Hoofdstuk 7 - Goniometrische functies

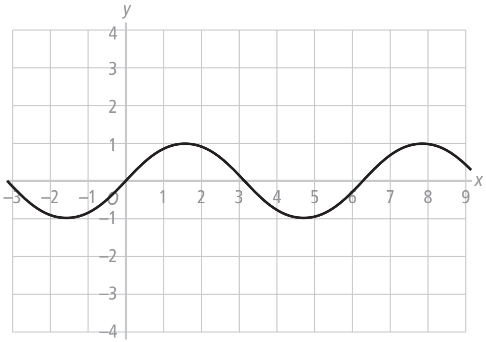
Voorkennis: Sinusfuncties

bladzijde 192

V-1 Uit $180^\circ = \pi$ radialen volgt $30^\circ = \frac{30}{180} \cdot 180^\circ = \frac{1}{6}\pi$ radialen. Je krijgt dan de volgende tabel:

graden	0	30	45	60	90	120	135	150	180
radialen	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

V-2a



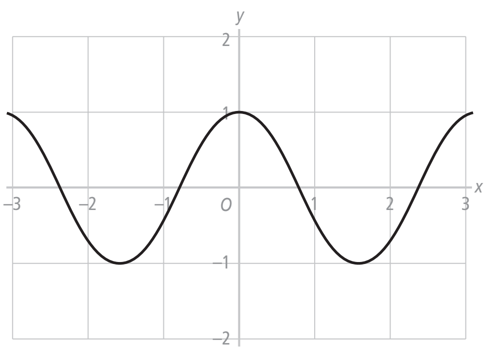
b Aflezen: $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = 3\pi$

c Aflezen: $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 2\frac{1}{2}\pi$

d Aflezen: $x = -\frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{2}\pi$

e Aflezen: $x = 2\pi$

V-3a



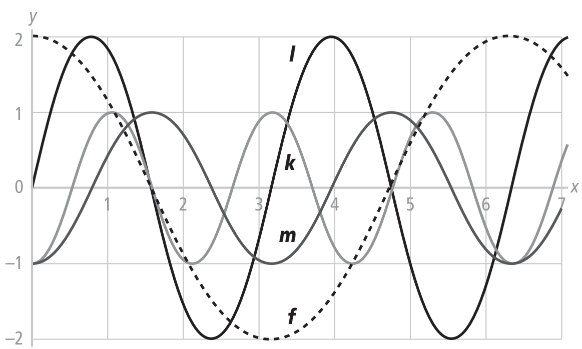
b Aflezen: $x = -\frac{3}{4}\pi$, $x = -\frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$

c Aflezen: $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \pi$

d Aflezen: $x = -\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$

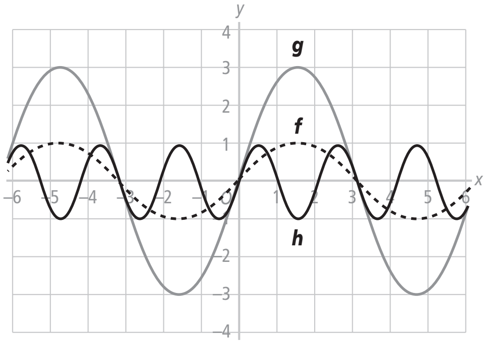
e De periode van f is π

V-4 Plotten en vergelijken geeft:



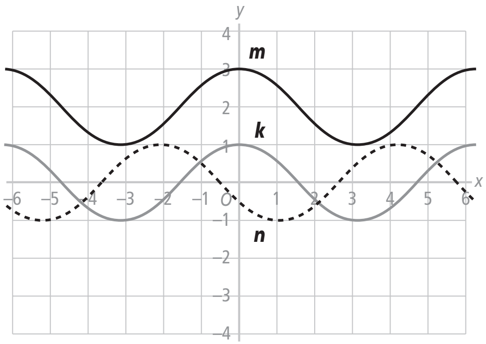
bladzijde 193

V-5a



De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f met 3 te vermenigvuldigen vanuit de x-as.
De grafiek van h ontstaat door de grafiek van f met $\frac{1}{3}$ te vermenigvuldigen vanuit de y-as.

b



De grafiek van m ontstaat uit de grafiek van k door verschuiving 2 omhoog.
De grafiek van n ontstaat uit de grafiek van k door verschuiving 2 naar links.

V-6a Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{6}$.
De amplitude is 1 en de periode is $\frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{1}{3}\pi$.

b Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor 5.
De amplitude is 1 en de periode is $5 \cdot 2\pi = 10\pi$.

c Verschuiving 0,22 naar links.
De amplitude is 1 en de periode is 2π.

d Vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\dfrac{1}{4\pi}$ en ten opzichte van de x-as met factor 5.

De amplitude is 5 en de periode is $\dfrac{1}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}$.

e De grafiek ontstaat door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor -2 gevolgd door de verschuiving 2 omhoog.
De amplitude is 2 en de periode is 2π.

f Verschuiving π naar rechts, daarna vermenigvuldiging met factor $\dfrac{1}{\pi}$ ten opzichte van de y-as en tenslotte vermenigvuldiging met factor 10 ten opzichte van de x-as.

De amplitude is 10 en de periode is $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

V-7a De amplitude is 2 en de periode is $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

b De amplitude is 2 en de periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

c De amplitude is 1 en de periode is $\frac{2\pi}{0,3\pi} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

d De amplitude is 3 en de periode is $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

e De amplitude is 5 en de periode is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

f De amplitude is 1 en de periode is $\frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$.

V-8a Symmetrie in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.
b Puntsymmetrie in $O(0,0)$.
c Puntsymmetrie in $(\pi, 0)$.

7.1 Frequentie en faseverschil

bladzijde 194

1a De periode is $\frac{2\pi}{880\pi} = \frac{1}{440}$ seconde.
b Als de trilling periode $\frac{1}{440}$ heeft dan passen er 440 perioden in één seconde.

Dus geldt frequentie $= \frac{1}{\text{periode}}$.

c Dan geldt $\frac{1}{600} = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{\frac{1}{600}} = 1200\pi$ en dus $u = \sin 1200\pi t$ als je de uitwijking op 1 stelt.

2a Periode $\frac{2\pi}{500\pi} = \frac{1}{250}$ en dus is de frequentie 250 Hz.

b Periode $\frac{2\pi}{300} = \frac{\pi}{150}$ en dus is de frequentie $\frac{150}{\pi} \approx 47,7$ Hz.

c Periode $\frac{2\pi}{256\pi} = \frac{1}{128}$ en dus is de frequentie 128 Hz.

d Periode $\frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}$ en dus is de frequentie 6 Hz.

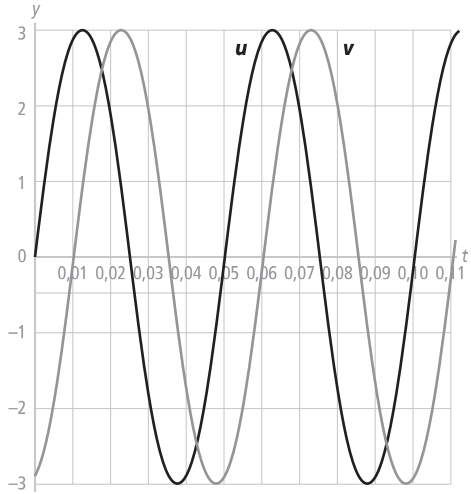
3a $u = 6\sin 2 \cdot 4t = 6\sin 8t$
b $u = 6\sin 1\frac{1}{2} \cdot 4t = 6\sin 6t$

4 $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{20}} = 40\pi$ en $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{20\,000}} = 40\,000\pi$

Dus geldt $40\pi < b < 40\,000\pi$.

5a Voor beide trillingen geldt: amplitude 3, periode $\frac{2\pi}{40\pi} = \frac{1}{20} = 0,05$ en frequentie 20 Hz.

b



De grafiek van v is 0,01 naar rechts verschoven ten opzichte van de grafiek van u.

c 0,01 is $\frac{1}{5}$ deel van de periode.

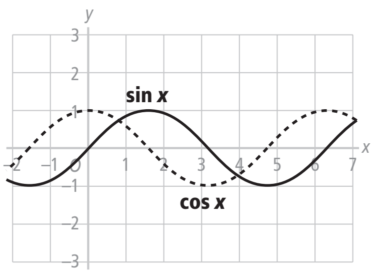
bladzijde 195

6a Voor beide trillingen geldt: periode $\dfrac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40} = 0{,}025$ en amplitude 0,5.

b Het verschil is 0,005 dus is het faseverschil $\frac{0{,}005}{0{,}025} = \frac{1}{5}$.

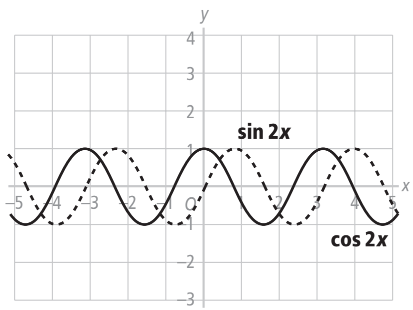
c De grafiek van w snijdt de x-as 0,3 periode later dan de grafiek van v.
De grafiek van u snijdt de x-as 0,2 periode later dan de grafiek van v.
Dus is het faseverschil tussen w en u $0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$.

7a



Het faseverschil is $\frac{1}{4}$ immers $\frac{1}{2}\pi$ is $\frac{1}{4}$ deel van 2π .

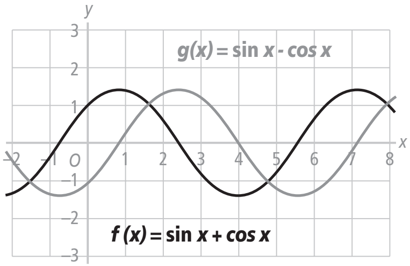
b



Het faseverschil is $\frac{1}{4}$ immers $\frac{1}{4}\pi$ is $\frac{1}{4}$ deel van π .

c Het faseverschil blijft $\frac{1}{4}$ immers $\dfrac{\pi}{2b}$ is $\frac{1}{4}$ deel van $\dfrac{2\pi}{b}$.

8a



b De grafiek van f lijkt een maximum te hebben bij $\frac{1}{4}\pi$ en dus zal gelden $a = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
De periode van f is 2π en dus is $b = 1$.
Er is een nulpunt $-\frac{1}{4}\pi$ en dus is er de verschuiving $\frac{1}{4}\pi$ naar links. Zodat $c = -\frac{1}{4}\pi$.
Dit alles geeft $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.

c Zie de figuur bij a. Dan is de amplitude dezelfde, dus $a = \sqrt{2}$.
Weer is de periode 2π en dus is $b = 1$.
Nu is de verschuiving $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts en dus is $c = \frac{1}{4}\pi$.

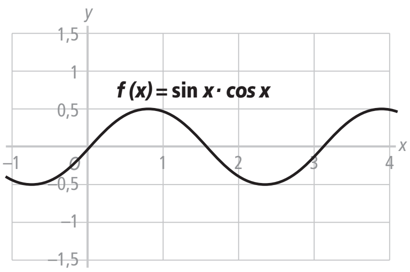
Dit alles geeft $g(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.

d De grafieken van f en g verschillen $\frac{1}{4}$ periode, dus is het faseverschil $\frac{1}{4}$.

7.2 Product en quotiënt

bladzijde 196

9a



De amplitude is 0,5 en de periode is π.

b $g(x) = 0{,}5 \sin 2x$

c Als geldt $f(x) = g(x)$ dan is $f(x) - g(x) = 0$ voor elke x en valt de grafiek van $f - g$ samen met de x-as.

Als geldt $f(x) = g(x)$ dan is $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ voor elke x (mits $g(x) \neq 0$) en valt de grafiek van $\dfrac{f}{g}$ samen met de lijn $y = 1$.

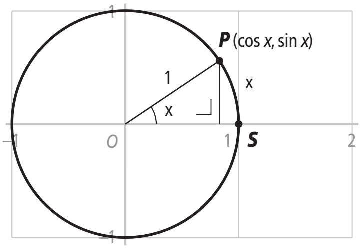
d Beide grafieken vallen volledig samen.

10a $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$ en $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$

b De grafieken van g en h vallen samen na verschuiving over een halve periode, dus is het faseverschil $\frac{1}{2}$.

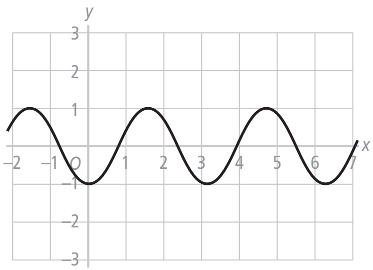
c Je krijgt dan als grafiek de lijn $y = 1$. Dit klopt ook met de voorschriften van opdracht a.

11



Voor P op de eenheidscirkel geldt $P(\cos x, \sin x)$. Pas je de stelling van Pythagoras toe op de rechthoekige driehoek in de figuur dan geldt: $x^2_P + y^2_P = 1^2$ en dus geldt $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

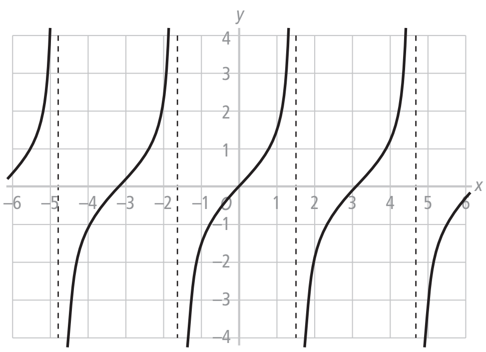
12a



b De grafiek van f is een sinusoïde met amplitude 1 en periode π . De sinus is een kwart periode verschoven naar rechts. Dus geldt $f(x) = \sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$.
Een andere mogelijkheid is om $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (opdracht 11) te gebruiken. Je krijgt dan $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 2\sin^2 x - 1$.

bladzijde 197

13a

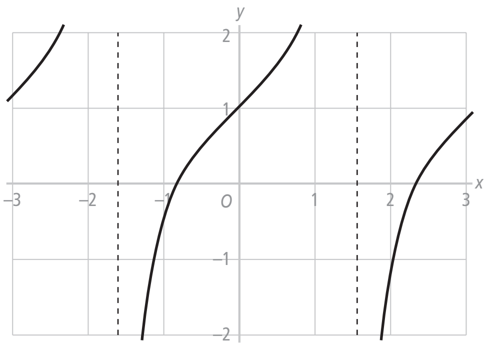


b De verticale asymptoten corresponderen met de nulpunten van de noemer, dus met $\cos x = 0$.
Dit geeft op het gegeven interval: $x = -1\frac{1}{2}\pi$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

c Dan is $\sin x = 0$ en dit geeft op het gegeven interval: $x = -2\pi$; $x = -\pi$; $x = 0$; $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

d De periode van f is π .

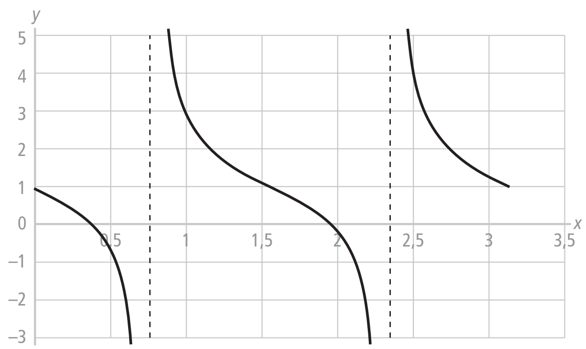
14a



b Met de rekenmachine vind je dat $f(x)=4$ is voor $x\approx -1{,}893$. Met periode π geeft dit op het gegeven interval de oplossingen: $x\approx -1{,}893$ en $x\approx 1{,}249$.

c $f(x)=0 \Leftrightarrow \tan x=-1$ en dit laatste is het geval als $x=-\frac{1}{4}\pi$ of $x=\frac{3}{4}\pi$.
Aflezen: $-\frac{1}{2}\pi < x \le -\frac{1}{4}\pi$ of $\frac{1}{2}\pi < x \le \frac{3}{4}\pi$

d



Met de rekenmachine vind je dat $g(x)=4$ is als $x\approx 0{,}946$. Met de periode $\frac{1}{2}\pi$ vind je op het gegeven interval ook nog $x\approx 2{,}517$.
Uit $g(x)=0$ volgt $\tan 2x=1$. En dus is $x=\frac{1}{8}\pi$ en $x=\frac{5}{8}\pi$ op het gegeven interval.
Aflezen: $\frac{1}{8}\pi \le x < \frac{1}{4}\pi$ of $\frac{5}{8}\pi \le x < \frac{3}{4}\pi$.

15a $x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$ (k geheel)

b

c $g(x)=1+\tan^2 x=1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

16a *f*: als $\sin x=0$ dus zijn $x=-\pi$; $x=0$; $x=\pi$; $x=2\pi$ verticale asymptoten.
g: als $\cos x=0$ dus zijn $x=-\frac{1}{2}\pi$; $x=\frac{1}{2}\pi$ en $x=1\frac{1}{2}\pi$ verticale asymptoten.

b $\dfrac{1}{\sin x}=2 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ en dus is de oplossing $x=\frac{1}{6}\pi$ of $x=\frac{5}{6}\pi$.

c De periode van h is 2π en de verticale asymptoten zijn: $x=-\pi$; $x=0$; $x=\pi$; $x=2\pi$ en $x=-\frac{1}{2}\pi$; $x=\frac{1}{2}\pi$ en $x=1\frac{1}{2}\pi$.

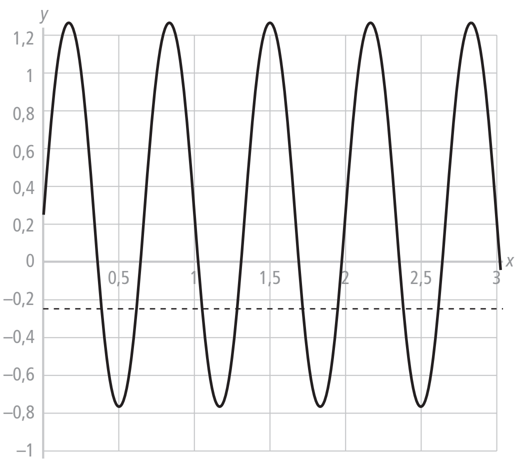
d Uit een plot van de grafiek van h op $[-\pi,\ 2\pi]$ volgt dat de toppen liggen bij $x=-\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{1}{4}\pi$ en $x=1\frac{1}{4}\pi$.

Omdat $h(\frac{1}{4}\ \ )=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=2\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$ is $(\frac{1}{4}\pi,\ 2\sqrt{2})\approx(0{,}79;\ 2{,}83)$ een top.
Evenzo zijn $(-\frac{3}{4}\pi,\ -2\sqrt{2})\approx(-0{,}79;\ -2{,}83)$ en $(1\frac{1}{4}\pi,\ -2\sqrt{2})\approx(3{,}93;\ -2{,}83)$ toppen.

17a Periode f_3 is 2π en periode f_4 is π .
b Amplitude is 0,5 en evenwichtsstand is $y = 0,5$. Dus lijkt $g(x) = 0,5 - 0,5\cos 2x$ te voldoen.
Plot $y = \dfrac{f_4(x)}{g(x)}$ laat zien dat de beide functies niet samenvallen en dus is f_4 geen sinusoïde.

7.3 Vergelijkingen oplossen

bladzijde 198

18a


Je kunt nu aflezen dat er 8 snijpunten zijn.
b Met INTERSECT vind je $x \approx 0,389$ en $x \approx 0,611$.
c De periode is $\dfrac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3} \approx 0,667$ en dus zijn de overige snijpunten bij:
$x \approx 1,056$; $x \approx 1,723$; $x \approx 2,390$; $x \approx 1,278$; $x \approx 1,945$ en $x \approx 2,612$

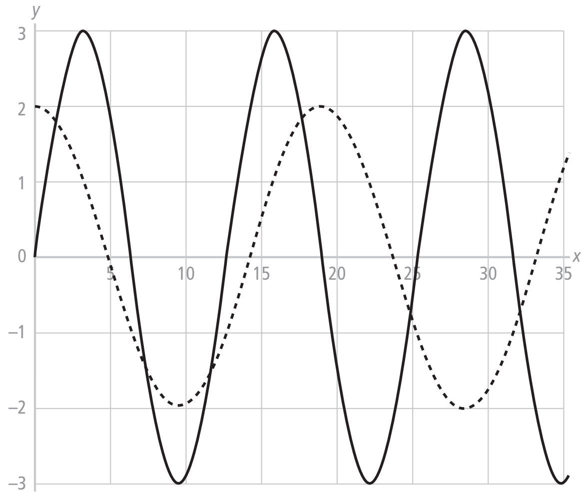
19a Het patroon herhaalt zich na twee perioden van de grafiek van *f*. Dus heeft het patroon periode 2π .
b 2 respectievelijk 3 perioden.
c Met een plot vind je periode π .

20a Periode *f* is 4π en periode *g* is 2π dus is de gemeenschappelijke periode 4π .
b Periode *f* is $\frac{1}{2}\pi$ en periode *g* is $1\frac{1}{3}\pi$ dus is de gemeenschappelijke periode 4π .
c Periode *f* is 2 en periode *g* is 3 dus is de gemeenschappelijke periode 6.
d Periode *f* is 3π en periode *g* is 3π dus is de gemeenschappelijke periode 3π .

bladzijde 199

21a Periode *f* is 4π en periode *g* is 6π dus is de gemeenschappelijke periode 12π .

b



Op het interval $[0,\ 12\pi]$ vind je met de rekenmachine:
$x \approx 1{,}30$; $x \approx 7{,}37$; $x \approx 11{,}48$; $x \approx 17{,}55$; $x \approx 24{,}65$; $x \approx 31{,}90$.

22a $x \approx 1{,}57$; $x \approx 3{,}67$; $x \approx 5{,}67$ en met gemeenschappelijke periode 2π vind je ook $x \approx 7{,}85$; $x \approx 9{,}95$; $x \approx 12{,}04$

b $x \approx -4{,}2$; $x \approx -1{,}8$; $x \approx 0{,}6$; $x \approx 3{,}0$; $x \approx 5{,}4$

c De perioden zijn 4 en 6 en dus is de gemeenschappelijke periode 12.
Bij opdracht b is gebleken dat er 5 oplossingen zijn op een interval met lengte 12.
Dus zijn er op het gegeven interval $15 \times 5 = 75$ oplossingen.

23a $a = \dfrac{2\pi}{1\frac{1}{2}\pi} = 1\frac{1}{3}$

b In de periode van 3π past twee keer de periode van *f*. Dus kan 3π de periode van *g* zijn en is $b = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ of $b = -\dfrac{2\pi}{3\pi} = -\frac{2}{3}$. Maar *g* kan ook periode π hebben $\Rightarrow b = 2$ of $b = -2$

24a De gemeenschappelijke periode is 2π. Met een plot en INTERSECT vind je op het gegeven interval de oplossingen $x \approx -1{,}89$; $x \approx 1{,}25$; $x \approx 4{,}39$.

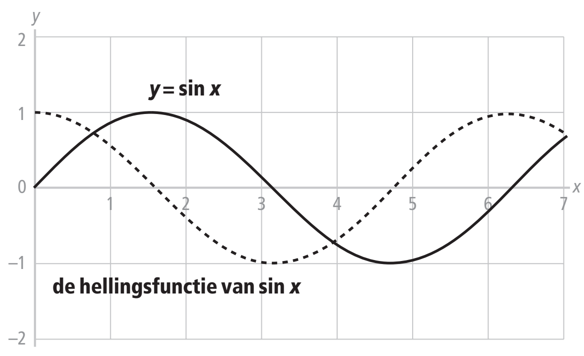
b $\sin x = 3\cos x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \tan x = 3$

c Allereerst de meest voorkomende vorm: $a\sin x = b\cos x \Rightarrow \tan x = \dfrac{b}{a}$

Algemener: $a\sin p(x-c) = b\cos p(x-c) \Rightarrow \tan p(x-c) = \dfrac{b}{a}$

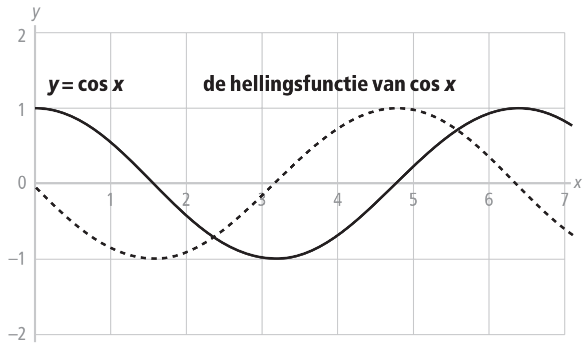
7.4 Afgeleiden

25a



b Waarschijnlijk geldt $f'(x) = \cos x$.

c



Waarschijnlijk geldt $h'(x) = -\sin x$.

26a $f'(x) = 5 \cdot -\sin x = -5\sin x$

b $g'(x) = 0 + \cos x = \cos x$

c $k'(x) = 1 + \cos x - (-\sin x) = 1 + \cos x + \sin x$

d $l'(x) = 3 \cdot -\sin \frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{3} = -\sin \frac{1}{3} x$ volgens de kettingregel.

27a $k'(x) = \frac{1}{2} \cdot -\sin 2\pi x \cdot 2\pi = -\pi \sin 2\pi x$

b $\dfrac{du}{dx} = -3 \cdot \cos \frac{2}{5}\pi(2-x) \cdot \frac{2}{5}\pi(0-1) = 1\frac{1}{5}\pi \cos \frac{2}{5}\pi(2-x)$

c $h'(x) = 2 \cdot 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 30\sin^2 5x \cdot \cos 5x$

d $r = 2 \cdot (1+3\sin x)^{-1} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot -1 \cdot (1+3\sin x)^{-2} \cdot (0 + 3\cos x) = \dfrac{-6\cos x}{(1+3\sin x)^2}$

28a $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$ en $g(x) = 2\cos x \cdot -\sin x = -2\sin x \cdot \cos x$
Er geldt $g'(x) = -f'(x)$.

b $s'(x) = f'(x) + g'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ Omdat $s'(x) = 0$ is $s(x)$ een constante en is de grafiek van s een horizontale lijn.

c $v'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - -f'(x) = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x$

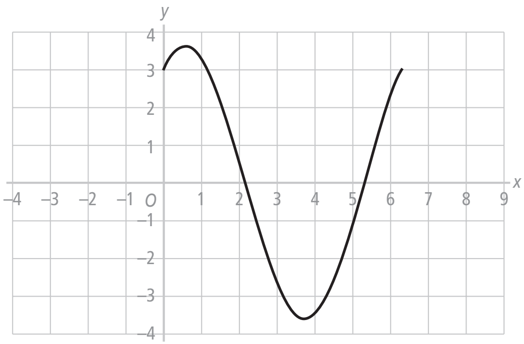
d De toppen corresponderen met $v'(x) = 0$ dus met $\sin x = 0$ en met $\cos x = 0$ op het gegeven interval. Dus met $x = -\pi$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = 0$; $x = \frac{1}{2}\pi$; $x = \pi$; $x = 1\frac{1}{2}\pi$ en $x = 2\pi$.
De toppen zijn: $(-\pi, -1)$; $(-\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(0, -1)$; $(\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(\pi, -1)$; $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(2\pi, -1)$.

bladzijde 201

29a De periode is $\dfrac{2\pi}{0{,}4\pi} = 5$ seconden. Dat is realistisch.

b $p'(t) = -20 \cdot \cos 0{,}4\pi t \cdot 0{,}4\pi = -8\pi \cdot \cos 0{,}4\pi t \Rightarrow p'(1) = -8\pi \cdot \cos 0{,}4\pi \approx -7{,}77$ mbar.
Er is onderdruk in de longen dus inademen.

c Dan gaat het om de toppen van p' en dus is het maximum $8\pi \approx 25{,}1$ mbar/s en het minimum is $-8\pi \approx -25{,}1$ mbar/s. Dit doet zich voor als $t = 0$ en steeds een halve periode later, dus als $t = k \cdot 2\frac{1}{2}$ met k geheel.

30a 

$2\sin x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = -1\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x = -1{,}5$

Op het gegeven interval vind je de oplossingen $x \approx 2{,}16$ en $x \approx 5{,}30$.

b $f'(x) = 2\cos x - 3\sin x \Rightarrow f''(x) = -2\sin x - 3\cos x = -f(x)$

De grafiek van f'' is het spiegelbeeld in de *x*-as van de grafiek van *f*.

c Omdat $f''(x) = -f(x)$ vind je dezelfde oplossingen als bij opdracht a, dus $x \approx 2{,}16$ en $x \approx 5{,}30$

d Ja want $g'(x) = a\cos x - b\sin x \Rightarrow g''(x) = -a\sin x - b\cos x = -g(x)$.

31a $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \tfrac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

b De afgeleide bestaat niet als $\sin x = 0$ dus als $x = 0$ of als $x =$.

c Daar heeft de grafiek een verticale raaklijn.

32a $f_a'(x) = ab\cos bx \Rightarrow f_a'(0) = ab$ en dus moet $ab = 3$.

b Als het maximum van *f* gelijk is aan 5 dan is $a = 5$ of $a = -5$ en dus is dan $b = \tfrac{3}{5}$ of $b = -\tfrac{3}{5}$.

33a $f'(x) = 0 + a\cos b(x - c) \cdot b = ab\cos b(x - c)$

b Het product *ab* is de amplitude van de afgeleide.

De parameter *b*, en dus de periode, blijft dezelfde.

De horizontale verschuiving *c* blijft dezelfde.

De waarde van *d* heeft geen invloed op de afgeleide.

c 1. Volgt uit $f'(x) = 0 + ab \cdot \cos b(x - c)$.

2. De parameter *b*, en dus de periode $\dfrac{2\pi}{b}$, blijft dezelfde.

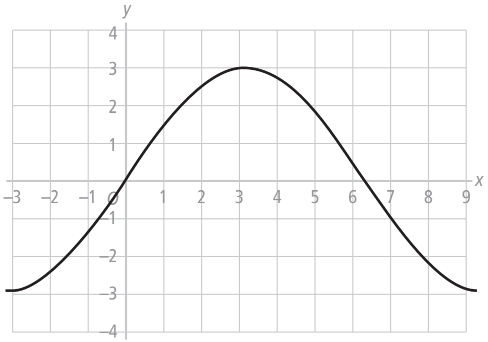
7.5 Integreren

bladzijde 202

34a $g(x) = \sin 3x \Rightarrow g'(x) = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$ en dit laatste is niet gelijk aan $f(x)$.

b Er is een factor 3 die verdwijnen moet. Dit lukt door het voorschrift van *g* met $\tfrac{1}{3}$ te vermenigvuldigen. Dus voldoet $h(x) = \tfrac{1}{3}\sin 3x$.

35a



b $F(x) = -6\cos\frac{1}{2}x$ is een primitieve.

Dus $\int_0^{\pi} 3\sin\frac{1}{2}x\,dx = [-6\cos\frac{1}{2}x]_0^{\pi} = -6\cos\frac{1}{2}\pi - (-6\cos\frac{1}{2}\cdot 0) = 0 + 6 = 6$

Dit is de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as en de grafiek van f op het interval $[0, \pi]$.

c $\int_{-\pi}^{\pi} 3\sin\frac{1}{2}x\,dx = [-6\cos\frac{1}{2}x]_{-\pi}^{\pi} = -6\cos\frac{1}{2}\pi - (-6\cos(-\frac{1}{2}\pi)) = 0 + 0 = 0$

Een bepaalde integraal berekent de oppervlakte ingesloten door de x-as en de grafiek van een functie. Daarbij wordt de oppervlakte onder de x-as als negatief gezien. Dus je berekent met een bepaalde integraal het verschil in oppervlakte van de gebieden ingesloten door de grafiek van f en de x-as. In dit geval is de oppervlakte onder de x-as is gelijk aan de oppervlakte boven de x-as. En dus is het verschil 0, de uitkomst van de bepaalde integraal.

36a $F(x) = 3\cdot -\frac{1}{4}\cos 4x + -1\cdot\sin(\pi - x) + C = -\frac{3}{4}\cos 4x - \sin(\pi - x) + C$

b $G(x) = 2x - 3\cdot -\frac{1}{2}\sin(4 - 2x) + C = 2x + 1\frac{1}{2}\sin(4 - 2x) + C$

c $H(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$

d $K(x) = \cos(2\pi x)\cdot -1\cdot\dfrac{1}{2\pi} + C = -\dfrac{\cos(2\pi x)}{2\pi} + C$

37a $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - -\cos 0 = --1 + 1 = 2$

$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - -\cos 0 = -1 + 1 = 0$

$\int_{-\pi}^{0} \sin x\,dx = [-\cos x]_{-\pi}^{0} = -\cos 0 - -\cos(-\pi) = -1 + -1 = -2$

b Een bepaalde integraal berekent de oppervlakte ingesloten door de x-as en de grafiek van een functie. Daarbij wordt de oppervlakte onder de x-as als negatief en de oppervlakte boven de x-as als positief gerekend.

Voor $[0, \pi]$ krijg je de oppervlakte ingesloten door de x-as en de grafiek.

Voor $[0, 2\pi]$ krijg je het verschil in de oppervlakte van de gebieden ingesloten door de x-as en de grafiek. Omdat er evenveel onder als boven de x-as ligt geeft de bepaalde integraal 0.

Voor $[-\pi, 0]$ ligt het gebied onder de x-as geeft de bepaalde integraal de tegengestelde van de oppervlakte.

bladzijde 203

38a $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1$ dus op het gegeven interval $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$.
De snijpunten zijn $(\frac{1}{4}\pi,\ \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(1\frac{1}{4}\pi,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2})$

b $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{1\frac{1}{4}\pi} \sin x - \cos x \, \mathrm{d}x = [-\cos x - \sin x]_{\frac{1}{4}\pi}^{1\frac{1}{4}\pi} =$

$(\frac{1}{2}\sqrt{2} - -\frac{1}{2}\sqrt{2}) - (-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2} - -\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

39a Invullen $t = 14$ in $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0 + 8\sin\frac{\pi}{12}(t-14)\cdot\frac{\pi}{12}$ geeft $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$.

b $\int_{6}^{18} 10 + 8\cos\frac{\pi}{12}(t-14)\,\mathrm{d}t = [10t + 8\cdot\frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi}{12}(t-14)]_{6}^{18} =$

$(180 + \frac{96}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}) - (60 + \frac{96}{\pi}\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx 172{,}93$ uur$\cdot^{o}C$

c De rechthoek heeft zijde 12 en hoogte C. Dus moet $12C = 172{,}93$ en dus is $C \approx 14{,}4\ ^{\circ}C$

d De gemiddelde temperatuur gedurende de periode van 6.00 uur tot 18.00 uur.

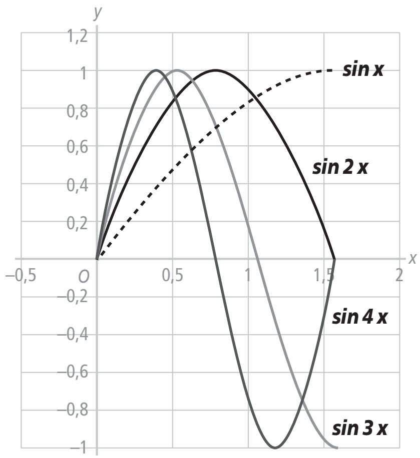
40a $\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = -\cos\frac{1}{2}\pi - -\cos 0 = -0 + 1 = 1$

$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin 2x\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{2}\cos 2x]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{2}\cos\pi - -\cos 0 = -\frac{1}{2}\cdot -1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1$

$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin 3x\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{3}\cos 3x]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{3}\cos 1\frac{1}{2}\pi - -\frac{1}{3}\cos 0 = -0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin 4x\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{4}\cos 4x]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{1}{4}\cos 2\pi - -\cos 0 = -\frac{1}{4} - -\frac{1}{4} = 0$

b



Voor $a = 4$ zijn de oppervlakten onder en boven de x-as gelijk.

c Voor $a = 4$ is er één periode op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Dus voor $a = 8$ zijn er twee perioden op dit interval en ook dan zijn de oppervlakten onder en boven de as gelijk.
Idem voor $a = 12, 16, ...$

7.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 204

41a De lijn OP gaat door $(0,0)$ en $(1\frac{4}{5},\ \sin 1\frac{4}{5})$, dus geldt $y = \dfrac{\sin 1\frac{4}{5}}{1\frac{4}{5}}x = \dfrac{5\sin 1\frac{4}{5}}{9}x$.
Voor de oppervlakte geldt

$$\int_0^{1,8} \sin x - \frac{5\sin 1\frac{4}{5}}{9}x\ \mathrm{d}x = [-\cos x - \frac{5\sin 1\frac{4}{5}}{18}x^2]_0^{1,8} \approx -0,649 - -1 \approx 0,35$$

b $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(1\frac{4}{5}) = \cos 1\frac{4}{5}$ en dus geldt voor PR de vergelijking $y = \cos 1\frac{4}{5} \cdot x + b$.
Invullen van $(1\frac{4}{5},\ \sin 1\frac{4}{5})$ geeft $b = \sin 1\frac{4}{5} - \cos 1\frac{4}{5} \cdot 1\frac{4}{5}$.
Dus geldt voor PR: $y = \cos 1\frac{4}{5} \cdot x + \sin 1\frac{4}{5} - \cos 1\frac{4}{5} \cdot 1\frac{4}{5} \Rightarrow y \approx -0,23x + 1,38$

c $y = -0,23x + 1,38 = 0 \Rightarrow$ snijpunt met de x-as: $x \approx 6,1 \Rightarrow R(6,1;\ 0)$
Oppervlakte van driehoek PQR is dan $\frac{1}{2}PQ \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot \sin 1\frac{4}{5} \cdot (6,1 - 1,8) \approx 2,1$

d $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(p) = \cos p$ en dus is de raaklijn evenwijdig aan de lijn $y = \cos p \cdot x$

e De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt is $\cos p$ dus geldt voor de raaklijn
$y = \cos p \cdot x + b$.
Invullen van $(p,\ \sin p)$ geeft $\sin p = \cos p \cdot p + b \Rightarrow b = \sin p - p \cdot \cos p$ zodat
$y = \cos p \cdot x + \sin p - p\cos p = (x - p) \cdot \cos p + \sin p$.

f Stel $(x - p) \cdot \cos p + \sin p = 0$ dan is $(x - p) \cdot \cos p = -\sin p$ en is $x - p = -\dfrac{\sin p}{\cos p}$.
Uit dit laatste volgt $x = p - \dfrac{\sin p}{\cos p}$.

42a Een primitieve zou dan moeten zijn: $f(x) = 2\sin x$ en dat is niet gegeven.

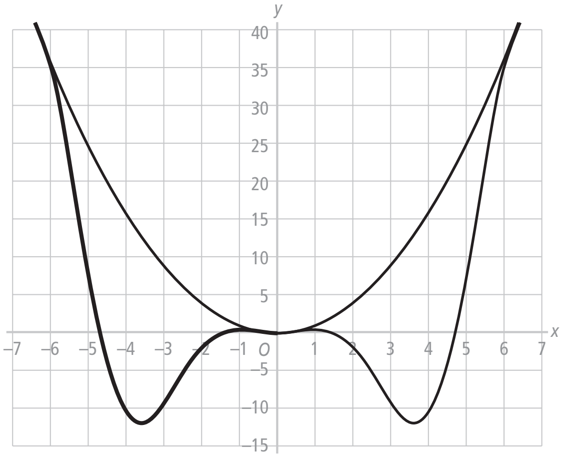
b $g'(x) = 2(x - \sin x) \cdot (1 - \cos x)$

c $g(x) = (x - \sin x)^2 = (x - \sin x)(x - \sin x) = x \cdot x - x \cdot \sin x - x \cdot \sin x + \sin x \cdot \sin x \Rightarrow$
$g(x) = x^2 - 2x\sin x + \sin^2 x \Rightarrow 2x\sin x = x^2 + \sin^2 x - g(x)$
Dus geldt $f(x) = 2x\sin x = x^2 + \sin^2 x - g(x)$

d Uit het resultaat van opdracht c volgt:
$f'(x) = 2x + 2\sin x \cdot \cos x - g'(x) = 2x + 2\sin x\cos x - 2(x - \sin x)(1 - \cos x)$.
Dit kun je herleiden tot $f'(x) = 2x + 2\sin x\cos x - 2(x - \sin x)(1 - \cos x) =$
$= 2x + 2\sin x\cos x - 2x + 2x\cos x + 2\sin x - 2\sin x\cos x = 2x\cos x + 2\sin x$

bladzijde 205

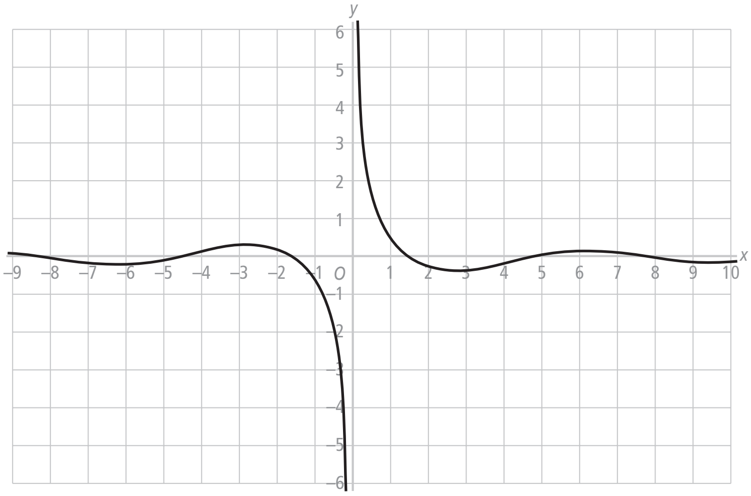
43a



Stel $x^2\cos x = x^2$ dan is $x = 0$ of $\cos x = 1$.
De oplossing van $\cos x = 1$ op het gegeven interval is $x = 0;\ x = 2\pi;\ x = -2\pi$.
Snijpunten: $(-2\pi,\ 4\pi^2)$, $(0, 0)$ en $(2\pi,\ 4\pi^2)$.

b Omdat $-1 \le \cos x \le 1$ geldt $-x^2 \le x^2 \cdot \cos x \le x^2$ want $x^2 \ge 0$.

c



Verticale asymptoot $x = 0$ en horizontale asymptoot $y = 0$.

44a $\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en dus geldt $y = -5t^2 + 25t\sqrt{3}$.
$-5t^2 + 25t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow -5t(t - 5\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow t = 0$ of $t = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66$
Dus na 8,66 seconden en er is dan $50 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \cos\frac{1}{3}\pi = 125\sqrt{3} \approx 216{,}5$ meter afgelegd in horizontale richting.

b $-5t^2 + 50t\sin\alpha = 0 \Rightarrow t = 0$ of $t = 10\sin\alpha$

c $s = 50 \cdot 10\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 500\sin\alpha\cos\alpha$

d Een plot van de grafiek van s laat zien dat het maximum bereikt wordt voor $\alpha = \frac{1}{4}\pi$.
Het bijbehorende maximum is dan $500\sin\frac{1}{4}\pi\cos\frac{1}{4}\pi = 500 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 125 \cdot 2 = 250$ meter.

ICT Product en quotiënt

bladzijde 206

I-1a De amplitude is 0,5 en de periode is π.

b $g(x) = 0{,}5\sin 2x$

c Als geldt $f(x) = g(x)$ dan is $f(x) - g(x) = 0$ voor elke x en valt de grafiek van $f - g$ samen met de x-as.

Als geldt $f(x) = g(x)$ dan is $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ voor elke x (mits $g(x) \ne 0$) en valt de grafiek van $\dfrac{f}{g}$ samen met de lijn $y = 1$.

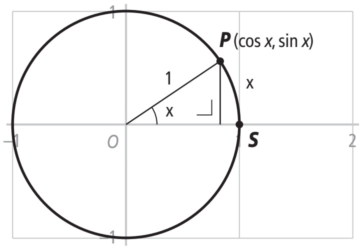
d Je ziet de lijnen $y = 0$ en $y = 1$. Dus de beide grafieken vallen volledig samen.

I-2a $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$ en $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$

b De grafieken van g en h vallen samen na verschuiving over een halve periode, dus is het faseverschil $\frac{1}{2}$.

c Je krijgt dan als grafiek de lijn $y = 1$. Dit klopt ook met de voorschriften van opdracht a.

I-3



Voor P op de eenheidscirkel geldt $P(\cos x, \sin x)$. Pas je de stelling van Pythagoras toe op de rechthoekige driehoek in de figuur dan geldt: $x^2_P + y^2_P = 1^2$ en dus geldt $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

bladzijde 207

I-4 De grafiek van f is een sinusoïde met amplitude 1 en periode π . De sinus is een kwart periode verschoven naar rechts. Dus geldt $f(x) = \sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$.
Een andere mogelijkheid is om $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (opdracht 11) te gebruiken. Je krijgt dan $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 2\sin^2 x - 1$.

I-5a De verticale asymptoten corresponderen met de nulpunten van de noemer, dus met $\cos x = 0$.
Dit geeft op het gegeven interval: $x = -1\frac{1}{2}\pi$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

b Dan is $\sin x = 0$ en dit geeft op het gegeven interval: $x = -2\pi$; $x = -\pi$; $x = 0$; $x = \pi$ en $x = 2\pi$.

c De periode van f is π .

I-6a $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (k geheel)

b

c $g(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

I-7a $f(x) = 2\sin x$

b Het verschil is steeds 0 en de deling geeft steeds 1 mits $\cos x \neq 0$ is want dan is $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ niet gedefinieerd.

I-8a n even: functiewaarden zijn groter of gelijk aan 0 en de functie is periodiek met periode π .
n oneven: de functiewaarden zijn ook negatief en de periode is 2π .

b n even: toppen zijn $(\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(\pi, 0)$; $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$
n oneven: $(\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$

c Amplitude is 0,5 en evenwichtsstand is $y = 0,5$. Dus lijkt $g(x) = 0,5 - 0,5\cos 2x$ te voldoen.
Plot $y = \dfrac{f_4(x)}{g(x)}$ laat zien dat de beide functies niet samenvallen en dus is f_4 geen sinusoïde.

ICT Afgeleiden

bladzijde 208

I-9a Gebruik de 'Uitkomst en helling'-button en vul in pi of π. Je krijgt dan dat de helling 2 is.

b Aflezen geef $(\pi, 0)$; $(0,\ 0)$; $(2\pi, 0)$.

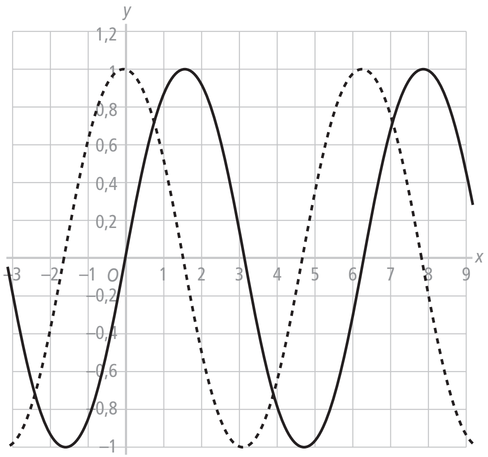
c Vink formule A uit en vink formule B aan. Voer 'pi/2'in en lees als helling 3 af.

Andere punten met helling 3 zijn (gebruik dat de periode $\frac{2}{3}\pi$ is):

$x = -\frac{1}{6}\pi,\ x = 1\frac{1}{6}\pi,\ x = 1\frac{5}{6}\pi$.

d De golfvorm herhaalt zich na elke periode dus herhaalt ook de helling zich met dezelfde periode.

e Vink formule A aan en formule B uit. Verander A in $y = \sin(x)$.
Kies onder Extra de optie Hellingen. Kies in een nieuw venster het tabblad Hellinggrafiek en start de animatie.
In wat je dan krijgt is de rode grafiek de hellinggrafiek van $y = \sin(x)$ en dit is de grafiek van $y = \cos(x)$.



f Je moet nu vinden dat de hellinggrafiek van $y = \cos(x)$ dezelfde is als de grafiek van $y = -\sin(x)$.

I-10a $f'(x) = 5 \cdot -\sin x = -5\sin x$

b $g'(x) = 0 + \cos x = \cos x$

c $k'(x) = 1 + \cos x - (-\sin x) = 1 + \cos x + \sin x$

d $m(x) = 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x$ volgens de kettingregel.

I-11a $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$ en $g(x) = 2\cos x \cdot -\sin x = -2\sin x \cdot \cos x$
Er geldt $g'(x) = -f'(x)$.

b $s'(x) = f'(x) + g'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ Omdat $s'(x) = 0$ is $s(x)$ een constante en is de grafiek van s een horizontale lijn.

c $v'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - -f'(x) = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x$

d De toppen corresponderen met $v'(x) = 0$ dus met $\sin x = 0$ en met $\cos x = 0$ op het gegeven interval. Dus met $x = -\pi$; $x = -\frac{1}{2}\pi$; $x = 0$; $x = \frac{1}{2}\pi$; $x = \pi$; $x = 1\frac{1}{2}\pi$ *en* $x = 2\pi$.
De toppen zijn: $(-\pi, -1)$; $(-\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(0, -1)$; $(\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(\pi, -1)$; $(1\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(2\pi, -1)$.

bladzijde 209

I-12a $k'(x) = \frac{1}{2} \cdot -\sin 2\pi x \cdot 2\pi = -\pi \sin 2\pi x$

b $\dfrac{du}{dx} = -3 \cdot \cos\frac{2}{5}\pi(2-x) \cdot \frac{2}{5}\pi(0-1) = 1\frac{1}{5}\pi\cos\frac{2}{5}\pi(2-x)$

c $h'(x) = 2 \cdot 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 30\sin^2 5x \cdot \cos 5x$

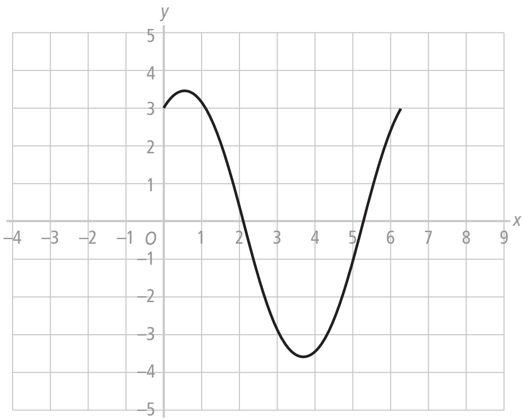
d $r = 2 \cdot (1 + 3\sin x)^{-1} \Rightarrow \dfrac{dr}{dx} = 2 \cdot -1 \cdot (1 + 3\sin x)^{-2} \cdot (0 + 3\cos x) = \dfrac{-6\cos x}{(1 + 3\sin x)^2}$

I-13a De periode is $\dfrac{2\pi}{0{,}4\pi} = 5$ seconden. Dat is realistisch.

b $p(t) = -20 \cdot \cos 0{,}4\pi t \cdot 0{,}4\pi = -8\pi \cdot \cos 0{,}4\pi t \Rightarrow p(1) = -8\pi \cdot \cos 0{,}4\pi \approx -7{,}77$ mbar.
Er is onderdruk in de longen dus inademen.

c Dan gaat het om de toppen van p' en dus is het maximum $8\pi \approx 25{,}1$ mbar/s en het minimum is $-8\pi \approx -25{,}1$ mbar/s. Dit doet zich voor als $t = 0$ en steeds een halve periode later, dus als $t = k \cdot 2\frac{1}{2}$ met k geheel.

I-14a



$2\sin x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = -1\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x = -1{,}5$

Op het gegeven interval vind je de oplossingen $x \approx 2{,}16$ en $x \approx 5{,}30$.

b $f'(x) = 2\cos x - 3\sin x \Rightarrow f''(x) = -2\sin x - 3\cos x = -f(x)$
De grafiek van f'' is het spiegelbeeld in de *x*-as van de grafiek van *f*.

c Omdat $f''(x) = -f(x)$ vind je delfde oplossingen als bij opdracht a, dus $x \approx 2{,}16$ en $x \approx 5{,}30$

d Ja want $g'(x) = a\cos x - b\sin x \Rightarrow g''(x) = -a\sin x - b\cos x = -g(x)$.

I-15a $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \tfrac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

b De afgeleide bestaat niet als $\sin x = 0$ dus als $x = 0$ of als $x = \pi$.

c Daar heeft de grafiek een verticale raaklijn.

I-16a $f_a'(x) = ab\cos bx \Rightarrow f_a'(0) = ab$ en dus moet $ab = 3$.

b Als het maximum van f gelijk is aan 5 dan is $a = 5$ of $a = -5$ en dus is dan $b = \tfrac{3}{5}$ of $b = -\tfrac{3}{5}$

Test jezelf

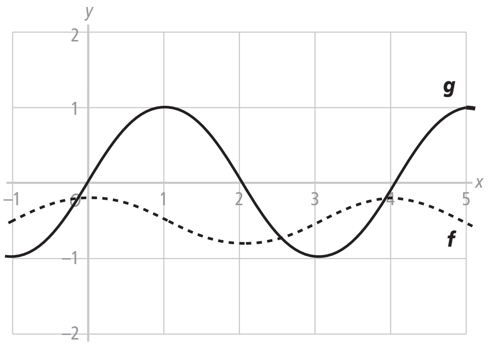
bladzijde 212

T-1a De periode is $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ seconden.

b Drie trillingen per seconde dus is de periode $\tfrac{1}{3}$ seconde. De amplitude is 2. een passende formule is $w = 2\cos\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}t = 2\cos 6\pi t$ als deze op $t = 0$ vanuit een uiterste stand wordt losgelaten.

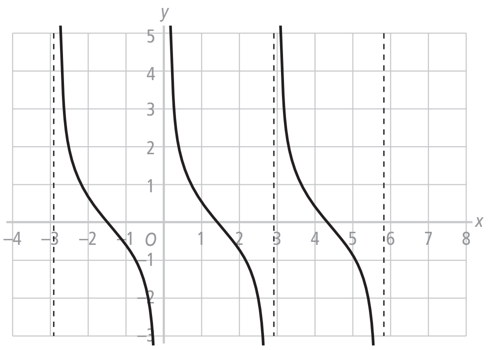
T-2a $g(x) = \sin\tfrac{1}{2}\ x$

b Eerst g schetsen en dan 0,25 periode verschuiven en daarna de amplitude en de evenwichtsstand aanpassen.



c Omdat er met g 0,25 faseverschil moet zijn en de periode 4 is moet je horizontaal 1 verschuiven.
Dus voldoet $f(x) = -0{,}5 + 0{,}3\sin \frac{1}{2}\pi(x-1)$ maar ook voldoet $f(x) = -0{,}5 + 0{,}3\sin \frac{1}{2}\pi(x+1)$.

T-3a



b Dan is $\cos x = 0$ en moet $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ met k geheel.
De periode lees je af in de grafiek en is π.

c Die treden op als $\sin x = 0$ dus $x = k\cdot\pi$ met k geheel.

d $g(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \dfrac{1}{f(x)}$

e Stel $f(x) = 2$ dan moet $\tan x = \frac{1}{2}$; $x \approx 0{,}464$ of $x \approx 0{,}464 + \pi \approx 3{,}605$

f Stel $f(x) = 1$ dan moet $\tan x = 1$; $x = \frac{1}{4}\pi$ *of* $x = 1\frac{1}{4}\pi$.
Aflezen uit de grafiek: $\frac{1}{4}\pi \le x < \pi$ of $1\frac{1}{4}\pi \le x < 2\pi$.

T-4a Periode f: $\dfrac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$ en periode g: $\dfrac{2\pi}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{4}\pi$
De gemeenschappelijke periode is $1\frac{1}{2}\pi$.

b Op het interval $[0, 1\frac{1}{2}\pi]$ kun je 6 oplossingen tellen.
Op het gegeven interval zijn er dan $800 \times 6 = 4800$ oplossingen.

T-5a $f'(x) = 6\cos 3(x - \frac{1}{4}\pi)$

b $g'(x) = 1 - 2\sin(5 - 2x)$

c $h'(x) = 0{,}5 \cdot 4\sin^3 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6\sin^3 3x \cdot \cos 3x$

d $k'(x) = 3 \cdot -2 \cdot (\cos 5x)^{-3} \cdot -\sin 5x \cdot 5 = 30 \cdot \dfrac{1}{\cos^3 5x} \cdot \sin 5x = \dfrac{30\sin 5x}{\cos^3 5x}$

bladzijde 213

T-6a $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2 + x + 2\sin 4x)\ dx = [2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\cos 4x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = (\pi + \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{2}) - (0 + 0 - \frac{1}{2}) = \pi + \frac{1}{8}\pi^2$

b $\int_1^2 (\sin \pi x - 2\cos 3\pi x)\ dx = [-\frac{1}{\pi}\cos \pi x - \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x]_1^2 = (-\frac{1}{\pi} - 0) - (-\frac{1}{\pi} \cdot -1 - 0) = -\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$

c $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\sin x - \sin 2x)\ dx = [-2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = (0 + -\frac{1}{2}) - (-2 + \frac{1}{2}) = 1$

T-7a Plotten en INTERSECT geeft: $x \approx 0,86$; $x \approx 3,61$; $x \approx 4,95$

b De periode van *f* is $\frac{2\pi}{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{3}\pi$ en de periode van *g* is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.
Omdat de gemeenschappelijke periode 4π is moet je ook nog de oplossingen weten op $\left[2\pi, 4\pi\right]$, dat zijn $x \approx 7,14$; $x \approx 9,90$; $x \approx 11,24$. Dus zijn de oplossingen op $\mathbb{R}$:
$x \approx 0,86 + k \cdot 4\pi$; $x \approx 3,61 + k \cdot 4\pi$; $x \approx 4,97 + k \cdot 4\pi$; $x = 7,14 + k \cdot 4\pi$; $x = 9,90 + k \cdot 4\pi$; $x = 11,24 + k \cdot 4\pi$
(k geheel getal)

c $\int_{0,860}^{3,612} 2\sin x - 3\cos 1\frac{1}{2}x\ dx = [-4\cos \frac{1}{2}x - 2\sin 1\frac{1}{2}x]_{0,860}^{3,612} \approx 2,455 - -5,558 \approx 8,01$

T-8a 100 Hz

b $u'(t) = 0,3 \cdot \cos 200\pi t \cdot 200\pi = 60\pi \cdot \cos 200\pi t$
$u'(0) = 60\pi \cdot \cos 0 = 60\pi$ mm/s

T-9a $x = 0$ of $\sin x^2 = 0$
$x^2 = k \cdot \pi$ (k geheel)
$x = 0$; $x = \sqrt{\pi}$; $x = \sqrt{2\pi}$; $x = \sqrt{3\pi}$; $x = \sqrt{4\pi} = 2\sqrt{\pi}$; $x = \sqrt{5\pi}$

b $F'(x) = p \cdot -\sin(x^2) \cdot 2x = -2px\sin(x^2)$ dus is $-2p = 1 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}$

c $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\ dx = [-\frac{1}{2}\cos(x^2)]_0^{\sqrt{\pi}} = (-\frac{1}{2}\cos \pi) - (-\frac{1}{2} \cdot \cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

T-10 Periode *f* is π en de periode van *g* is 2.
Als er een gemeenschappelijke periode is dan moet gelden dat een of ander geheel veelvoud van π gelijk is aan een geheel veelvoud van 2. Dus $k \cdot \pi = 2 \cdot l$ maar dan is $\pi = \frac{2l}{k}$ en is π een breuk. Dit laatste is niet het geval en dus is er geen gemeenschappelijke periode.