $2 \cdot |AR| = 3 \cdot |RB|$ en schets de verbinding tussen de snijpunten. In de tekening is de grenslijn de vette cirkel.

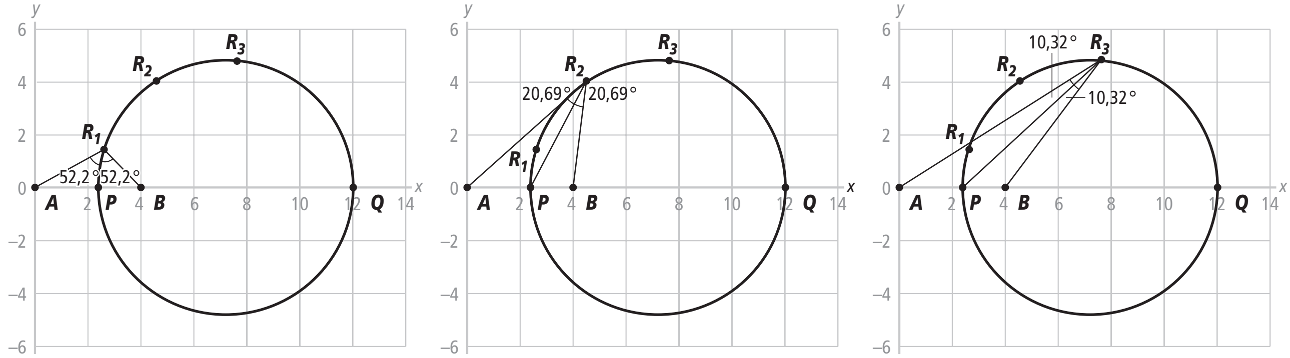


d Als centrum A gewicht a heeft en centrum B gewicht b dan geldt voor de grenslijn per definitie $b \cdot |PA| = a \cdot |PB| \Rightarrow \frac{|PB|}{|PA|} = \frac{b}{a}$.
Op lijn AB geldt $AB = PA + PB \Rightarrow |AB| = |PA| + |PB| \Rightarrow |PB| = |AB| - |PA|$. Invullen geeft

$$\frac{|AB|-|PA|}{|PA|} = \frac{|AB|}{|PA|} - \frac{|PA|}{|PA|} = \frac{|AB|}{|PA|} - 1 = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{|AB|}{|PA|} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{|PA|}{|AB|} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow$$

$$|PA| = \frac{a}{a+b} \cdot |AB|.$$

e De hoeken zijn $\angle AR_1P$ en $\angle BR_1P$ zijn gelijk. Hetzelfde geldt voor de hoeken bij R_2 en R_3.



© Noordhoff Uitgevers bv

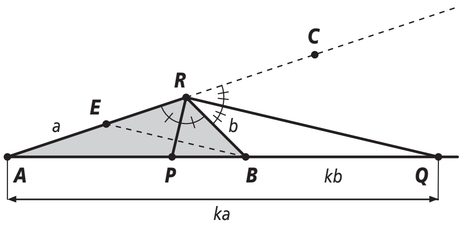
3 Bewijs van de bissectricestelling:
Gegeven: $|PA| : |PB| = |RA| : |RB| = a : b$
Te bewijzen: RP is bissectrice van $\angle ARB$
Bewijs: neem aan dat de stelling waar is, dan moet bewezen worden dat $\angle ARP = \angle PRB$.
$PR \parallel BE \Rightarrow \angle PRB = \angle RBE$ (Z-hoeken) (1)
$\triangle ARP \sim \triangle AEB \Rightarrow \angle ARP = \angle AEB$ (2)
Uit (1), (2) en het beweerde volgt $\angle RBE = \angle AEB \Rightarrow \triangle RBE$ heeft twee gelijke hoeken $\Rightarrow \triangle RBE$ is gelijkbenig $\Rightarrow$ te bewijzen $|RB| = |RE|$.
Noem $|PA| = a$, $|PB| = b$, $|RA| = k \cdot a$ en $|RB| = k \cdot b$ waarin k een vergrotingsfactor is in overeenstemming met het gegeven, dan

$$\triangle ARP \sim \triangle AEB \Rightarrow \frac{|RE|}{|RA|} = \frac{|PB|}{|PA|} = \frac{b}{a} \Rightarrow |RE| = |RA| \cdot \frac{b}{a} = k \cdot a \cdot \frac{b}{a} = k \cdot b \Rightarrow |RE| = |RB|,$$

dus de bewering is waar.

bladzijde 188

4a



Gegeven: $|QA| : |QB| = |RA| : |RB| = a : b$
Te bewijzen: RQ is bissectrice van $\angle QRC$
Bewijs: neem aan dat de stelling waar is, dan moet bewezen worden dat $\angle BRQ = \angle CRQ$.
$EB \parallel RQ \Rightarrow \angle BRQ = \angle EBR$ (Z-hoeken) en $\angle CRQ = \angle REB$ (F-hoeken),
$\angle EBR = \angle CRQ \Rightarrow \triangle EBR$ is gelijkbenig $\Rightarrow$ te bewijzen $|RE| = |RB|$

$$\triangle AEB \sim \triangle ARQ \Rightarrow \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|RA|}{|QA|} = \frac{a}{k \cdot a} = \frac{1}{k} \Rightarrow |AE| = |AB| \cdot \frac{1}{k} = (ka - kb) \cdot \frac{1}{k} = a - b$$

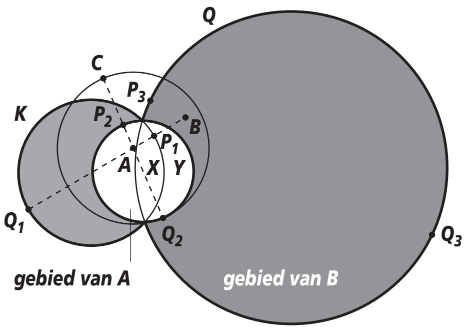
$|RE| = |RA| - |AE| = a - (a - b) = b \Rightarrow |RE| = |RB|$ klopt, dus de bewering is waar.

b $\angle PRQ$ is $90°$.
Bewijs: $\angle ERP = \angle BRP = \alpha$, $\angle BRQ = \angle CRQ = \beta$
$\angle PRQ = \alpha + \beta$
$\angle ARC = 180° = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle PRQ = 90°$

c De hoek PRQ is constant $90°$ in $\triangle PRQ$, dus volgens de stelling van Thales ligt R op de cirkel met middellijn PQ.

© Noordhoff Uitgevers bv

5a



$|BP_3| = \frac{3}{7} \cdot |BC|$, dan $|CP_3| = \frac{4}{7} \cdot |BC| \Rightarrow |BP_3| : |CP_3| = 3:4 \Rightarrow$ gewicht $B : C = 3:4$.

b Centrum A is het midden van CQ_2, dus $|CQ_2| : |AQ_2| = 2:1 \Rightarrow$ gewicht $C : A = 2:1$.
Zie de cirkel met middellijn CQ_2 en A als middelpunt.

c Kies $A = 1$, dan volgt uit $A : C = 1:2$ dat $C = 2$. Uit $B : C = 3:4$ volgt $B = 3:4 \times C = 1\frac{1}{2}$.
Werk de $1\frac{1}{2}$ in de verhouding weg door met 2 te vermenigvuldigen: $A : B : C = 2:3:4$.

d X: ligt in cirkel k voor AB: A wint het van B,
ligt in cirkel r voor AC: A wint het van C,
ligt in cirkel q voor BC: B wint het van C, maar A wint het weer van B.
Uiteindelijk wint A steeds, dus de gasten uit gebied X gaan naar A.

Y: ligt buiten cirkel k voor AB: B wint van A,
ligt in cirkel r voor AC: A wint van C, maar B wint het weer van A,
ligt in cirkel q voor BC: B wint van C.
Uiteindelijk wint B steeds, dus de gasten uit gebied Y gaan naar B.

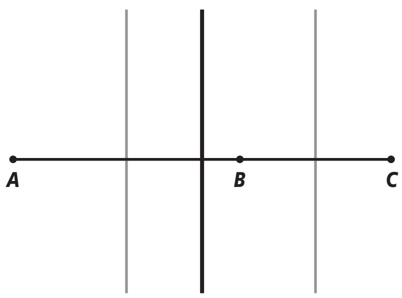
bladzijde 189

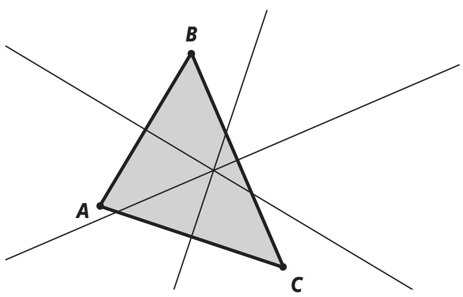
6a Verleng de lijn CB in de richting van B. Het snijpunt met de cirkelrand tot centrum B is iets groter dan de afstand CB, dus als C gewicht 2 zou krijgen (zie het antwoord op vraag 5b) gaat de cirkel rond B door het snijpunt met de rand en steekt de cirkel iets buiten het gebied van centrum C.

b Rechte grenslijnen zijn te zien bij A en een aantal aangrenzende centra. De gewichten zijn dan gelijk: de afstand tot ieder centrum is gelijk, dus de grenslijn is de middelloodlijn op de verbindingsas.

c Ja, maar er kunnen ook meer centra zijn buiten de tekening. Centrum D heeft met 7 het grootste gewicht van alle centra dus heeft ten opzichte van deze centra geen grenscirkel.

7a

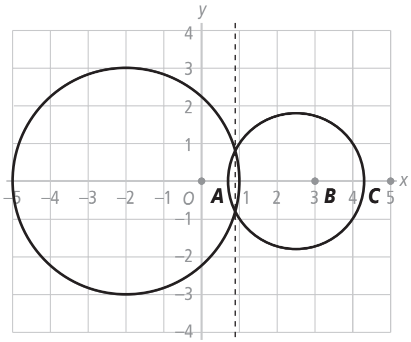


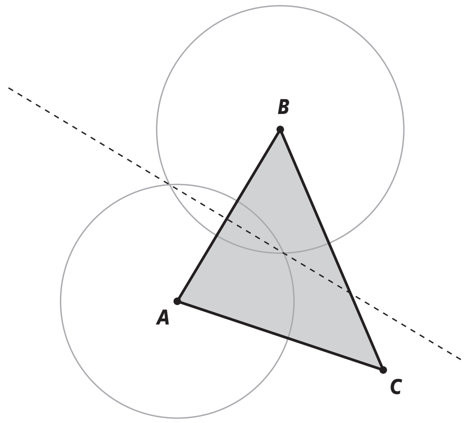


© Noordhoff Uitgevers bv

Bij drie centra met gelijk gewicht (1 : 1 : 1) zijn de grenslijnen de middelloodlijnen op het lijnstuk tussen de centra. Bij centra op één lijn hebben de middelloodlijnen geen snijpunt met elkaar. Bij centra die de hoekpunten van een driehoek vormen snijden de middelloodlijnen elkaar in een punt dat het centrum is van de omgeschreven driehoek. De dikke lijn is de grenslijn tussen A en B, de dunne lijn tussen A en C en de gestreepte lijn tussen B en C.

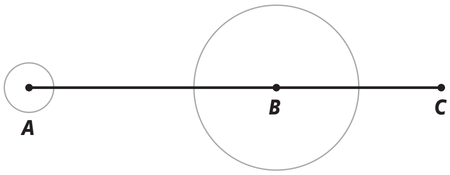
b





De gewichten van de centra A, B en C verhouden zich als 1 : 1 : 2. De dikke lijn is de grenslijn tussen A en B, de onderste cirkel tussen A en C en de bovenste cirkel tussen B en C.

c



De gewichten van de centra A, B en C verhouden zich als 1 : 10 : 50. De linker cirkel is de grenslijn tussen A en B en de rechter cirkel tussen B en C.
Hoe groter de gewichtsverhouding is hoe kleiner de cirkel is rond het centrum met het kleinste gewicht.

8 –

© Noordhoff Uitgevers bv