Hoofdstuk 8 - Product- en quotiëntfuncties

Voorkennis: Algebra met breuken

bladzijde 216

V-1a $\frac{2x+1}{x}$ heeft geen betekenis als $x=0$ want dan wordt de noemer 0.

De breuk heeft betekenis als $x \neq 0$.

b $\frac{3x}{x^2+4}$ heeft geen betekenis als $x^2+4=0$, maar dat kan niet want $x^2+4>0$ voor alle x.

De breuk heeft dus voor alle waarden van x betekenis.

c $\frac{-3}{x^2-4x}$ heeft heeft geen betekenis als $x^2-4x=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow x=0$ of $x=4$.

De breuk heeft betekenis als $x \neq 0$ of $x \neq 4$.

d $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ heeft geen betekenis als x negatief is want dan bestaat de wortel niet.

De uitkomst van de wortel is nooit negatief dus de noemer is nooit 0.

De breuk heeft betekenis voor $x \geq 0$.

e $\frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ heeft geen betekenis als

$x^2-4x+3=0 \rightarrow (x-1)(x-3)=0 \rightarrow x=1$ of $x=3$.

De breuk heeft betekenis als $x \neq 1$ of $x \neq 3$.

f $\frac{x}{\sqrt{x+1}-3}$ heeft geen betekenis als $x+1<0 \rightarrow x<-1$ en heeft geen betekenis als

$\sqrt{x+1}-3=0 \rightarrow \sqrt{x+1}=3 \rightarrow x+1=9 \rightarrow x=8$.

De breuk heeft betekenis als $x \geq -1$ en $x \neq 8$.

V-2a $\frac{x}{x+1}+\frac{3}{x+2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}+\frac{3(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x}{(x+1)(x+2)}+\frac{3x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+3x+3}{(x+1)(x+2)}=$

$\frac{x^2+5x+3}{(x+1)(x+2)}$

b $\frac{x-1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)}+\frac{2x}{x(x-1)}=\frac{(x-1)^2+2x}{x(x-1)}=\frac{x^2-2x+1+2x}{x(x-1)}=\frac{x^2+1}{x(x-1)}$

c $\frac{2}{t}-\frac{1}{t-1}+1=\frac{2(t-1)}{t(t-1)}-\frac{t}{t(t-1)}+\frac{t(t-1)}{t(t-1)}=\frac{2(t-1)-t+t(t-1)}{t(t-1)}=\frac{2t-2-t+t^2-t}{t(t-1)}=\frac{t^2-2}{t(t-1)}$

d $\frac{2}{k+1}-\frac{3}{2k-1}=\frac{2(2k-1)}{(k+1)(2k-1)}-\frac{3(k+1)}{(k+1)(2k-1)}=\frac{2(2k-1)-3(k+1)}{(k+1)(2k-1)}=\frac{4k-2-3k-3}{(k+1)(2k-1)}=$

$\frac{k-5}{(k+1)(2k-1)}$

e $3+\frac{2}{x-1}=\frac{3(x-1)}{x-1}+\frac{2}{x-1}=\frac{3x-3+2}{x-1}=\frac{3x-1}{x-1}$

f $\frac{k}{2k-3}-\frac{1}{2}=\frac{2k}{2(2k-3)}-\frac{2k-3}{2(2k-3)}=\frac{2k-(2k-3)}{2(2k-3)}=\frac{2k-2k+3}{2(2k-3)}=\frac{3}{2(2k-3)}$

bladzijde 217

V-3a $\frac{2x}{3-x}=\frac{4x+1}{x+2} \rightarrow \frac{2x}{3-x}-\frac{4x+1}{x+2}=0 \rightarrow \frac{2x(x+2)}{(3-x)(x+2)}-\frac{(3-x)(4x+1)}{(3-x)(x+2)}=$

$\frac{2x(x+2)-(3-x)(4x+1)}{(3-x)(x+2)}=\frac{2x^2+4x-(12x+3-4x^2-x)}{(3-x)(x+2)}=\frac{2x^2+4x-12x-3+4x^2+x}{(3-x)(x+2)}=$

$\frac{6x^2-7x-3}{(3-x)(x+2)}=0 \rightarrow 6x^2-7x-3=0 \quad (x \neq 3 \text{ en } x \neq -2)$. Met de *abc*-formule vind je

$x=\frac{7+\sqrt{(-7)^2-4\cdot 6\cdot -3}}{2\cdot 6}=\frac{7+11}{12}=1\frac{1}{2}$ of $x=\frac{7-11}{12}=-\frac{1}{3}$

b $\frac{4-x}{x+2}=\frac{16}{x} \rightarrow \frac{4-x}{x+2}-\frac{16}{x}=0 \rightarrow \frac{x(4-x)}{x(x+2)}-\frac{16(x+2)}{x(x+2)}=\frac{x(4-x)-16(x+2)}{x(x+2)}=\frac{4x-x^2-16x-32}{x(x+2)}=$

$\frac{-x^2-12x-32}{x(x+2)}=\frac{-(x^2+12x+32)}{x(x+2)}=\frac{-(x+4)(x+8)}{x(x+2)}=0 \rightarrow (x+4)(x+8)=0 \quad (x \neq 0 \text{ en } x \neq -2) \rightarrow$

$x=-4$ of $x=-8$

c $1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0 \rightarrow 1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x-1}{x^2}=0 \rightarrow x^2-x-1=0 \quad (x \neq 0)$.

Met de *abc*-formule vind je

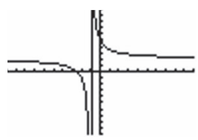
$x=\frac{1+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot -1}}{2\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

d $2-\frac{x-4}{x+1}=\frac{8}{x} \rightarrow 2-\frac{x-4}{x+1}-\frac{8}{x}=0 \rightarrow \frac{2x(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x(x-4)}{x(x+1)}-\frac{8(x+1)}{x(x+1)}=0 \rightarrow$

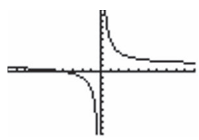
$\frac{2x(x+1)-x(x-4)-8(x+1)}{x(x+1)}=\frac{2x^2+2x-x^2+4x-8x-8}{x(x+1)}=\frac{x^2-2x-8}{x(x+1)}=\frac{(x-4)(x+2)}{x(x+1)}=0 \rightarrow$

$(x-4)(x+2)=0 \quad (x \neq 0 \text{ en } x \neq -1) \rightarrow x=4$ of $x=-2$

V-4a



Plot
Invoer: Y1 = (2X+5)/(X+1)
Venster: Standaardinstellingen



Plot
Invoer: Y1 = 1+4/X
Venster: Standaardinstellingen

Het domein van *f* is $\langle \leftarrow, -1\rangle$ en $\langle -1, \rightarrow\rangle$.
Het domein van *g* is $\langle \leftarrow, 0\rangle$ en $\langle 0, \rightarrow\rangle$.

b De grafiek van *f* heeft een verticale asymptoot als de noemer 0 wordt. Dat is voor $x = -1$.
De grafiek van *f* nadert de horizontale asymptoot steeds meer naarmate *x* groter of kleiner wordt. Voor zeer grote of zeer kleine waarden geldt $\frac{2x+5}{x+1} \approx \frac{2x}{x} = 2$. De waarde 2 blijft dus over en de horizontale asymptoot is $y = 2$.
De grafiek van *g* heeft een verticale asymptoot voor $x = 0$.
De grafiek van *g* heeft als horizontale asymptoot $y = 0$.

c $g(x) = 1 + \frac{4}{x} = \frac{x}{x} + \frac{4}{x} = \frac{x+4}{x}$

d Los op: $f(x) = g(x) \rightarrow \frac{2x+5}{x+1} = 1 + \frac{4}{x} \rightarrow \frac{2x+5}{x+1} = \frac{x+4}{x} \rightarrow \frac{2x+5}{x+1} - \frac{x+4}{x} = 0 \rightarrow$

$\frac{x(2x+5)}{x(x+1)} - \frac{(x+1)(x+4)}{x(x+1)} = 0 \rightarrow$

$\frac{2x^2+5x-(x^2+5x+4)}{x(x+1)} = 0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x(x+1)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+1)} = 0 \rightarrow$

$x = 2$ of $x = -2$

De bijbehorende *y*-waarden zijn $g(2) = 1 + \frac{4}{2} = 1 + 2 = 3$ en $g(-2) = 1 - \frac{4}{2} = 1 - 2 = -1$.

De coördinaten van de snijpunten zijn dus (2, 3) en (–2, –1).

V-5a De grafiek van *h* heeft een verticale asymptoot voor $x = 0$ en een horizontale asymptoot voor $y = 3$.

b Los op: $3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2+2x-1}{x^2} = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (x \neq 0)$

Oplossen met de *abc*-formule geeft
$x = \frac{-2+\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot -1}}{2\cdot 3} = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$ of $x = \frac{-2-4}{6} = -1$.

c Los voor $h(x) > 0$ eerst de gelijkheid $h(x) = 0$ op en gebruik de grafiek om de oplossing van de ongelijkheid af te lezen. De oplossing van de gelijkheid vond je bij opdracht b. Aflezen in de grafiek geeft de oplossing $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle \frac{1}{3}, \rightarrow \rangle$.

d Voor de snijpunten geldt $h(x) = a$. Oplossen geeft
$3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = a \rightarrow \frac{3x^2+2x-1}{x^2} = a \rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = ax^2 \rightarrow 3x^2 + 2x - 1 - ax^2 = 0 \rightarrow$
$(3-a)x^2 + 2x - 1 = 0$.

e Als $h(x) = a$ precies één snijpunt heeft dan heeft $(3-a)x^2 + 2x - 1 = 0$ precies één oplossing. Dat is het geval als $a = 3$, want dan wordt de vergelijking $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$.
Wanneer $a \neq 3$ dan krijg je de vergelijking $y = (3-a)x^2 + 2x - 1$. Dit is een tweedegraadsvergelijking en deze heeft precies één oplossing als de discriminant nul is, dus $D = B^2 - 4AC = 2^2 - 4\cdot(3-a)\cdot -1 = 4 + 12 - 4a = 16 - 4a = 0 \rightarrow a = 4$.
Dus één oplossing voor $a = 3$ en voor $a = 4$.

V-6a *l* heeft een verticale asymptoot als de noemer ${}^{2}\log x$ nul is. Dat is voor $x = 1$.
Voor zeer grote waarden van *x* gaat wordt de breuk ≈ 0, dus *l* heeft een horizontale asymptoot $y = 0$.

m heeft een verticale asymptoot als $1+{}^{2}\log x = 0 \rightarrow {}^{2}\log x = -1 \rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
Voor zeer grote waarden van x gaat wordt de breuk ≈ 0, dus m heeft een horizontale asymptoot $y = 0$.

b Naast de waarden bij opdracht a wordt het domein beperkt door $x > 0$ als domein van de standaardfunctie ${}^{2}\log x$. Het domein van l wordt daarmee $\langle 0, 1\rangle$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$ en het domein van m wordt daarmee $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ en $\langle \frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$.

c $\dfrac{2}{{}^{2}\log x} = \dfrac{3}{1+{}^{2}\log x} \rightarrow 2(1+{}^{2}\log x) = 3\,{}^{2}\log x \rightarrow 2 + 2\,{}^{2}\log x = 3\,{}^{2}\log x \rightarrow 2 = {}^{2}\log x \rightarrow x = 2^{2} = 4$

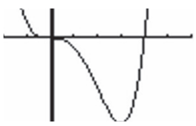
$l(4) = \dfrac{2}{{}^{2}\log 4} = \dfrac{2}{2} = 1$. De coördinaten van het snijpunt zijn (4, 1).

8.1 Productregel

bladzijde 218

1a $f(x) = x^{3}(2x-8) = 2x^{4} - 8x^{3}$
$f'(x) = 2 \cdot 4x^{3} - 8 \cdot 3x^{2} = 8x^{3} - 24x^{2}$

b



Plot
Invoer: Y1 = X^3(2X–8)
Venster: Xmin = –2 ; Xmax = 6
Ymin = –60; Ymax = 20

$f'(x) = 0 \rightarrow 8x^{3} - 24x^{2} = 8x^{2}(x-3) = 0 \rightarrow 8x^{2} = 0$ of $x - 3 = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = 3$
$f''(x) = 24x^{2} - 48x$.
Buigpunten zijn er voor $f''(x) = 0 \rightarrow 24x^{2} - 48x = 24x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = 2$
De grafiek van f daalt op $\langle \leftarrow, 3\rangle$ en stijgt op $\langle 3, \rightarrow\rangle$.

c Hij heeft de afgeleide van elke term berekend en met elkaar vermenigvuldigd.

d Als $f'(x) = 6x^{2}$ dan zou je de extreme waarde voor $x = 3$ niet vinden want deze f' is daarbij niet 0. Uit de grafiek blijkt dat er bij $x = 3$ wel een extreme waarde is, dus de functie voor f' klopt niet.

2a $(p+q)^{2} = (p+q)(p+q) = p(p+q) + q(p+q) = p \cdot p + p \cdot q + q \cdot p + q \cdot q = p^{2} + 2pq + q^{2}$

b Noem $f = u^{2}$ en $u = p$. Differentiëren van f volgens de kettingregel geeft $f' = 2u \cdot p' = 2pp'$.

c I: Met de kettingregel volgt:
$\left((p+q)^{2}\right)' = 2(p+q) \cdot (p+q)'$. Met de somregel voor afgeleiden volgt $2(p+q) \cdot (p'+q')$.
II: Schrijf je $(p+q)^{2}$ als $p^{2} + 2p \cdot q + q^{2}$ dan volgt uit opdracht b en de somregel
$\left((p+q)^{2}\right)' = \left(p^{2} + 2p \cdot q + q^{2}\right)' = (p^{2})' + (2p \cdot q)' + (q^{2})' = 2p \cdot p' + 2(p \cdot q)' + 2q \cdot q'$
De afgeleiden bij I en II zijn natuurlijk hetzelfde, dus kennelijk geldt:
$2(p+q) \cdot (p'+q') = 2p \cdot p' + 2(p \cdot q)' + 2q \cdot q'$.

d $2(p+q)\cdot(p'+q') = 2p\cdot p' + 2(p\cdot q)' + 2q\cdot q'$
$(p+q)\cdot(p'+q') = p\cdot p' + (p\cdot q)' + q\cdot q'$
$p\cdot p' + p\cdot q' + q\cdot p' + q\cdot q' = p\cdot p' + (p\cdot q)' + q\cdot q'$
$p\cdot q' + q\cdot p' = (p\cdot q)'$
ofwel $(p\cdot q)' = p'\cdot q + p\cdot q'$.

3a $f(x) = p(x)\cdot q(x) = x\cdot \sin x$
$f'(x) = p'(x)\cdot q(x) + p(x)q'(x) = 1\cdot \sin x + x\cdot \cos x = \sin x + x\cos x$
b $f(x) = p(x)\cdot q(x) = (x+1)\cdot(x+1)$
$f'(x) = p'(x)\cdot q(x) + p(x)q'(x) = 1\cdot(x+1) + (x+1)\cdot 1 = 2x+2 = 2(x+1)$
c $g = p\cdot q = x^2\cdot \cos x$
$g'(x) = p'\cdot q + p\cdot q' = 2x\cdot \cos x + x^2\cdot -\sin x = 2x\cos x - x^2\sin x$
d $h = p\cdot q = \sin t\cdot \cos t$
$h'(t) = p'\cdot q + p\cdot q' = \cos t\cdot \cos t + \sin t\cdot -\sin t = \cos^2 t - \sin^2 t$

bladzijde 219

4a Oppervlakte $A(t) =$
$l\times b = (-t^2+8t)\cdot(-2t^2+10t) = 2t^4 - 10t^3 - 16t^3 + 80t^2 = 2t^4 - 26t^3 + 80t^2 = 2t^2(t^2 - 13t + 40)$
$A(1) = 2\cdot(1-13+40) = 56$
$A(1,1) = 2,42\cdot 26,91 = 65,1222$
b De gemiddelde snelheid waarmee de oppervlakte toeneemt is
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(1,1)-A(1)}{1,1-1} = \frac{65,1222-56}{0,1} = 91,222$$
c De toename van de oppervlakte is de som van de oppervlakte van de rechter strook, de bovenste strook en het rechthoekje rechtsboven.
toename van de oppervlakte = $\Delta A =$
oppervlakte van de rechter strook = $\Delta l\times b$
+ oppervlakte van de bovenste strook = $l\times \Delta b$
+ oppervlakte van het rechthoekje rechtsboven = $\Delta l\times\Delta b$,
dus $\Delta A = \Delta l\times b + l\times\Delta b + \Delta l\times\Delta b$.
d $\Delta A = \Delta l\times b + l\times\Delta b + \Delta l\times\Delta b \rightarrow$
$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta l\times b + l\times\Delta b + \Delta l\times\Delta b}{\Delta t} = \frac{\Delta l\times b}{\Delta t} + \frac{l\times\Delta b}{\Delta t} + \frac{\Delta l\times\Delta b}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t}\times b + l\times\frac{\Delta b}{\Delta t} + \Delta t\times\frac{\Delta l\times\Delta b}{\Delta t\times\Delta t} =$$
$$\frac{\Delta l}{\Delta t}\times b + l\times\frac{\Delta b}{\Delta t} + \Delta t\times\frac{\Delta l}{\Delta t}\times\frac{\Delta b}{\Delta t}.$$

e Als Δt op tijdstip t naar 0 nadert, dan naderen $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta b}{\Delta t}$ naar de hellingen van de grafieken van l en b op tijdstip t. De hellingen zijn eindige waarden zodat het product
$\Delta t\times\frac{\Delta l\times\Delta b}{\Delta t\times\Delta t} = \Delta t\ \times$ helling van $l\ \times$ helling van b
naar $0\ \times$ helling van $l\ \times$ helling van $b = 0$ nadert als Δt naar 0 nadert.

f Als Δt op tijdstip t naar 0 nadert blijft van $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ volgens opdracht e de uitdrukking $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \times b + l \times \frac{\Delta b}{\Delta t}$ over.
Als Δt op tijdstip t naar 0 nadert kun je $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ en $\frac{\Delta b}{\Delta t}$ vervangen door de hellingen $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ en $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$ van de grafieken op tijdstip t en $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ door de helling $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ van de grafiek van $A(t)$.
Invullen in de vorm voor $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ geeft dus $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \times b + l \times \frac{\Delta b}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \times b + l \times \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$,
ofwel met de accent-notatie: $A' = l' \cdot b + l \cdot b'$ wat de productregel is voor de productfunctie $A = l \cdot b$.

5a $f(x) = p(x) \cdot q(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - 2}$

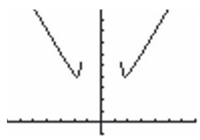
$p(x) = x \to p'(x) = 1$

$q(x) = \sqrt{x^2 - 2} = (x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{kettingregel}} q'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$

$f'(x) = p'q + pq' = 1 \cdot \sqrt{x^2 - 2} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} = \sqrt{x^2 - 2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$.

Vereenvoudigen levert

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2}\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 - 2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2}\right)^2}{\sqrt{x^2 - 2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2}}$$



Plot
Invoer: Y1 = 2(X²–1)/√(X²–2)
Venster: Xmin = –7 ; Xmax = 7
Ymin = –1; Ymax = 10

Gebruik voor het benaderen van de hellingsfunctie het differentieqoutiënt
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \approx \frac{f(x + 0{,}001) - f(x)}{0{,}001}$. Gebruik voor f op de rekenmachine
Y2 = X√(X²–2) maar zet het tekenen hiervan uit door
bij de TI: zet de cursor op de = na Y2 en druk Enter. De = is niet meer geselcteerd.
bij de Casio: selecteer de functie en druk op F1 (SEL). De = na Y2 is niet meer geselecteerd.
Laat de benadering tekenen door de functie Y3 = (Y2(X+0.001)– Y2(X))/0.001
Verwijs naar Y2 bij de TI via het menu onder de knop VARS en bij Casio onder de knop VARS de Y kiezen en dan 2 erachter zetten om Y2 te kiezen. Daarna de rest van de regel inclusief haakjes invoeren op de gebruikelijke manier.
De geplotte functie van f' en de benadering vallen samen; de controle klopt dus.

b $g(x) = p(x) \cdot q(x) = x^3 \cdot \sin(x^2 + x)$
$p(x) = x^3 \rightarrow p'(x) = 3x^2$
$q(x) = \sin(x^2 + x) \xrightarrow{\text{kettingregel}} q'(x) = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$
$g'(x) = p'q + pq' =$
$3x^2 \cdot \sin(x^2 + x) + x^3 \cdot \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1) = x^3(2x + 1)\cos(x^2 + x) + 3x^2 \sin(x^2 + x)$
De geplotte functie van g' en de benadering vallen samen.

c $A(t) = p(t) \cdot q(t) = 2t \cdot \cos(\sqrt{t})$
$p(t) = 2t \rightarrow p'(t) = 2$
$q(t) = \cos(\sqrt{t}) \xrightarrow{\text{kettingregel}} q'(t) = -\sin(\sqrt{t}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
$A'(t) = p'q + pq' = 2 \cdot \cos(\sqrt{t}) + 2t \cdot -\sin(\sqrt{t}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = 2\cos(\sqrt{t}) - \sqrt{t} \cdot \sin(\sqrt{t})$
De geplotte functie van A' en de benadering vallen samen.

6a Eerst haakjes wegwerken en dan differentiëren:
$f(x) = (x^2 + 3x + 2)^2 = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 2) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 9x^2 + 6x + 2x^2 + 6x + 4 =$
$x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$
$f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 26x + 12$
Met de kettingregel:
$f'(x) = 2(x^2 + 3x + 2) \cdot (2x + 3) = 2(2x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 9x + 4x + 6) = 2(2x^3 + 9x^2 + 13x + 6) =$
$4x^3 + 18x^2 + 26x + 12$
Met de productregel:
$f = p \cdot q = (x^2 + 3x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 2)$
$f' = p' \cdot q + p \cdot q' = (2x + 3) \cdot (x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 3x + 2) \cdot (2x + 3) = 2(2x + 3) \cdot (x^2 + 3x + 2) =$
$2(2x^3 + 6x^2 + 4x + 3x^2 + 9x + 6) = 2(2x^3 + 6x^2 + 4x + 3x^2 + 9x + 6) = 2(2x^3 + 9x^2 + 13x + 6) =$
$4x^3 + 18x^2 + 26x + 12$
De afgeleide is steeds hetzelfde.

b De kettingregel is eenvoudig en levert het snelste het antwoord. Het lastigst is de haakjes eerst uitwerken en dan differentiëren; je krijgt dan veel termen en je maakt meer kansen op fouten.

8.2 Quotiëntfuncties

bladzijde 220

7a De noemer mag niet 0 zijn, dus alle waarden voor x zijn toegestaan behalve 0 en –3.
Het domein is dus $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ en $\langle -3, 0 \rangle$ en $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

b $\dfrac{2x + 6}{x^2 + 3x} = \dfrac{2(x + 3)}{x(x + 3)} = \dfrac{2}{x}$

c Voor $x = -3$ geeft g de waarde $\dfrac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$, maar f bestaat niet want dan is de noemer 0.

d

x	$f(x)$	$g(x)$
–2,99	–0,668896...	–0,668896...
–2,9999	–0,666688...	–0,666688...
–3	kan niet	–0,666666...
–3,0001	–0,666644...	–0,666644...
–3,01	–0,664451...	–0,664451..

De grafieken van f en g zijn precies hetzelfde behalve voor $x = -3$ bestaat f niet. In de grafiek kun je dat niet zien.

8a $f(x)=\dfrac{1+\frac{2}{x}}{x-3}=\dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{x(x-3)}=\dfrac{x+2}{x(x-3)}$

Beide grafieken vallen samen.

b In f kan x geen 0 zijn anders wordt de noemer 0 in $\frac{2}{x}$. Ook kan x geen 3 zijn anders wordt noemer 0 in $x-3$. Het domein is dus $\langle\leftarrow,0\rangle$ en $\langle 0,3\rangle$ en $\langle 3,\rightarrow\rangle$.

9a $y=\dfrac{12}{6x-3}=\dfrac{3\cdot 4}{3(2x-1)}=\dfrac{4}{2x-1}$

De formule geldt niet als $2x-1=0\rightarrow x=\frac{1}{2}$.

b $y=\dfrac{6-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\dfrac{x\left(6-\frac{3}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{6x-3}{2x-1}=\dfrac{3(2x-1)}{2x-1}=3$

De formule geldt niet als $x=0$ vanwege $\frac{1}{x}$ en niet als $2-\frac{1}{x}=0\rightarrow x=\frac{1}{2}$.

c $y=\dfrac{x^2+5x}{5x}=\dfrac{x^2}{5x}+\dfrac{5x}{5x}=\frac{1}{5}x+1$

De formule geldt niet als $5x=0\rightarrow x=0$.

d $y=\dfrac{3}{x+\frac{3}{x}}=\dfrac{3x}{x\left(x+\frac{3}{x}\right)}=\dfrac{3x}{x^2+3}$

De formule geldt niet als $x=0$ vanwege $\frac{3}{x}$. Voor elke andere waarde is de noemer steeds positief.

bladzijde 221

10a $f(x)=\dfrac{2}{3x}+\dfrac{5}{2x^2}=\dfrac{2\cdot 2x}{3x\cdot 2x}+\dfrac{5\cdot 3}{3\cdot 2x^2}=\dfrac{4x}{6x^2}+\dfrac{15}{6x^2}=\dfrac{4x+15}{6x^2}$

b $f(x)=\dfrac{4x+15}{6x^2}=0\rightarrow 4x+15=0\rightarrow x=-\frac{15}{4}=-3\frac{3}{4}$

11a $f(x)=x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x^2-2}{x}$

Nulpunten: $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}=0\rightarrow x^2-2=0\rightarrow x=\sqrt{2}$ of $x=-\sqrt{2}$

Asymptoten: voor $x=0$ wordt de noemer van $\frac{2}{x}$ nul, dus $x=0$ is een verticale asymptoot.

b $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^3}=\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}=\dfrac{3x^2-5}{x^3}$

Nulpunten: $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x^3}=0\rightarrow 3x^2-5=0\rightarrow 3x^2=5\rightarrow x^2=\frac{5}{3}\rightarrow$

$x=\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 5}=\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{5}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{5}=\frac{1}{3}\sqrt{15}$ of $x=-\frac{1}{3}\sqrt{15}$

Asymptoten: voor $x=0$ wordt de noemer 0, dus $x=0$ is een verticale asymptoot.
Voor zeer grote waarden van x nadert $\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}$ naar 0, dus $y=0$ is een horizontale asymptoot.

c $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)}+\dfrac{3x}{x(x-1)}=\dfrac{2x-2+3x}{x(x-1)}=\dfrac{5x-2}{x(x-1)}$

Nulpunten: $f(x)=\dfrac{5x-2}{x(x-1)}=0\rightarrow 5x-2=0\rightarrow x=\frac{2}{5}$

Asymptoten: voor $x=0$ en $x=1$ wordt de noemer 0, dus $x=0$ en $x=1$ zijn verticale asymptoten. Voor zeer grote waarden van x nadert $\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}$ naar 0, dus $y=0$ is een horizontale asymptoot.

d $f(x)=\dfrac{x}{x-2\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{x(x+2)}{(x-2\frac{1}{2})(x+2)}+\dfrac{2(x-2\frac{1}{2})}{(x-2\frac{1}{2})(x+2)}=\dfrac{x(x+2)+2(x-2\frac{1}{2})}{(x-2\frac{1}{2})(x+2)}=$

$\dfrac{x^2+4x-5}{(x-2\frac{1}{2})(x+2)}=\dfrac{x^2+4x-5}{(x-2\frac{1}{2})(x+2)}=\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-2\frac{1}{2})(x+2)}$

Nulpunten: $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x-2\frac{1}{2})(x+2)}=0 \rightarrow (x-1)(x+5)=0 \rightarrow x=1$ of $x=-5$
Asymptoten: voor $x=2\frac{1}{2}$ en voor $x=-2$ wordt de noemer 0, dus $x=2\frac{1}{2}$ en $x=-2$ zijn verticale asymptoten. Voor zeer grote waarden van x nadert $\dfrac{x}{x-2\frac{1}{2}}$ naar 1 en $\dfrac{2}{x+2}$ naar 0 dus f naar 1 zodat $y=1$ een horizontale asymptoot is.

12a Alle waarden van x zijn mogelijk behalve als de noemer, $\cos^2 x=0$, ofwel bij $\cos x=0 \rightarrow$
$x=\frac{1}{2}\pi$ of $x=1\frac{1}{2}\pi$ of $x=2\frac{1}{2}\pi$ of ... of $x=-\frac{1}{2}\pi$ of $x=-1\frac{1}{2}\pi$ of $x=-2\frac{1}{2}\pi$ of ... ,
dus $x\neq\pm\frac{1}{2}\pi\cdot k$ met $k=$ oneven .
De verticale asymptoten hebben dus de vergelijkingen $x=\pm\frac{1}{2}\pi\cdot k$ met $k=$ oneven .

b $f(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=\dfrac{-(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$

Uit $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ volgt $1-\cos^2 x=\sin^2 x$. Invullen geeft

$f(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}=-\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2=-\tan^2 x$.

8.3 Asymptoten

bladzijde 222

13a De noemer van f en g mag niet 0 zijn, verder kunnen alle waarden voor x, dus het domein van f en g is $\langle\leftarrow,3\rangle$ en $\langle 3,\rightarrow\rangle$.
b De waarde waarbij de noemer 0 is geeft een verticale asymptoot, dus bij $x=3$.
c

x	$f(x)=\frac{2x-4}{x-3}$	$g(x)=\frac{2x^2-6x+2}{x-3}$
0	1,333333...	–0,666666...
100	2,020618...	200,0206...
200	2,010152...	400,0101...
300	2,006734...	600,0067...
400	2,005037...	800,0050...
500	2,004024...	1000,004...
1000	2,002006...	2000,002...
100000	2,000020...	200000,0...

De functie f nadert steeds meer de waarde 2 en g nadert steeds meer de waarde $2x$.

x	$f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$	$g(x)=\dfrac{2x^2-6x+2}{x-3}$
0	1,333333...	–0,666666...
–100	1,980582...	–200,0194...
–200	1,990147...	–400,0098...
–300	1,993399...	–600,0066...
–400	1,995037...	–800,0049...
–500	1,996023...	–1000,003...
–1000	1,998005...	–2000,001...
–100000	1,999980...	–200000,0...

De functie *f* nadert weer steeds meer de waarde 2 en *g* nadert weer steeds meer de waarde $2x$.

e $g(x)=\dfrac{2x^2-6x+2}{x-3}=\dfrac{2x(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2x(x-3)}{x-3}+\dfrac{2}{x-3}=2x+\dfrac{2}{x-3}$

Voor grote waarden van x gaat $\dfrac{2}{x-3}$ naar 0 en blijft $g(x)=2x$ over. De lijn $y=2x$ is dus een asymptoot van *g*.

f $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2x-6+2}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=2+\dfrac{2}{x-3}$

Voor grote waarden van x gaat $\dfrac{2}{x-3}$ naar 0 en blijft $f(x)=2$ over. De lijn $y=2$ is dus een asymptoot van *f*.

bladzijde 223

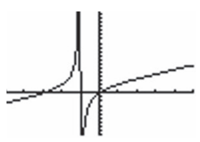
14a Het domein van *f* is $\langle\leftarrow,0\rangle$ en $\langle 0,\rightarrow\rangle$.

$f(x)=\dfrac{x^2+5}{x}=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{5}{x}=x+\dfrac{5}{x}$

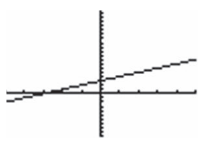
b De verticale asymptoot is $x=0$. De scheve asymptoot is $y=x$.

15a Voor f_a gelden alle waarden voor *x* behalve $x=a$. Het domein is dus $\langle\leftarrow,a\rangle$ en $\langle a,\rightarrow\rangle$.

b

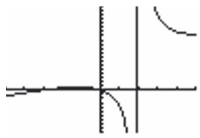


Plot voor a = –1
Invoer: Y1 = (X^2+3X)/(X–(–1))
Venster: Xmin = –5 ; Xmax = 5
Ymin = –10; Ymax = 20

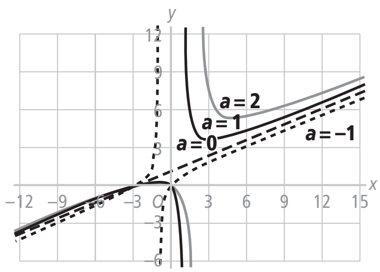


Plot voor a = 0
Invoer: Y1 = (X^2+3X)/(X–(0))
Venster: Xmin = –5 ; Xmax = 5
Ymin = –10; Ymax = 20

Plot voor a = 1
Invoer: Y1 = (X²+3X)/(X−(1))
Venster: Xmin = −5 ; Xmax = 5
Ymin = −10; Ymax = 20



Plot voor a = 2
Invoer: Y1 = (X²+3X)/(X−(2))
Venster: Xmin = −5 ; Xmax = 5
Ymin = −10; Ymax = 20



c $f_a(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-a}=\dfrac{x(x+3)}{x-a}$ .Voor $a=-3$ gaat f_a over in de functie
$f_{-3}(x)=\dfrac{x(x+3)}{x-(-3)}=\dfrac{x(x+3)}{x+3}=x$ wat een rechte lijn met vergelijking $y=x$ is.

d Om de asymptoot te vinden voor $x\to\infty$ en $x\to-\infty$ wordt de functie ontbonden in termen waarin geen x meer tegelijk in de teller en de noemer voorkomt. Bij deze ontbinding gebruik je een speciale techniek die twee keer wordt toegepast.
Schrijf x^2+3x als term waarin de factor $x-2$ voorkomt. Dat wordt $x(x-2)+2x+3x$. De term $+2x$ wordt toegevoegd als correctie om de term $-2x$ die ontstaat uit $x(x-2)=x^2-2x$ op te heffen. Daarmee wordt de functie
$$f_2(x)=\frac{x^2+3x}{x-2}=\frac{x(x-2)+2x+3x}{x-2}=\frac{x(x-2)+5x}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}+\frac{5x}{x-2}=x+\frac{5x}{x-2}$$
Schrijf nu $5x$ als term waarin de factor $x-2$ voorkomt. Dat wordt $5(x-2+2)$. De term $+2$ wordt toegevoegd als correctie om de term -2 die ontstaat op te heffen.
Daarmee wordt de functie
$$f_2(x)=x+\frac{5(x-2+2)}{x-2}=x+\frac{5(x-2)+10}{x-2}=x+\frac{5(x-2)}{x-2}+\frac{10}{x-2}=x+5+\frac{10}{x-2}\,.$$
Voor $x\to\infty$ en $x\to-\infty$ gaat $\dfrac{10}{x-2}$ naar 0 dus blijft de functie $f_2(x)=x+5$ over wat een rechte lijn is met vergelijking $y=x+5$.
De scheve asymptoot heeft dus als vergelijking $y=x+5$.

Opmerking: je mag deze functie dus niet vereenvoudigen tot bijvoorbeeld $\dfrac{x+3}{1-\dfrac{2}{x}}$, dan voor $x\to\infty$ stellen dat $\dfrac{2}{x}$ naar 0 gaat en je dus $x+3$ overhoudt! Ga na dat dit komt doordat in de teller nog steeds een uitdrukking met x voorkomt.

16a In de teller mag x niet 0 zijn vanwege $\frac{1}{x}$ en de noemer mag niet 0 zijn, dus

$x-\frac{1}{x}=0 \to x=\frac{1}{x} \to x^2=1 \to x=-1$ en $x=1$ voldoen niet.

Het domein wordt dus $\langle \leftarrow, -1\rangle$ en $\langle -1, 0\rangle$ en $\langle 0, 1\rangle$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$.

b $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}+1}{x-\frac{1}{x}}=\dfrac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{1+x}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$

c Bij $x=-1$ heeft de grafiek een perforatie want bij $f(x)=\frac{1}{x-1}$ is hier geen bijzondere waarde.

Bij $x=0$ heeft de grafiek een perforatie want bij $f(x)=\frac{1}{x-1}$ is hier geen bijzondere waarde.

Bij $x=1$ heeft de grafiek een verticale asymptoot want bij $f(x)=\frac{1}{x-1}$ is hier de noemer ook 0.

17a De noemer is 0 voor $2x-4=0$ of $3x+2=0 \to x=2$ of $x=-\frac{2}{3}$.

Het domein is $\langle \leftarrow, -\frac{2}{3}\rangle$ en $\langle -\frac{2}{3}, 2\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

b Als $x \downarrow 2$ dan nadert x de waarde 2 van de bovenkant, dus van grotere waarden dan $x=2$. De grafiek laat zien dat je de asymptoot dan van rechts nadert en dat f dan naar $+\infty$ gaat.

Als $x \uparrow 2$ dan nadert x de waarde 2 van de onderkant, dus van kleinere waarden dan $x=2$. De grafiek laat zien dat je de asymptoot dan van links nadert en dat f dan naar $-\infty$ gaat.

c De grafiek heeft twee verticale en een horizontale asymptoot. Wanneer x naar $+\infty$ of $-\infty$ gaat , gaat de breuk naar 0 en de functie dus naar 1. $y=1$ is dus horizontale asymptoot.

Bij $x=2$ en $x=-\frac{2}{3}$ heeft de grafiek verticale asymptoten omdat de noemer dan 0 is.

d f omwerken geeft

$$f(x)=1+\frac{2x+4}{(2x-4)(3x+2)}=1+\frac{2x+4}{6x^2+4x-12x-8}=1+\frac{2(x+2)}{2(3x^2-4x-4)}=$$

$1+\dfrac{x}{3x^2-4x-4}+\dfrac{2}{3x^2-4x-4}$. Deel in de middelste term de x weg uit de teller:

$1+\dfrac{x}{3x^2-4x-4}+\dfrac{2}{3x^2-4x-4}=1+\dfrac{1}{3x-4-\frac{4}{x}}+\dfrac{2}{3x^2-4x-4}$.

Voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$ gaan $\dfrac{1}{3x-4-\frac{4}{x}}$ en $\dfrac{2}{3x^2-4x-4}$ naar 0 zodat

$f(x \to \pm\infty)=1+0+0=1$ overblijft.

f heeft dus een horizontale asymptoot met vergelijking $y=1$.

8.4 Qoutiëntregel

bladzijde 224

18a $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1-2x}=(x^2+2)(1-2x)^{-1}$

Noem $f(x)=p(x)\cdot q(x)=(x^2+2)\cdot(1-2x)^{-1}$.

Dan $p(x)=x^2+2 \rightarrow p'(x)=2x$

en $q(x)=(1-2x)^{-1} \rightarrow q'(x)=-1\cdot(1-2x)^{-2}\cdot -2=\dfrac{2}{(1-2x)^2}$ volgens de kettingregel.

Volgens de productregel volgt voor de afgeleide van f

$f'(x)=p'\cdot q+p\cdot q'=2x\cdot(1-2x)^{-1}+(x^2+2)\cdot\dfrac{2}{(1-2x)^2}=\dfrac{2x}{1-2x}+\dfrac{2(x^2+2)}{(1-2x)^2}=$

$\dfrac{2x(1-2x)}{(1-2x)^2}+\dfrac{2(x^2+2)}{(1-2x)^2}=\dfrac{2x-4x^2+2x^2+4}{(1-2x)^2}=\dfrac{-2x^2+2x+4}{(1-2x)^2}=\dfrac{-2(x^2-x-2)}{(1-2x)^2}=\dfrac{-2(x+1)(x-2)}{(1-2x)^2}$

b Voor de toppen geldt $f'(x)=0$. Oplossen geeft

$\dfrac{-2(x+1)(x-2)}{(1-2x)^2}=0 \rightarrow -2(x+1)(x-2)=0 \rightarrow x=-1$ of $x=2$

$f(-1)=\dfrac{(-1)^2+2}{1-2\cdot(-1)}=\dfrac{3}{3}=1$ en $f(2)=\dfrac{2^2+2}{1-2\cdot 2}=\dfrac{6}{-3}=-2$

De coördinaten van de toppen zijn (–1, 1) en (2, –2).

19a $f=\dfrac{t}{n}=t\cdot n^{-1}$

Stel $f=p\cdot q$ met $p=t$ en $q=n^{-1}$ dan $p'=t'$ en volgens de kettingregel

$q'=-1\cdot n^{-2}\cdot n'=\dfrac{-n'}{n^2}$

$f=p\cdot q$ differentiëren volgens de productregel geeft

$f'=p'\cdot q+p\cdot q'=t'\cdot n^{-1}+t\cdot\dfrac{-n'}{n^2}=\dfrac{t'}{n}-\dfrac{t\cdot n'}{n^2}$

b $f'=\dfrac{t'}{n}-\dfrac{t\cdot n'}{n^2}=\dfrac{t'\cdot n}{n^2}-\dfrac{t\cdot n'}{n^2}=\dfrac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}$

20a $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ met $t(x)=x$ en $n(x)=x^2+1$ volgt $t'(x)=1$ en $n'(x)=2x$

Volgens de quotiëntregel is

$f'=\dfrac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Voor de toppen geldt

$f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \rightarrow 1-x^2=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=-1$ of $x=1$

$f(-1)=-\frac{1}{2}$ en $f(1)=\frac{1}{2}$

De coördinaten van de toppen zijn $(-1,-\frac{1}{2})$ en $(1,\frac{1}{2})$.

De noemer is nooit 0 dus er zijn geen verticale asymptoten. Horizontale of scheve asymptoten:

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$

Voor $x\rightarrow\pm\infty$ gaat $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$ naar 0, dus $y=0$ is een horizontale asymptoot.

b $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ met $t(x)=x^2-4$ en $n(x)=x^2-1$ volgt $t'(x)=2x$ en $n'(x)=2x$

Volgens de quotiëntregel is

$$f'=\frac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

Voor de toppen geldt

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{6x}{(x^2-1)^2}=0\rightarrow 6x=0\rightarrow x=0$$
$$f(0)=4$$

De coördinaten van de top zijn $(0,4)$.

De noemer is 0 voor $x=-1$ en $x=1$ dus daar zijn verticale asymptoten.

Horizontale of scheve asymptoten:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{4}{x^2-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x^2-1}$$

Voor $x\rightarrow\pm\infty$ gaat $\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$ naar 1 en $\dfrac{4}{x^2-1}$ naar 0,

dus $f(x\rightarrow\pm\infty)=\frac{1}{1}-0=1$ en $y=1$ is een horizontale asymptoot.

c $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ met $t(x)=\sqrt{x+1}$ en $n(x)=x$ volgt $t'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ en $n'(x)=1$

Volgens de quotiëntregel is

$$f'=\frac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot x-\sqrt{x+1}\cdot 1}{x^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot x}{x^2}-\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}=\frac{x}{2x^2\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}=$$
$$\frac{x}{2x^2\sqrt{x+1}}-\frac{2\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{2x^2\sqrt{x+1}}=\frac{x-2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}}=\frac{x-2x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}=-\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

Voor de toppen geldt

$$f'(x)=0\rightarrow-\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}=0\rightarrow x+2=0\rightarrow x=-2$$

$f(-2)=\dfrac{\sqrt{-2+1}}{-2}=\dfrac{\sqrt{-1}}{-2}$, kan niet, dus er zijn geen toppen.

Ga na dat het domein $[-1,0\rangle$ en $\langle 0,\rightarrow\rangle$ is, er is een verticale asymptoot $x=0$.

Horizontale of scheve asymptoten:

$$f(x)=\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}=\frac{x}{2x^2\sqrt{x+1}}+\frac{2}{2x^2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}+\frac{2}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

Voor $x\rightarrow\pm\infty$ gaan $\dfrac{1}{2x\sqrt{x+1}}$ en $\dfrac{2}{2x^2\sqrt{x+1}}$ naar 0,

dus $f(x\rightarrow+\infty)=0+0=0$ en $y=0$ is een horizontale asymptoot.

d $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ met $t(x)=x^2-3x+3$ en $n(x)=x-2$ volgt $t'(x)=2x-3$ en

$n'(x)=1$

Volgens de quotiëntregel is

$$f'=\frac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}=\frac{(2x-3)\cdot(x-2)-(x^2-3x+3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-3x+6-x^2+3x-3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=$$
$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

Voor de toppen geldt

$f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}=0 \rightarrow (x-1)(x-3)=0 \rightarrow x=1 \text{ of } x=3$

$f(1)=-1$ en $f(3)=3$

De coördinaten van de toppen zijn $(1,-1)$ en $(3,3)$.
De noemer is 0 voor $x=2$ dus daar is een verticale asymptoot.
Horizontale of scheve asymptoten:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}=\frac{x(x-2)-x+3}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}-\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x-2}=x-\frac{1}{1-\frac{2}{x}}+\frac{3}{x-2}$$

Voor $x \rightarrow \pm\infty$ gaat $\dfrac{1}{1-\frac{2}{x}}$ naar 1 en $\dfrac{3}{x-2}$ naar 0,

dus $f(x \rightarrow +\infty)=x-1+0=x-1$ en $y=x-1$ is een scheve asymptoot.

e $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ met $t(x)=x^3$ en $n(x)=x^2-1$ volgt $t'(x)=3x^2$ en $n'(x)=2x$

Volgens de quotiëntregel is

$$f'=\frac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Voor de toppen geldt

$f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0 \rightarrow x^2(x^2-3)=0 \rightarrow x^2=0 \text{ of } x^2=3 \rightarrow$

$x=0$ of $x=-\sqrt{3}$ of $x=\sqrt{3}$. Uit een plot zie je dat bij $x=0$ de grafiek alleen een buigpunt heeft en geen top.

$f(-\sqrt{3})=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}=-1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ en $f(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=1\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

De coördinaten van de toppen zijn $(-\sqrt{3},\ -1\tfrac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\sqrt{3},\ 1\tfrac{1}{2}\sqrt{3})$.
De noemer is 0 voor $x=-1$ en $x=1$ dus daar zijn verticale asymptoten.
Horizontale of scheve asymptoten:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$$

Voor $x \rightarrow \pm\infty$ gaat $\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ naar 0,

dus $f(x \rightarrow \pm\infty)=x+0=x$ en $y=x$ is een scheve asymptoot.

f $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+3}$ met $t(x)=x^2-3x$ en $n(x)=x+3$ volgt $t'(x)=2x-3$ en $n'(x)=1$

Volgens de quotiëntregel is

$$f'=\frac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}=\frac{(2x-3)\cdot(x+3)-(x^2-3x)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+6x-3x-9-x^2+3x}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x-9}{(x+3)^2}$$

Voor de toppen geldt

$f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{x^2+6x-9}{(x+3)^2}=0 \rightarrow x^2+6x-9=0 \rightarrow$

$$x=\frac{-6+\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot -9}}{2}=\frac{-6+\sqrt{2\cdot 36}}{2}=\frac{-6+6\sqrt{2}}{2}=-3+3\sqrt{2} \text{ of } x=\frac{-6-6\sqrt{2}}{2}=-3-3\sqrt{2}$$

$f(-3+3\sqrt{2}) = \dfrac{(-3+3\sqrt{2})^2 - 3(-3+3\sqrt{2})}{-3+3\sqrt{2}+3} = \dfrac{9-18\sqrt{2}+18+9-9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{12-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}} - 9 =$

$12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 9 = 6\sqrt{2} - 9$

$f(-3-3\sqrt{2}) = \dfrac{(-3-3\sqrt{2})^2 - 3(-3-3\sqrt{2})}{-3-3\sqrt{2}+3} = \dfrac{9+18\sqrt{2}+18+9+9\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = \dfrac{-12-9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\dfrac{12}{\sqrt{2}} - 9 =$

$-12 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - 9 = -6\sqrt{2} - 9$

De exacte coördinaten van de toppen zijn $(3\sqrt{2}-3,\ 6\sqrt{2}-9)$ en $(-3\sqrt{2}-3, -6\sqrt{2}-9)$.

De noemer is 0 voor $x = -3$ dus daar is een verticale asymptoot.

Horizontale of scheve asymptoten:

$f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+3} = \dfrac{x(x+3)-6x}{x+3} = \dfrac{x(x+3)}{x+3} - \dfrac{6x}{x+3} = x - \dfrac{6}{1+\frac{3}{x}}$

Voor $x \to \pm\infty$ gaat $\dfrac{6}{1+\frac{3}{x}}$ naar 6,

dus $f(x \to \pm\infty) = x - 6$ en $y = x - 6$ is een scheve asymptoot.

bladzijde 225

21a $C(t) = \dfrac{6t}{3t+2} = \dfrac{2}{1+\frac{2}{3t}} \quad (t \neq 0)$

Voor $t \to \infty$ gaat $\dfrac{2}{3t} \to 0$, dus $C(t \to \infty) = \dfrac{2}{1+0} = 2$.

Er ontstaat op den duur dus 2 mol eindproduct.

b De reactiesnelheid is $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = C'(t) = \dfrac{6 \cdot (3t+2) - 6t \cdot 3}{(3t+2)^2} = \dfrac{18t+12-18t}{(3t+2)^2} = \dfrac{12}{(3t+2)^2}$ mol/minuut.

c Voor $t \to \infty$ gaat $C'(t)$ naar 0. De reactiesnelheid wordt dus 0 mol/minuut; de reactie stopt.

22a Voor $f = 5$ wordt

$\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$

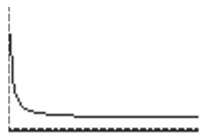
$\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{b}$

$\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{v}$.

$\dfrac{1}{b} = \dfrac{v}{5v} - \dfrac{5}{5v} = \dfrac{v-5}{5v}$

$b = \dfrac{5v}{v-5}$

b



Plot
Invoer: Y1 = 5X/(X−5)
Venster: Xmin = 5 ; Xmax = 75
Ymin = 0 ; Ymax = 50

Als $v \downarrow 5$ dan $b \to \infty$. De beeldafstand komt dus in het oneindige te liggen; de lichtstralen van snijden elkaar niet meer in het beeldpunt want ze lopen dan evenwijdig.

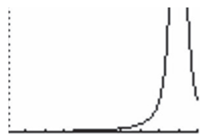
c De voorwerpsafstand v wordt gerekend vanaf de lens. Er wordt per seconde 5 cm van de beginafstand van 50 cm afgehaald zodat de formule $v = 50 - 5t$ wordt.

d $v(t) = 50 - 5t$ invullen in $b(v) = \dfrac{5v}{v-5}$ geeft $b(t) = \dfrac{5(50-5t)}{50-5t-5} = \dfrac{5(50-5t)}{5(9-t)} = \dfrac{50-5t}{9-t}$.

Met de quotiëntregel volgt

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = b'(t) = \frac{-5\cdot(9-t)-(50-5t)\cdot -1}{(9-t)^2} = \frac{-45+5t+50-5t}{(9-t)^2} = \frac{5}{(9-t)^2} = \frac{5}{(t-9)^2}$$

Het voorwerp legt de afstand tot de lens af in 10 seconden, dus $0 \le t \le 10$.
Een plot laat zien wat er met de beeldverplaatsing gebeurt:



Plot
Invoer: Y1 = 5/(X−9)^2
Venster: Xmin = 0 ; Xmax = 10
Ymin = 0 ; Ymax = 20

De beginsnelheid is $b'(0) = \frac{5}{81} \approx 0{,}062$ cm/sec.
Rond $t = 9$ is de beeldverplaatsing zeer groot om na 10 seconden met een eindsnelheid van 5 cm/sec te eindigen.
De snelheid is altijd positief dus het beeld verplaatst zich steeds naar rechts.
Als $t = 9$ lopen de lichtstralen evenwijdig en is er geen beeldpunt. Het voorwerp staat dan in het brandpunt. Na 9 seconden ontstaat een virtueel beeld links van de lens: de lichtstralen na de lens divergeren (waaieren uiteen) maar lijken uit een beeldpunt te komen dat links van de lens ligt. De beeldverplaatsting tussen 9 en 10 sec is de snelheid waarmee het virtuele beeld zich verplaatst.

8.5 Uiterste waarden berekenen

bladzijde 226

23a –

b Bij stilstaand water zou de snelheid van de zwemmer 1 m/s zijn ten opzichte van de wal. Bij stroomopwaarts zwemmen remt de stroming echter zijn snelheid met v zodat die $1-v$ wordt.
Bij stroomafwaarts zwemmen vergroot de stroming zijn snelheid met v zodat die $1+v$ wordt.
Uiteraard geldt de eis $v<1$ anders zou de zwemmer de eerste krib nooit bereiken maar eenvoudig weggespoeld worden door het water.
Voor 500 m tegen de stroom opzwemmen heeft hij $\frac{500}{1-v}$ seconden nodig.

Voor 500 m met de stroom meezwemmen heeft hij $\frac{500}{1+v}$ seconden nodig.

Voor 1 km voor de hele tocht heeft hij dus $\frac{500}{1-v}+\frac{500}{1+v}$ seconden nodig.

c $t(v)=\frac{500}{1-v}+\frac{500}{1+v}$ waaruit de afgeleide volgt $t'(v)=\frac{500}{(1-v)^2}-\frac{500}{(1+v)^2}$.

De kortste tijd is een minimum van $t(v)$, dus los op: $t'(v)=0$.

$t'(v)=\frac{500}{(1-v)^2}-\frac{500}{(1+v)^2}=0$

$\frac{1}{(1-v)^2}=\frac{1}{(1+v)^2}$

$(1-v)^2=(1+v)^2$

$1-2v+v^2=1+2v+v^2$

$4v=0$

$v=0$

Bij $v=0$ is de stroomsnelheid 0 dus is er stilstaand water.

24a $f(x)=p(x)\cdot q(x)=x\cdot\cos x$
$f'(x)=p'\cdot q+p\cdot q'=1\cdot\cos x+x\cdot-\sin x=\cos x-x\sin x$

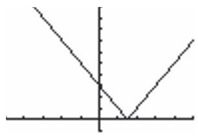
b $f(2\pi)=2\pi\cdot\cos 2\pi=2\pi\cdot 1=2\pi$, dus $(2\pi,2\pi)$ ligt op de grafiek van *f*.
$x=2\pi$ invullen in de vergelijking geeft $y=2\pi$, dus $(2\pi,2\pi)$ ligt op de grafiek van $y=x$.

c $f'(2\pi)=\cos 2\pi-2\pi\cdot\sin 2\pi=1-2\pi\cdot 0=1$

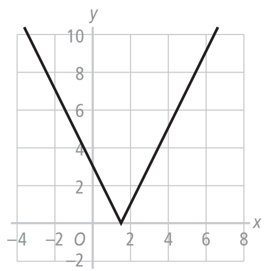
d Nee, bij een top loopt de raaklijn horizontaal dus had de helling 0 moeten zijn bij opdracht c.

e Los op: $f'(x)=0\rightarrow\cos x-x\sin x=0$. Gebruik de rekenmachine en zoek het nulpunt in de buurt van 2π dit geeft $x\approx 6{,}44$. $f(6{,}44)\approx 6{,}30$. Dus de top is $(6{,}44;\ 6{,}36)$.

25a Om de absolute waarde van $2x-3$ te plotten kies je op de TI en de Casio de Abs functie in het menu onder de Catalog-toets.



Plot
Invoer: Y1 = asb(2X–3)
Venster: Xmin = –5; Xmax = 5
Ymin = –1; Ymax = 10



b De absolute waarde van een getal is altijd positief.

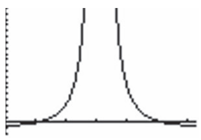
$$f(x)=|2x-3|=\begin{cases}2x-3 \text{ als } x>1\frac{1}{2}\\ -2x+3 \text{ als } x\le 1\frac{1}{2}\end{cases}$$

c Uit de plot lees je af dat de minimumwaarde 0 wordt bereikt voor $x=1\frac{1}{2}$.

d Nee, er geldt $f'(x)=2$ als $x\downarrow 1\frac{1}{2}$ en $f'(x)=-2$ als $x\uparrow 1\frac{1}{2}$, dus geldt niet dat $f'(x)=0$.

bladzijde 227

26a



Plot
Invoer: Y1 = (1–2cos(X))/(1+cos(X))
Venster: Xmin = 0 ; Xmax =
Ymin = –2 ; Ymax = 20

Nulpunten:

$$f(x)=\frac{1-2\cos x}{1+\cos x}=0\rightarrow 1-2\cos x=0\rightarrow \cos x=\tfrac{1}{2}\rightarrow x=\tfrac{1}{3}\pi\approx 1{,}05 \text{ of } x=1\tfrac{2}{3}\pi\approx 5{,}24$$

b De grafiek heeft een verticale asymptoot als de noemer 0 is:
$1+\cos x=0\rightarrow \cos x=-1\rightarrow x=\pi$.

c Met de quotiëntregel volgt

$$f'(x)=\frac{2\sin x\cdot(1+\cos x)-(1-2\cos)\cdot -\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{2\sin x+2\sin x\cos x+\sin x-2\cos x\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{3\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

Voor de mimima geldt $f'(x)=0$ en $f'(x)$ wisselt daar van negatief naar positief.

Oplossen geeft $f'(x)=\dfrac{3\sin x}{(1+\cos x)^2}=0\rightarrow 3\sin x=0\rightarrow \sin x=0\rightarrow x=0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ ...$

Op het gegeven domein zijn er alleen extreme waarden voor $x=0$ en $x=2\pi$.
Het teken van f' wisselt volgens $3\sin x$ bij de nulpunten want de noemer $(1+\cos x)^2$ is altijd $2^2=4$. Bij de nulpunten $x=0$ en $x=2\pi$ wisselt $\sin x$ van $-$ naar $+$ dus de extreme waarden zijn minima.

27a Splits de functie op in twee delen en onderzoek per deel de toppen.
Als x^2-9 positief is gebruik je x^2-9 voor $|x^2-9|$.
x^2-9 is positief als $x^2>9 \rightarrow x>3$ of $x<-3$.
Als x^2-9 negatief is gebruik je $-(x^2-9)$ voor $|x^2-9|$ om de waarde weer positief te maken.
x^2-9 is negatief als $x^2<9 \rightarrow -3<x<3$.

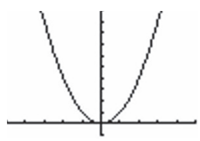
Dus: $f(x)=x\cdot|x^2-9|=\begin{cases} x\cdot(x^2-9)=x^3-9x \text{ als } x<-3 \text{ of } x>3 \\ x\cdot-(x^2-9)=-x^3+9x \text{ als } -3\le x\le 3 \end{cases}$

I) De toppen van de grafiek van f voor het domein $x>3$ en $x<-3$.
De functie op dit domein is $f(x)=x\cdot(x^2-9)$.
$f'(x)=1\cdot(x^2-9)+x\cdot 2x=3x^2-9$
Voor de toppen geldt $f'(x)=3x^2-9=0 \rightarrow x^2=3 \rightarrow x=-\sqrt{3}$ of $x=\sqrt{3}$.
Beide oplossingen liggen buiten het domein $x>3$ en $x<-3$, dus op dit domein zijn geen oplossingen.
De omkeerpunten door de absolute waarde geven toppen bij $x=-3$ en $x=3$.
II) De toppen van de grafiek van f voor het domein $-3<x<3$.
De functie op dit domein is $f(x)=-x\cdot(x^2-9)$.
$f'(x)=-1\cdot(x^2-9)+-x\cdot 2x=-x^2+9-2x^2=-3x^2+9$
Voor de toppen geldt $f'(x)=-3x^2+9=0 \rightarrow x^2=3 \rightarrow x=-\sqrt{3}$ of $x=\sqrt{3}$.
$f(-\sqrt{3})=\sqrt{3}\cdot(3-9)=-6\sqrt{3}$ en $f(\sqrt{3})=-\sqrt{3}\cdot(3-9)=6\sqrt{3}$.
De exacte coördinaten van de toppen zijn $(-\sqrt{3},-6\sqrt{3})$ en $(\sqrt{3},6\sqrt{3})$; de omkeerpunten geven de toppen $(-3,0)$ en $(3,0)$.

b $f(x)=x\cdot|x^2-9|=\begin{cases} x\cdot(x^2-9)=x^3-9x \text{ als } x<-3 \text{ of } x>3 \\ x\cdot-(x^2-9)=-x^3+9x \text{ als } -3\le x\le 3 \end{cases}$

c Voor het domein $x>3$ en $x<-3$ geldt $f''(x)=6x$.
Voor het buigpunt geldt $f''(x)=6x=0 \rightarrow x=0$.
De oplossing ligt buiten het domein $x>3$ en $x<-3$, dus op dit domein is geen buigpunt.
Voor het domein $-3<x<3$ geldt $f''(x)=-6x$.
Voor het buigpunt geldt $f''(x)=-6x=0 \rightarrow x=0$.
$f(0)=0$. De exacte coördinaten van het buigpunt zijn $(0,0)$.

28a



Plot
Invoer: Y1 = X^3/X
Venster: Xmin = –5 ; Xmax =5
Ymin = –1 ; Ymax = 10

Voor $x=0$ lijkt de grafiek een top te hebben maar vanwege de deling door 0 die dan optreedt is hier sprake van een perforatie en valt dit punt juist buiten het domein.

b $f_a(x) = \dfrac{x^3}{x+a}$. Uit de quotiëntregel volgt

$f_a'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x+a) - x^3 \cdot 1}{(x+a)^2} = \dfrac{x^2(2x+3a)}{(x+a)^2}$

Er is een minimum als $f_a'(x) = 0$ en $f_a'(x)$ van negatief naar positief verandert bij het nulpunt.

$f_a'(x) = \dfrac{x^2(2x+3a)}{(x+a)^2} = 0 \rightarrow x^2(2x+3a) = 0 \rightarrow x^2 = 0$ of $2x + 3a = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = -1\frac{1}{2}a$

Voor alle $a \neq 0$ is de raaklijn horizontaal bij deze x-waarden.
Uit een plot van $f_a'(x)$ voor verschillende waarden van $a \neq 0$ zie je dat $f_a'(x)$ steeds van $-$ naar $+$ wisselt rond het nulpunt bij $x = -1\frac{1}{2}a$. Er is daar dus sprake van een minimum.
Bij $x = 0$ treedt geen tekenwisseling op. De grafiek van *f* heeft daar voor alle $a \neq 0$ dus een buigpunt.

c $f_a(-1\frac{1}{2}a) = \dfrac{(-\frac{3}{2}a)^3}{-1\frac{1}{2}a + a} = \dfrac{-\frac{27}{8}a^3}{-\frac{1}{2}a} = \dfrac{27a^2}{4} = 6\frac{3}{4}a^2$

De top ligt op $(-1\frac{1}{2}a, 6\frac{3}{4}a^2)$.

d Voor elke top is $x = -1\frac{1}{2}a$ en $y = 6\frac{3}{4}a^2$. Invullen van $x = -1\frac{1}{2}a$ in $y = 3x^2$ geeft $y = 3 \cdot (-\frac{3}{2}a)^2 = 3 \cdot \frac{9}{4}a^2 = \frac{27}{4}a^2 = 6\frac{3}{4}a^2$ wat overeenkomt met de y-coördinaat.

29a De volgende auto die het meetpunt passeert heeft een afstand van $4 + r$ meter afgelegd. Bij een snelheid van v m/s is de benodigde tijd hiervoor

$T = \dfrac{4+r}{v} = \dfrac{4 + \frac{1}{8}v^2}{v} = \dfrac{32 + v^2}{8v}$.

b In T seconde passeert er 1 auto.

In 1 seconde passeert er $\dfrac{1}{T}$ auto.

Het aantal auto's A dat in 1 seconde het meetpunt passeert is dus $A = \dfrac{1}{T}$.

c $A(v) = \dfrac{1}{T} = \dfrac{8v}{32 + v^2}$

$A'(v) = \dfrac{8 \cdot (32 + v^2) - 8v \cdot 2v}{(32 + v^2)^2} = \dfrac{256 - 8v^2}{(32 + v^2)^2}$

Voor het maximum geldt

$A'(v) = \dfrac{256 - 8v^2}{(32 + v^2)^2} = 0 \rightarrow 256 - 8v^2 = 0 \rightarrow v^2 = 32 \rightarrow v = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$ m/s.

Dat is ongeveer 20,4 km/h.

8.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 228

30a y is het snijpunt van de lijn met de y-as. De lijn 'kantelt' om Q. Omdat RQ en PA evenwijdig zijn, zijn de hoeken $\angle RQB$ en $\angle PAQ$ gelijk. $\triangle PAQ$ en $\triangle RQB$ hebben beide een rechte hoek. De overgebleven hoek in beide driehoeken zijn dus ook gelijk aan elkaar, dus $\triangle PAQ$ en $\triangle RQB$ zijn gelijkvormig en er geldt $RB : RQ = PQ : PA$.

Met $RB = OB - OR = y - 2$, $PQ = 2, RQ = 1$ en $PA = OA - OP = x - 1$ wordt dit
$\frac{y-2}{1} = \frac{2}{x-1} \rightarrow y - 2 = \frac{2}{x-1} \rightarrow y = 2 + \frac{2}{x-1}$.

b Voor $x = 1$ wordt de noemer 0 dus de grafiek van *f* heeft daar een verticale asymptoot. Punt *A* is dan naar *P* verschoven en de lijn staat recht en loopt evenwijdig aan de *y*-as. Er is dan geen snijpunt meer met de *y*-as.

Voor $x \rightarrow \infty$ nadert $\frac{2}{x-1}$ naar 0, dus blijft $y = 2$ over. De grafiek van *f* heeft dus een horizontale asymptoot $y = 2$. Als *A* steeds meer naar rechts verschoven wordt nadert *B* steeds meer de hoogte van het kantelpunt *Q*.

c $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2 + \frac{2}{x-1}) = x + \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x(x-1)+x}{x-1} = \frac{x^2 - x + x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

d $S = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x(x-1)+x}{x-1} = x + \frac{x}{x-1} = x + \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

Voor $x \rightarrow \infty$ nadert $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ naar $\frac{1}{1-0} = 1$, dus *S* nadert naar $x + 1$.

De scheve asymptoot heeft dus vergelijking $y = x + 1$.

De verticale asymptoot bij $x = 1$ voor de oppervlakte *S* ontstaat doordat de *y*-waarde naar ∞ gaat voor $x \downarrow 1$. De oppervlakte van $\triangle OAB$ nadert naar $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \infty = \infty$.
De scheve asymptoot ontstaat doordat de oppervlakte van $\triangle RQB$ naar 0 nadert voor $x \rightarrow \infty$.
De oppervlakte van $\triangle OAB$ nadert dan naar de oppervlakte van $\triangle PAQ$ + oppervlakte van *OPQR*. Dat is $\frac{1}{2} \cdot PA \cdot PQ + OP \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = x - 1 + 2 = x + 1$.

e Voor $x \downarrow 1$ gaat de oppervlake *S* naar ∞ en voor $x \rightarrow \infty$ eveneens. Voor een eindige *x*-waarde hiertussen is de oppervlakte kleiner. Er moet dus een minimale waarde zijn tussen de twee oneindige waarden zijn.
In de figuur zie je dat de $\triangle PAQ$ kleiner wordt als *x* naar links gaat en dat dat $\triangle RQB$ groter wordt.
De oppervlakte is waarschijnlijk minimaal als de oppervlakten van de driehoeken even groot zijn.

f Uit de quotiëntregel volgt $\frac{dS}{dx} = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Voor het minimum geldt $\frac{dS}{dx} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = 2$.

Alleen $x = 2$ voldoet. Bij $x = 2$ hoort $y = 2 + \frac{2}{2-1} = 2 + 2 = 4$.

De punten zijn dus $A(2, 0)$ en $B(0, 4)$.
Ga na dat hiervoor de oppervlakten van $\triangle PAQ$ en $\triangle RQB$ inderdaad aan elkaar gelijk zijn.

31a De cosinus kan maximaal 1 worden en minimaal –1.
Als $a < -1$ kan de maximale waarde van de cosinus de noemer net geen 0 maken.
Als $a > 1$ kan de minimale waarde van de cosinus de noemer net geen 0 maken.
Omdat de noemer geen 0 kan worden zijn er geen verticale asymptoten.

b $f_a(x)=\dfrac{1-2\cos x}{a+\cos x}=\dfrac{-2(a+\cos x)+2a+1}{a+\cos x}$

Voor $a=-\frac{1}{2}$ gaat dit over in

$f_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{-2(-\frac{1}{2}+\cos x)-1+1}{-\frac{1}{2}+\cos x}=\dfrac{-2(-\frac{1}{2}+\cos x)}{-\frac{1}{2}+\cos x}=-2$ met $-\frac{1}{2}+\cos x\neq 0 \rightarrow \cos x\neq\frac{1}{2}$
$\cos x=\frac{1}{2}$ voor $x=\frac{1}{3}\pi$ of $x=1\frac{2}{3}\pi$.

Voor $a=-\frac{1}{2}$ is de grafiek van f dus een horizontale lijn $y=-2$ met perforaties voor $x=\frac{1}{3}\pi$ en $x=1\frac{2}{3}\pi$.

c Uit de quotiëntregel volgt

$f_a'(x)=\dfrac{2\sin x\cdot(a+\cos x)-(1-2\cos x)\cdot -\sin x}{(a+\cos x)^2}=\dfrac{2a\sin x+2\sin x\cos x+\sin x-2\sin x\cos x}{(a+\cos x)^2}=\dfrac{(2a+1)\sin x}{(a+\cos x)^2}$

Voor $x=0$:

$f_a'(0)=\dfrac{(2a+1)\cdot\sin 0}{(a+\cos 0)^2}=\dfrac{(2a+1)\cdot 0}{(a+1)^2}=\dfrac{0}{(a+1)^2}=0$, dus de raaklijn is horizontaal.

$f_a(0)=\dfrac{1-2\cdot\cos 0}{a+\cos 0}=\dfrac{1-2\cdot 1}{a+1}=\dfrac{-1}{a+1}$, dus het punt $(0,\dfrac{-1}{a+1})$ klopt.

Voor $x=\pi$:

$f_a'(\pi)=\dfrac{(2a+1)\cdot\sin\pi}{(a+\cos\pi)^2}=\dfrac{(2a+1)\cdot 0}{(a+-1)^2}=\dfrac{0}{(a-1)^2}=0$, dus de raaklijn is horizontaal.

$f_a(\pi)=\dfrac{1-2\cdot\cos\pi}{a+\cos\pi}=\dfrac{1-2\cdot -1}{a+-1}=\dfrac{3}{a-1}$, dus het punt $(\pi,\dfrac{3}{a-1})$ klopt.

Voor $x=2\pi$:

$f_a'(2\pi)=\dfrac{(2a+1)\cdot\sin 2\pi}{(a+\cos 2\pi)^2}=\dfrac{(2a+1)\cdot 0}{(a+1)^2}=\dfrac{0}{(a+1)^2}=0$, dus de raaklijn is horizontaal.

$f_a(2\pi)=\dfrac{1-2\cdot\cos 2\pi}{a+\cos 2\pi}=\dfrac{1-2\cdot 1}{a+1}=\dfrac{-1}{a+1}$, dus het punt $(2\pi,\dfrac{-1}{a+1})$ klopt.

d In het rijtje voor uiterste waarden $(0,\dfrac{-1}{a+1})$, $(\pi,\dfrac{3}{a-1})$ en $(2\pi,\dfrac{-1}{a+1})$ moet de y-waarde 1 worden.

Voor $(0,\dfrac{-1}{a+1})$ geeft dat $\dfrac{-1}{a+1}=1\rightarrow a+1=\dfrac{-1}{1}=-1\rightarrow a=-1-1=-2$.

Voor $(\pi,\dfrac{3}{a-1})$ geeft dat $\dfrac{3}{a-1}=1\rightarrow a-1=\dfrac{3}{1}=3\rightarrow a=3+1=4$.

Voor $(2\pi,\dfrac{-1}{a+1})$ geeft dat weer $a=-2$.

Voor $a=-2$ en $a=4$ heeft f_a dus een uiterste waarde 1.

bladzijde 229

32a Een horizontale asymptoot is een horizontale lijn. De helling van een horizontale lijn is 0 dus de helling van een horizontale asymptoot is 0. Voor $x \to \infty$ gaat *f* steeds meer naar de asymptoot dus naar de horizontale lijn dus naar een lijn met helling 0. De helling $f'(x)$ moet dus naar 0 gaan voor $x \to \infty$.

b Een scheve asymptoot is een scheve lijn. De helling van een scheve lijn is *a* dus de helling van een scheve asymptoot is *a*. Voor $x \to \infty$ gaat *f* steeds meer naar de asymptoot dus naar de scheve lijn dus naar een lijn met helling *a*. De helling $f'(x)$ moet dus naar *a* gaan voor $x \to \infty$.

c $f(x) = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$. Voor $x \to \infty$ gaat $\frac{2}{x-1}$ naar 0 dus blijft over $f(x) = 2$.

Er is een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 2$.

$g(x) = \frac{x^2-3x}{x-1} = \frac{x(x-1)-2x}{x-1} = x - \frac{2x}{x-1} = x - \frac{2(x-1)+2}{x-1} = x - 2 + \frac{2}{x-1}$

Voor $x \to \infty$ gaat $\frac{2}{x-1}$ naar 0 dus blijft over $g(x) = x - 2$.

Er is een scheve asymptoot met vergelijking $y = x - 2$.

d $h(x) = 3 + \sqrt{x}$

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Voor $x \to \infty$ gaat $h'(x) \to 0$.

Als er een horizontale asymptoot is moet $h(x)$ naar een constante waarde voor $x \to \infty$ gaan, maar dat is duidelijk niet het geval.

Als er een scheve asymptoot $y = ax + b$ is moet het verschil $h(x) - (ax+b)$ naar 0 gaan.

$h(x) - (ax+b) = 3 + \sqrt{x} - ax - b = \sqrt{x}(1 - a\sqrt{x}) + (3 - b)$

Voor $x \to \infty$ gaat $\sqrt{x} \to \infty$ en $(1 - a\sqrt{x}) \to \pm\infty$ als $a \neq 0$ en naar 1 als $a = 0$. Het product $\sqrt{x} \cdot (1 - a\sqrt{x})$ gaat dus altijd naar $\pm\infty$ en niet naar 0, dus er is ook geen scheve asymptoot.

$k(x) = 2x + 1 - 3\sqrt{x}$

$k'(x) = 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$. Voor $x \to \infty$ gaat $k'(x) \to 2$.

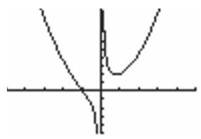
Als er een horizontale asymptoot is moet $k(x)$ naar een constante waarde voor $x \to \infty$ gaan, maar de functie blijft toenemen met toenemende *x*.

Als er een scheve asymptoot $y = ax + b$ is moet het verschil $k(x) - (ax+b)$ naar 0 gaan.

$k(x) - (ax+b) = 2x + 1 - 3\sqrt{x} - ax - b = -3\sqrt{x} + 2x - ax + 1 - b = -3\sqrt{x} + (2-a)x + (1-b) =$
$\sqrt{x}(-3 + (2-a)\sqrt{x}) + (1-b)$

Voor $x \to \infty$ gaat $\sqrt{x} \to \propto$ en $-3 + (2-a)\sqrt{x} \to \pm\infty$. Het product $\sqrt{x} \cdot (-3 + (2-a)\sqrt{x})$ gaat dus altijd naar $\pm\infty$ en niet naar 0, dus er is ook geen scheve asymptoot.

33a



Plot
Invoer: Y1 = (X^3 + 1)/X
Venster: Xmin = –5; Xmax = 5
Ymin = –5; Ymax = 10

$f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}=x^2+\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$

$f''(x)=2+\dfrac{2}{x^3}$

Bij de buigpunten geldt $f''(x)=0\to 2+\dfrac{2}{x^3}=0\to x^3=\dfrac{2}{-2}=-1\to x=(-1)^{\frac{1}{3}}=-1$.

$f(-1)=\dfrac{(-1)^3+1}{-1}=0$. De exacte coördinaten van het buigpunt zijn (–1, 0).

b $g(x)=|f(x)|$
Voor $x<-1$ en $x>0$ geldt $g(x)=f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$.

Voor $-1<x<0$ geldt $g(x)=-f(x)=-\dfrac{x^3+1}{x}$.

De toppen voor $x<-1$ en $x>0$ volgen uit
$g'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}=0\to 2x=\dfrac{1}{x^2}\to 2x^3=1\to x^3=\frac{1}{2}\to x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\approx 0{,}79$

$g(\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}})=\dfrac{(\sqrt[3]{\frac{1}{2}})^3+1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}=1\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\approx 1{,}89$.

De exacte coördinaten van de top zijn ($\sqrt[3]{0{,}5}$; $1{,}5\sqrt[3]{2}$) en de raaklijn is

horizontaal, de lijn $y=1{,}5\sqrt[3]{2}$.
De toppen voor $-1<x<0$ volgen uit
$g'(x)=-\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)=0\to 2x=\dfrac{1}{x^2}\to 2x^3=1\to x^3=\frac{1}{2}\to x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\approx 0{,}79$.
De oplossing ligt buiten het domein dus er zijn geen toppen.
De splitsing voor de absolute waarde geeft een top voor $x=-1$ met coördinaten (–1, 0). De raaklijn bestaat hier niet.

34a

Plot
Invoer: Y1 = 1/X*sin(2πX)
Venster: Xmin = 0 ; Xmax = 10
Ymin = –3 ; Ymax = 7

Er is sprake van een horizontale asymptoot. Voor $t \to \infty$ nadert de functie steeds meer de x-as.

b Voor $t \downarrow 0$ gaat $\frac{1}{t}$ naar ∞ maar $\sin 2\pi t$ naar 0. Wat exact uit het product komt in dit geval kun je nog niet berekenen. De grafiek geeft aan dat er een eindige waarde is en geen verticale asymptoot.

c Voor kleine waarden van t geldt $\sin t \approx t$ want de raaklijn aan $\sin t$ voor $t = 0$ is $y = t$.

Er geldt dus $\sin 2\pi t \approx 2\pi t$ zodat $U = \frac{1}{t} \cdot \sin 2\pi t \approx \frac{1}{t} \cdot 2\pi t = 2\pi$ voor $t \approx 0$.

d Een plot laat zien dat in het eerste geval een gedempte trilling ontstaat die begint in $(0, 0)$. De trilling dempt wel minder sterk want $\sqrt{t}$ neemt minder snel toe dan t. Hier heeft hij dus gelijk.
In het tweede geval begint de trilling wel in $(0, 0)$ maar is niet meer gedempt want de factor gaat hier naar 1 als $t \to \infty$. De trilling begint bovendien met een opslingering. Hij heeft hier dus niet gelijk.

ICT-Asymptoten

bladzijde 230

I-1a Het domein van f is $\mathbb{R}$ met $x \neq 3$. De verticale asymptoot is $x = 3$

b Je vindt $a = 2$.

c Nee, de lijn kan ver buiten het beeld de grafiek misschien snijden en geen asymptoot blijken te zijn. De lijn op het oog instellen op het scherm geeft wel een vermoeden maar geen zekerheid.

d Bij een startwaarde en stapgrootte van 100 is $y = 2$ voor alle tabelwaarden van x. Het antwoord bij b klopt nog steeds.

e Bij een startwaarde en stapgrootte van –100 verandert er niets aan de uitkomst vergeleken met opdracht d.

I-2a Voor $a = 2$ lijkt de lijn op een asymptoot. Lijn m is dus $y = 2x$.
Naast de grafiek van de functie f uit opdracht I-1 zie je ook de grafiek van de functie g met hetzelfde domein en dezelfde verticale asymptoot.

b Klik op de formule van g om de functie te selecteren. Bij een startwaarde en stapgrootte van 100 verdubbelen de x-waarden tot de y-waarden. Naarmate x toeneemt wordt dat steeds beter. Het antwoord bij a lijkt te kloppen.

c De grafieken van A en B vallen over elkaar heen en over de grafiek van g. De functies zijn aan elkaar gelijk.

d Als x heel groot positief of heel groot negatief wordt (dus heel klein wordt) dan gaat in formule B de term $\frac{2}{x-3}$ naar 0 en blijft $y=2x$ over. Maar als je x zo laat veranderen dan vind je eventuele horizontale asymptoten. De waarde $2x$ wijst er dus op dat de asymptoot hier niet horizontaal is maar een lijn met vergelijking $y=2x$.

e $f(x)=\frac{2x-4}{x-3}=\frac{2(x-3)+2}{x-3}=\frac{2(x-3)}{x-3}+\frac{2}{x-3}=2+\frac{2}{x-3}$. Als x heel groot positief of heel klein wordt dan gaat de term $\frac{2}{x-3}$ naar 0 en blijft $f(x)=2$ over, dus de grafiek van f heeft de lijn $y=2$ als asymptoot.

bladzijde 231

I-3a Voor $x=2$ en $x=-\frac{2}{3}$ wordt de noemer 0 dus deze waarden zijn niet toegestaan. Alle andere
x-waarden wel, dus het domein is $\mathbb{R}$ met $x \neq 2$ en $x \neq -\frac{2}{3}$.

b Voor $x \uparrow 2$ gaat f naar $-\infty$.
Voor $x \downarrow 2$ gaat f naar ∞.

c f heeft een verticale asymptoot voor $x=2$ en $x=-\frac{2}{3}$.

$$f(x)=1+\frac{2x+4}{(2x-4)(3x+2)}=1+\frac{2x+4}{6x^2+4x-12x-8}=1+\frac{2x}{6x^2-8x-8}+\frac{4}{6x^2-8x-8}=$$

$$1+\frac{1}{3x-4-\frac{4}{x}}+\frac{4}{6x^2-8x-8}$$

Als $x \to -\infty$ of $x \to +\infty$ dan gaat de term $\frac{1}{3x-4-\frac{4}{x}}$ en $\frac{4}{6x^2-8x-8}$ naar 0 en blijft $f(x)=1$ over, dus de lijn $y=1$ is een horizontale asymptoot.

I-4a Voor $x=a$ wordt de noemer 0 dus deze waarde is niet toegestaan. Alle andere x-waarden wel, dus het domein is $\langle\leftarrow, a\rangle$ en $\langle a, \rightarrow\rangle$.

b Je ziet verticale asymptoten voor $x=-1$, 1 en 2.

c Trace-knop en ga naar het snijpunt met de y-as. Op het snijpunt valt de functie weg dus daar bestaat f niet. Op die plek van f is niet alleen de noemer 0 maar ook de teller, er is daar een perforatie.

d Voor $a=-3$.

e De punten $A(-3,0)$ en $B(0,0)$ moeten nulpunten zijn van f want $y=0$. Oplossen geeft $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-a}=\frac{x(x+3)}{x-a}=0 \rightarrow x(x+3)=0 \rightarrow x=0$ of $x=-3$.
De oplossing $x=-3$ geldt voor alle waarden $a=-1$, 0, 1 en 2 dus al deze vier grafieken gaan door A.
De oplossing $x=0$ geldt voor $a=-1$, 1 en 2 maar niet voor $a=0$ want dan zijn de noemer en teller 0 en heb je het geval bij opdracht c.

I-5a Voor $x=0$ en $x=-4$ wordt de noemer 0 dus deze waarden zijn niet toegestaan. Alle andere
x-waarden wel, dus het domein is $\mathbb{R}$ met $x \neq 0$ en $x \neq -4$.

b Er is alleen een verticale asymptoot voor $x = 0$.
Voor $x = -4$ zijn de teller en noemer van *f* beide 0 en heeft de grafiek een perforatie (maak weer gebruik van de trace-knop).

c Uit $f(x) = \dfrac{x^2+7x+12}{x(x+4)} = \dfrac{(x+3)(x+4)}{x(x+4)} = \dfrac{x+3}{x}$ met $(x \neq -4) = \dfrac{x}{x} + \dfrac{3}{x} = 1 + \dfrac{3}{x}$ volgt een functie waarvan de grafiek samenvalt met die van *f* zonder perforatie bij $x = -4$. De y-waarde die bij de perforatie hoort is $1 + \dfrac{3}{-4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

I-6a Voor $x = 0$ bestaat de term $\dfrac{1}{x}$ niet.

b Bij $x = 0$ loopt de grafiek gewoon door op het scherm maar met de trace-knop merk je weer dat er een perforatie is.

c Bij $x = -1$, 0 en 1 geeft de tabel geen waarde weer en deze x-waarden behoren niet tot het domein.

d Alle vier grafieken vallen samen.

Voor grafiek B: uit A volgt $y = \dfrac{\frac{1}{x}+1}{x-\frac{1}{x}} = \dfrac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1+x}{x^2-1}$ waarbij $x = 0$ wel is toegestaan, dus de perforatie van A voor $x = 0$ is bij B opgeheven.

Voor grafiek C: uit B volgt $y = \dfrac{1+x}{x^2-1} = \dfrac{1+x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$ dit is exact dezelfde functie als B en er zijn geen verschillen in de grafieken.

Voor grafiek D: uit C volgt $y = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$ waarbij $x = -1$ wel is toegestaan, dus de perforaties van A voor $x = 1$ en $x = -1$ zijn bij D opgeheven.

e Voor $x = 0$, $x = -1$ en $x = 1$ wordt de noemer 0 dus deze waarden zijn niet toegestaan. Alle andere x-waarden wel, dus het domein is $\mathbb{R}$ met $x \neq 0$, $x \neq -1$ en $x \neq 1$. Bij $x = 0$ en $x = -1$ vertoont de grafiek een perforatie en bij $x = 1$ vertoont de grafiek een verticale asymptoot.

Test jezelf

bladzijde 234

T-1a $O = l \cdot b$

$\dfrac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t} = O' = l' \cdot b + l \cdot b'$

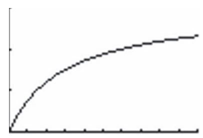
Met $l' = 5 \cdot 2t + 0 = 10t$ en $b' = -2t + 0 = -2t$ volgt

$\dfrac{\mathrm{d}O}{\mathrm{d}t} = O'(t) = l' \cdot b + l \cdot b' = 10t \cdot (-t^2+20) + (5t^2+20) \cdot -2t = -10t^3 + 200t - 10t^3 - 40t =$
$-20t^3 + 160t$

b $O = l \cdot b = (5t^2+20)(-t^2+20) = -5t^4 + 100t^2 - 20t^2 + 400 = -5t^4 + 80t^2 + 400$
$O'(t) = -5 \cdot 4t^3 + 80 \cdot 2t + 0 = -20t^3 + 160t$

T-2a $\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{x} = \frac{x}{3x} + \frac{3}{3x} = \frac{x+3}{3x} \rightarrow R_S = \frac{3x}{x+3}$

b



Plot
Invoer: Y1 = 3X/(X+3)
Venster: Xmin = 0 ; Xmax = 10
Ymin = 0 ; Ymax = 3

$R_S = \frac{3x}{x+3} = \frac{3(x+3)-9}{x+3} = 3 - \frac{9}{x+3}$. Weerstand x is altijd positief en $\frac{9}{x+3}$ dus ook.
Dat betekent dat er van 3 altijd iets afgaat dus R_S is altijd kleiner dan 3 ohm.

c $R_S = 1{,}5 \rightarrow \frac{3x}{x+3} = 1{,}5 \rightarrow 3x = 1{,}5(x+3) \rightarrow 3x = 1{,}5x + 4{,}5 \rightarrow 1{,}5x = 4{,}5 \rightarrow x = 3$

De oplossing voor de ongelijkheid lees je verder uit de grafiek af: $x \geq 3$.
Merk op dat je ook op grond van symmetrie tot deze uitkomst kunt komen omdat 1,5 ohm de helft is van 3 ohm moet de andere weerstand ook 3 ohm zijn. Hoe groter de ene parallelgeschakelde weerstand is des te kleiner is zijn invloed op de vervangweerstand, dus moet x groter zijn dan 3 ohm.

T-3a $f_3(x) = \frac{x^4-16}{x^2-3} = 0 \rightarrow x^4 - 16 = 0 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x = 16^{\frac{1}{4}} = 2$ of $x = -16^{\frac{1}{4}} = -2$

b $f_3(x) = \frac{x^4-16}{x^2-3}$ heeft verticale asymptoten als de noemer 0 is, dus als

$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = -\sqrt{3} \approx -1{,}732$ of $x = \sqrt{3} \approx 1{,}732$

c $f_p(x) = \frac{x^4-16}{x^2-p} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-p}$

Voor $p = 4$ gaat de functie over in $f_4(x) = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4} = x^2 + 4$ welke geen asymptoten heeft.
Voor $p = -4$ gaat de functie over in $f_{-4}(x) = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2+4} = x^2 - 4$ welke geen asymptoten heeft.

d $f_p(x) = \frac{x^4-16}{x^2-p}$. Met de quotiëntregel volgt

$$f_p'(x) = \frac{4x^3 \cdot (x^2-p) - (x^4-16) \cdot 2x}{(x^2-p)^2} = \frac{4x^5 - 4px^3 - 2x^5 + 32x}{(x^2-p)^2} = \frac{2x(x^4 - 2px^2 + 16)}{(x^2-p)^2}$$

Op een top geldt

$$f_p'(x) = \frac{2x(x^4-2px^2+16)}{(x^2-p)^2} = 0 \rightarrow 2x(x^4 - 2px^2 + 16) = 0 \rightarrow 2x = 0 \text{ of } (x^4 - 2px^2 + 16) = 0.$$

Voor $2x = 0$ is $x = 0$ dus ligt een top op de y-as als $p \neq 0$.

Als $p=0$ wordt de functie $f_0(x)=\frac{x^4-16}{x^2}=x^2-\frac{16}{x^2}$ en bestaat niet voor $x=0$ want dan is de noemer 0. In dit geval is de y-as weer een verticale asymptoot.

bladzijde 235

T-4a $f_a(x)=\frac{2x^2+2x+a}{-x+1}=\frac{-2x(-x+1)+2x+2x+a}{-x+1}=\frac{-2x(-x+1)}{-x+1}+\frac{4x+a}{-x+1}=$

$-2x+\frac{-4(-x+1)+4+a}{-x+1}=-2x-4+\frac{a+4}{-x+1}$

b Voor $x=1$ wordt de noemer 0 dus deze waarde is niet toegestaan. Alle andere x-waarden wel, dus het domein is $\mathbb{R}$ met $x\neq 1$.

c In de vereenvoudigde uitdrukking $f_a(x)=-2x-4+\frac{a+4}{-x+1}$ zie al de vergelijking van de rechte lijn $y=-2x+4$ zitten. De term $\frac{a+4}{-x+1}$ moet dan 0 gemaakt worden om alleen deze vergelijking over te houden. Dat lukt voor $a=-4$. Voor $x=1$ bestaat f_a nog steeds niet want in de originele, niet vereenvoudigde, functie wordt de noemer nog steeds 0. De functie gaat voor $a=-4$ dus over in de rechte lijn $y=-2x+4$ met een perforatie voor $x=1$.

d $f_a(x)=\frac{2x^2+2x+a}{-x+1}$

$f_a'(x)=\frac{(4x+2)\cdot(-x+1)-(2x^2+2x+a)\cdot -1}{(-x+1)^2}=\frac{-4x^2+4x-2x+2+2x^2+2x+a}{(-x+1)^2}=\frac{-2x^2+4x+2+a}{(-x+1)^2}$

Voor de toppen geldt $f_a'(x)=\frac{-2x^2+4x+2+a}{(-x+1)^2}=0\rightarrow -2x^2+4x+2+a=0$

De discriminant van $-2x^2+4x+2+a$ is
$B^2-4AC=4^2-4\cdot -2\cdot(2+a)=16+16+8a=32+8a$.
$f_a'(x)=0$ heeft geen oplossingen, dus f_a heeft geen toppen, als de discriminant negatief is. Dat is voor $32+8a\leq 0\rightarrow 8a\leq -32\rightarrow a\leq -4$.
$f_a'(x)=0$ heeft twee oplossingen, dus f_a heeft twee toppen, als de discriminant positief is. Dat is voor $32+8a>0\rightarrow 8a>-32\rightarrow a>-4$.

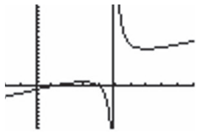
T-5a $f(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{x-5}=\frac{x^2-5x+4}{x-5}$

$f'(x)=\frac{(2x-5)\cdot(x-5)-(x^2-5x+4)\cdot 1}{(x-5)^2}=\frac{2x^2-15x+25-x^2+5x-4}{(x-5)^2}=\frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}=$

$\frac{(x-3)(x-7)}{(x-5)^2}$

b Los op: $f'(x)=0 \rightarrow \dfrac{(x-3)(x-7)}{(x-5)^2}=0 \rightarrow x=3$ of $x=7$.

Dit ingevuld geeft maximum 1 voor $x=3$ en minimum 9 voor $x=7$



Plot
Invoer: Y1 = (X–1)(X–4)/(X–5)
Venster: Xmin = –2 ; Xmax = 10
Ymin = –10; Ymax = 20

De grafiek laat de toppen zien.

c $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-5}=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}=\dfrac{x(x-5)+4}{x-5}=x+\dfrac{4}{x-5}$

Voor $x=5$ is de noemer 0, dus daar heeft de grafiek een verticale asymptoot.

Voor $x \rightarrow \pm\infty$ gaat de term $\dfrac{4}{x-5}$ naar 0 en blijft $f(x)=x$ over.

De lijn met vergelijking $y=x$ is dus een scheve asymptoot.

d $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-5}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{x-5}{x^2-5x+4}$

$$g'(x)=\frac{1\cdot(x^2-5x+4)-(x-5)\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{x^2-5x+4-(2x^2-15x+25)}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{-x^2+10x-21}{(x^2-5x+4)^2}=$$

$$\frac{-(x^2-10x+21)}{(x-1)^2(x-4)^2}=-\frac{(x-3)(x-7)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

$g'(x)=-\dfrac{(x-3)(x-7)}{(x-1)^2(x-4)^2}=0 \rightarrow (x-3)(x-7)=0 \rightarrow x=3$ of $x=7$

De uiterste waarde bij $x=3$ is $g(3)=\dfrac{3-5}{(3-1)(3-4)}=\dfrac{-2}{2\cdot -1}=1$

De uiterste waarde bij $x=7$ is $g(7)=\dfrac{7-5}{(7-1)(7-4)}=\dfrac{2}{6\cdot 3}=\frac{1}{9}$

T-6a $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^2+1}$. Met de quotiëntregel volgt

$$f'(x)=\frac{3\cdot(x^2+1)-(3x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3\cdot(x^2+1)-(3x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^2+3-6x^2-8x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$$

b $g(x)=(x^2-2x)\cdot\sqrt{x}=p\cdot q$. Met $p'(x)=2x-2$ en $q'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ volgt volgens de productregel

$$g'(x)=(2x-2)\cdot\sqrt{x}+(x^2-2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{(2x-2)\cdot\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2-2x}{2\sqrt{x}}=\frac{2x(2x-2)}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2-2x}{2\sqrt{x}}=$$

$$\frac{4x^2-4x+x^2-2x}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-6x}{2\sqrt{x}}=\frac{x(5x-6)}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}(5x-6)}{2\sqrt{x}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{x}(5x-6)$$

c $h(x)=\dfrac{\sqrt{3x-5}}{3x-5}=\dfrac{\sqrt{3x-5}}{\sqrt{3x-5}\sqrt{3x-5}}=\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}}=\dfrac{1}{(3x-5)^{\frac{1}{2}}}=(3x-5)^{-\frac{1}{2}}$.

Met de kettingregel volgt

$$h'(x)=-\tfrac{1}{2}(3x-5)^{-1\frac{1}{2}}\cdot 3=-\tfrac{1}{2}(3x-5)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3=-\frac{3}{2\sqrt{(3x-5)^3}}$$

d $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Met de quotiëntregel volgt

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

T-7a Uit $V=I\times(R_{inwendig}+R_{uitwendig})$ volgt $I=\dfrac{V}{R_{inwendig}+R_{uitwendig}}=\dfrac{12}{5+x}=\dfrac{12}{x+5}$.

b $P=I^2\times R_{uitwendig}=\left(\dfrac{12}{x+5}\right)^2\cdot x=\dfrac{12^2\cdot x}{(x+5)^2}=\dfrac{144x}{(x+5)^2}$

c $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\dfrac{144(x+5)^2-144x\cdot 2(x+5)}{(x+5)^4}=\dfrac{144(x+5)-144x\cdot 2}{(x+5)^3}=\dfrac{144x+720-288x}{(x+5)^3}=\dfrac{-144x+720}{(x+5)^3}$

Het maximale vermogen ligt op een top, dus los op

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{-144x+720}{(x+5)^3}=0\rightarrow -144x+720=0\rightarrow x=\frac{720}{144}=5$$

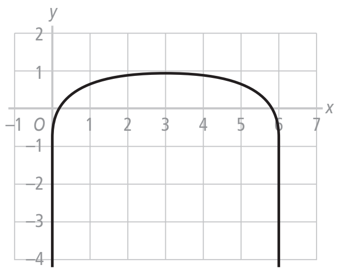
Het maximale vermogen is $P(5)=\dfrac{144\cdot 5}{(5+5)^2}=7{,}2$ watt en wordt geleverd bij een uitwendige weerstand van 5 ohm.

Blok 4 - Vaardigheden

bladzijde 238

1a $\log(6-x)+\log x = 0 \Rightarrow \log(6-x)x = 0 \Rightarrow (6-x)x = 1 \Rightarrow 6x - x^2 = 1 \Rightarrow$
$x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow$
$x = \dfrac{6-\sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ of $x = \dfrac{6+\sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

b



De symmetrie-as is $x = 3$.

c $f(3-p) = \log(6-(3-p)) + \log(3-p) = \log(3+p) + \log(3-p)$

$\log(3+p)(3-p) = \log(9-p^2)$

$f(3+p) = \log(6-(3+p)) + \log(3+p) = \log(3-p) + \log(3+p)$

$\log(3-p)(3+p) = \log(9-p^2)$

d Het maximum is $f(3) = \log 3 + \log 3 = \log 9$

2a $f(-2-p) = (-2-p) - 1 + \dfrac{1}{2(-2-p)+4} = -3 - p + \dfrac{1}{-2p} = -3 - p - \dfrac{1}{2p}$

b $f(-2+p) = (-2+p) - 1 + \dfrac{1}{2(-2+p)+4} = -3 + p + \dfrac{1}{2p}$

c $\dfrac{f(-2-p)+f(-2+p)}{2} = \dfrac{\left(-3-p-\dfrac{1}{2p}\right)+\left(-3+p+\dfrac{1}{2p}\right)}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

3a $\dfrac{f(0-p)+f(0+p)}{2} = \dfrac{\left(2(-p)^3 - \dfrac{4}{(-p)} + 2p^3 - \dfrac{4}{p}\right)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$ dus puntsymmetrisch in $(0,0)$

b $f(0-p) = 2(-p)^4 - 3(-p)^2 + 1 = 2p^4 - 3p^2 + 1 = f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x = 0$

c $f(0-p) = 2^{-p} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-p} = \left(2^{-1}\right)^{p} + \left(2^{-1}\right)^{-p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p} + 2^{p} = f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x = 0$

d $f(0-p) = {}^2\log\left((-p)^2+1\right) = {}^2\log\left(p^2+1\right) = f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x = 0$

Denk eraan dat je de functie op de grafische rekenmachine in moet voeren als $y = \log(x^2+1) : \log 2$.

bladzijde 239

4a $f_6(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
$f_6'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0$
$x^2 + 4x + 3 = 0$
$(x+1)(x+3) = 0$
$x = -1$ of $x = 3$
$A(-1,-2)$ en $B(-3,2)$

b $\dfrac{f(-2-p)+f(-2+p)}{2}=$

$\dfrac{\left((-2-p)^3+6(-2-p)+9(-2-p)+2\right)+\left((-2+p)^2+6(-2+p)^2+9(-2+p)+2\right)}{2}=0$

dus puntsymmetrisch in $M(-2,0)$

c $f_a'(x)=3x^2+2ax+9$

$f_a''(x)=6x+2a=0$ als $x=-\frac{1}{3}a$

$f(-\frac{1}{3}a)=(-\frac{1}{3}a)^3+a(-\frac{1}{3}a)^2+9(-\frac{1}{3}a)+2=\frac{2}{27}a^3-3a+2$ dus $C(-\frac{1}{3}a,\ \frac{2}{27}a^3-3a+2)$

d $\dfrac{f(-\frac{1}{3}a-p)+f(-\frac{1}{3}a+p)}{2}=\frac{2}{27}a^3-3a+2$

5a $f(0-p)=\sqrt{18-2(-p)^2}=\sqrt{18-2p^2}=f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x=0$

b $\dfrac{f(-3-p)+f(-3+p)}{2}=\dfrac{\dfrac{8-2(-3-p)}{3+(-3-p)}+\dfrac{8-2(-3+p)}{3+(-3+p)}}{2}=\dfrac{\dfrac{14+2p}{-p}+\dfrac{14-2p}{p}}{2}=$

$\dfrac{\dfrac{-14-2p+14-2p}{p}}{2}=\dfrac{\dfrac{-4p}{p}}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$ dus puntsymmetrisch in $(-3,-2)$

c $f(0-p)=(-p)^4-4(-p)^2+2=p^4-4p^2+2=f(0+p)$ dus lijnsymmetrisch in $x=0$

d $f(2-p)={}^3\log\left((2-p)^2-4(2-p)+7\right)={}^3\log(p^2+3)$ en

$f(2+p)={}^3\log\left((2+p)^2-4(2+p)+7\right)={}^3\log(p^2+3)$ dus lijnsymmetrisch in $x=2$

e $f(-1-p)=2^{(-1-p)^2+2(-1-p)}=2^{p^2-1}$ en $f(-1+p)=2^{(-1+p)^2+2(-1+p)}=2^{p^2-1}$

dus lijnsymmetrisch in $x=-1$

f $f(-2-p)=\sqrt{(-2-p)^2+4(-2-p)}=\sqrt{p^2-4}$ en

$f(-2+p)=\sqrt{(-2+p)^2+4(-2+p)}=\sqrt{p^2-4}$ dus lijnsymmetrisch in $x=-2$

6a Met de grafische rekenmachine is eenvoudig te berekenen dat de andere top $(-2,-6)$ is.

b De grafiek is puntsymmetrisch in punt $(-1,-4)$.

c $\dfrac{g(-1-p)+g(-1+p)}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{(-1-p)^2-2(-1-p)-2}{-1-p+1}\right)+\left(\dfrac{(-1+p)^2-2(-1+p)-2}{-1+p+1}\right)}{2}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{p^2+4p+1}{-p}\right)+\left(\dfrac{p^2-4p+1}{p}\right)}{2}=\dfrac{-p-4-\dfrac{1}{p}+p-4+\dfrac{1}{p}}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$

d Punt $(-\frac{1}{2},-1\frac{1}{2})$ spiegelen in $(-1,-4)$ geeft punt $(-1\frac{1}{2},-6\frac{1}{2})$.

7a $h(0-p)=\dfrac{4\cdot 3^{-p}}{1+9^{-p}}\cdot\dfrac{3^{2p}}{3^{2p}}=\dfrac{4\cdot 3^{p}}{3^{2p}+3^{0}}=\dfrac{4\cdot 3^{p}}{3^{2p}+1}=\dfrac{4\cdot 3^{p}}{9^{p}+1}=h(0+p)$

b $y=0$ is de horizontale asymptoot

c $\dfrac{4\cdot 3^{x}}{1+9^{x}}=3^{-x}\Rightarrow\dfrac{4\cdot 3^{x}}{1+9^{x}}=\dfrac{1}{3^{x}}\Rightarrow 4\cdot 3^{x}\cdot 3^{x}=1+9^{x}\Rightarrow 4\cdot 3^{2x}=1+3^{2x}\Rightarrow$

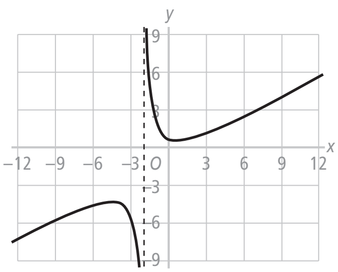
$3\cdot 3^{2x}=1\Rightarrow 3^{1+2x}=3^{0}\Rightarrow 1+2x=0\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$y=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow S\left(-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$

d $k(x)<h(x)$ op interval $\left\langle -\frac{1}{2},\rightarrow\right\rangle$

bladzijde 240

8a



De asymptoten zijn $y=\frac{1}{2}x-1$ en $x=-2$.

b $\frac{1}{2}x-1+\dfrac{3}{x+2}=0\Rightarrow\dfrac{3}{x+2}=1-\frac{1}{2}x\Rightarrow\left(1-\frac{1}{2}x\right)(x+2)=3\Rightarrow-\frac{1}{2}x^{2}+2=3\Rightarrow$

$-\frac{1}{2}x^{2}=1\Rightarrow$

$x^{2}=-2$ dus geen oplossingen.

c $g(x)=\frac{1}{2}(x-2)-1+\frac{3}{(x-2)+2}+2=\frac{1}{2}x-1-1+\frac{3}{x}+2=\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}$

d $\dfrac{g(-p)+g(p)}{2}=\dfrac{-\frac{1}{2}p-\dfrac{3}{p}+\frac{1}{2}p+\dfrac{3}{p}}{2}=0$ dus puntsymmetrisch in $(0,0)$.

e Door punt $(0,0)$ twee naar links en twee naar beneden te schuiven krijg je het punt $(-2,-2)$.

9a $y=0$ en $y=6$ zijn de horizontale asymptoten.

b $\dfrac{f(-p)+f(p)}{2}=\dfrac{\dfrac{6}{1+0{,}5^{-p}}+\dfrac{6}{1+0{,}5^{p}}}{2}=\dfrac{\dfrac{6\cdot 0{,}5^{p}}{\left(1+0{,}5^{-p}\right)0{,}5^{p}}+\dfrac{6}{1+0{,}5^{p}}}{2}=\dfrac{\dfrac{6\left(1+0{,}5^{p}\right)}{\left(1+0{,}5^{p}\right)}}{2}=\frac{6}{2}=3$

c De gemiddelde hoogte op interval $[-a,a]$ is 3 dus de oppervlakte is $3\times 2a=6a$.

10a De grafiek van $g(x)=\sin x$ is lijnsymmetrisch in $x=\frac{1}{2}\pi$.

b De grafiek van $h(x)=\cos x$ is puntsymmetrisch in $\left(\frac{1}{2}\pi,0\right)$.

11a $g(-p)=\dfrac{2\cos(-p)}{3+2\cos(-p)}=\dfrac{2\cos p}{3+2\cos p}=g(p)$

b $x=\pi$ en $x=2\pi$

c $g(x)=0$ als $\cos x=0$ dus $x=\frac{1}{2}\pi$ en $x=1\frac{1}{2}\pi$.
$g(x)<0$ op $\langle \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\rangle$

d $g'(x)=\dfrac{-2\sin x(3+2\cos x)-(-2\sin x)\cdot 2\cos x}{(3+2\cos x)^2}=\dfrac{-6\sin x}{(3+2\cos x)^2}=0$ als $\sin x=0$ dus
$x=0$ of $x=\pi$ of $x=2\pi$
Maximum $g(0)=g(2\pi)=\frac{2}{5}$
Minimum $g(\pi)=-2$

bladzijde 241

12a $h(\frac{1}{2}\pi-p)=\cos 2(\frac{1}{2}\pi-p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi-p)+1=\cos(\pi-2p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1$
$=-\cos(-2p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1=-\cos 2p-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1$
$h(\frac{1}{2}\pi+p)=\cos 2(\frac{1}{2}\pi+p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1=\cos(\pi+2p)-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1=$
$-\cos 2p-2\sin(\frac{1}{2}\pi+p)+1$

b $x=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing dus $x=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi$ is de andere oplossing

c $x=-\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{6}\pi$ is een oplossing dus $x=-\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3}\pi=-1\frac{1}{6}\pi$ is de andere oplossing

13a De grafiek van f is puntsymmetrisch in
$(-\pi, 3), (-\frac{3}{4}\pi, 3), (-\frac{1}{2}\pi, 3), (-\frac{1}{4}\pi, 3), (0, 3), (\frac{1}{4}\pi, 3), (\frac{1}{2}\pi, 3), (\frac{3}{4}\pi, 3)$ en $(\pi, 3)$.

b De symmetrieassen zijn $x=-\frac{7}{8}\pi$, $x=-\frac{5}{8}\pi$, $x=\frac{-3}{8}\pi$, $x=-\frac{1}{8}\pi$, $x=\frac{1}{8}\pi$, $x=\frac{3}{8}\pi$, $x=\frac{5}{8}\pi$ en $x=\frac{7}{8}\pi$.

c $\int_{-\pi}^{\pi}(3+2\sin 4t)\,dt=\left[3t-\frac{1}{2}\cos 4t\right]_{-\pi}^{\pi}=(3\pi-\frac{1}{2}\cos 4\pi)-(-3\pi-\frac{1}{2}\cos -4\pi)=$
$(3\pi-\frac{1}{2})-(-3\pi-\frac{1}{2})=6\pi$

d De gemiddelde hoogte op $[-\pi, \pi]$ is exact 3 dus de oppervlakte is $2\pi\times 3=6\pi$.

e Het bereik van g is $[-1, 3]$.

f $g(x)=1-2\sin 4t$

14a Domein $=\langle\leftarrow, -1\rangle\cup\langle -1, 1\rangle\cup\langle 1, \rightarrow\rangle$.

b $$\frac{f(-p)+f(p)}{2}=\frac{\frac{(-p)^3}{1-(-p)^2}+\frac{p^3}{1-p^2}}{2}=\frac{\frac{-p^3}{1-p^2}+\frac{p^3}{1-p^2}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

c De verticale asymptoten zijn $x=1$ en $x=-1$.

d $$-x+\frac{x}{1-x^2}=\frac{-x(1-x^2)}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}=\frac{-x+x^3+x}{1-x^2}=\frac{x^3}{1-x^2}$$

e Voor grote waarden van x nadert $\dfrac{x}{1-x^2}$ naar nul dus nadert $f(x)$ naar $-x$.

Blok 4 ICT - Konijnen en spreadssheets

bladzijde 242

1a

tijdstip	0	1	2	3	4
aantal paren konijnen	1	1	2	3	5

b

tijdstip	0	1	2	3	4	5
aantal paren konijnen	4	4	8	12	20	32

c Het aantal konijnen op tijdstip t is de som van de aantallen op tijdstip $t-1$ en $t-2$.
(dus de som van de twee voorgaande is de volgende)

2a 5
b $\boxed{\text{=C4+1}}$
c Dit is de som van C1, C2, C3, C4 en C5 die wordt berekend met $\boxed{\text{=SOM(C1:C5)}}$
d In B2 staat de som van een rij en in C6 de som van een kolom.
e Zet in H1 de formule $\boxed{\text{=SOM(A1:G1)}}$
Cel G1 is leeg en wordt niet meegeteld.

3a C1 = A1 + B1 = 1 + 1 = 2
b In F1 ontstaat de formule $\boxed{\text{=D1+E1}}$ en geeft 8.
c Ook nu krijg je weer de som van de twee voorafgaande waarden.
d Kies A1 = 4 en B1 = 4.
e Sleep de inhoud van cel F1 naar Y1 om de waarde op $t = 24$ te vinden. Je vindt 75025 konijnenparen.

bladzijde 243

4a Zet in cel C3 de formule $\boxed{\text{=C2/B2}}$ en sleep deze naar W3. Je ziet de waarde naderen naar 1,618. De groei is dus uiteindelijk exponentieel.
b De verhouding gaat steeds naar 1,618. De groei is uiteindelijk altijd exponentieel.
c Nee, want de verhouding gaat steeds naar 1,618.

5 Het model gaat er onder andere ook vanuit dat er geen sterfte is, dat er altijd voldoende voedsel is en dat er geen ruimtegebrek ontstaat.

6a In 1999 zijn er geen nuljarige konijnen dus hebben de 20 nuljarige konijnen uit 1998 geen nakomelingen gekregen.
b S_0 is de overlevingskans van een nuljarig konijn hier dus $\frac{10}{20} = 0,5$.
c Rij 2: Een eenjarig, tweejarig of driejarig konijn kan één jaar later niet eenjarig zijn.
Rij 3: Een nuljarig, tweejarig of driejarig konijn kan één jaar later niet tweejarig zijn.
Rij 4: Een nuljarig, eenjarig of driejarig konijn kan één jaar later niet driejarig zijn.
d Dit is volgens een matrixvermenigvuldiging het product van rij twee van de Lesliematrix met de eerste kolom die hoort bij 1998.
Zo moet je in H3 het product nemen van rij drie van de Lesliematrix met de tweede kolom die hoort bij 1999.
e $v_1 = \frac{24}{10} = 2,4$
$v_2 = \frac{9}{6} = 1,5$
$v_3 = 0$
$S_1 = \frac{6}{10} = 0,6$
$S_2 = \frac{3}{6} = 0,5$

f Selecteer de aantallen van 2003 en sleep ze naar rechts totdat je in 2010 bent. Het aantal konijnen in 2010 is achtereenvolgens 131, 51, 25 en 10.

bladzijde 244

7a Sleep de aantallen van 2010 verder naar 2020. Je krijgt 1196, 479, 230 en 92.

b De grootte van de populatie kun je laten berekenen via $\boxed{\text{=SOM(G2:G5)}}$ in cel G6 en sleep vervolgens naar 2020.
De groeifactor kun je vinden door in H7 $\boxed{\text{=H7/G7}}$ te zetten en ook naar 2020 te slepen.
De groeifactor nadert naar 1,25.

c Door gebrek aan voedsel en ruimte kan de populatie niet onbeperkt groeien.

8a In 2016 zijn er 820 en in 2017 zijn er 1024 konijnen. In 2016 wordt aantal dus bereikt.

b Je groeifactor was 1,25 dus om de populatiegrootte constant te houden moet er 20% afgeschoten worden aangezien $1{,}25 \times (1 - 0{,}2) = 1$.

c Je ziet dat er van de 613 nuljarigen er 307 in leven blijven. Daarvan worden er 258 afgeschoten en blijven er dus 49 over. De nieuwe overlevingsfactor S_0 wordt dus $\frac{49}{613} \approx 0{,}08$. Door in cel B3 0,5 te veranderen in 0,08 zie je dat de populatie uitsterft.

bladzijde 245

9a Een vos eet per jaar $0{,}75 \times 0{,}5 \times 365 \approx 137$ kg konijn. Dit zijn dus inderdaad ongeveer $\frac{137}{2{,}5} \approx 55$ konijnen per jaar.

b $\frac{258}{55} \approx 4{,}7$ dus zijn er 5 vossen nodig.

10a Het aantal konijnen wordt vermenigvuldigd met 1,25 en er worden 55 konijnen per vos opgegeten.

b De extra toename per 1000 konijnen is $0{,}001 \cdot k_t$ en het aantal vossen dat overleeft is $0{,}9 \cdot v_t$.

c Model 2 is realistischer omdat met gehele waarden wordt gerekend.

d In beide modellen neemt het aantal konijnen steeds verder af zelfs tot negatieve waarden. De populatie is dan al lang uitgestorven.
In de natuur zal de overlevingsfactor van de vos kleiner worden als er minder konijnen zijn en het aantal van 55 konijnen per vos zal dan ook veranderen.

e Verander elke keer als het aantal konijnen onder 1028 komt het aantal vossen in 4.
Je ziet dan een soort cyclische verandering ontstaan.

Blok 4 Verdieping - Goniometrische formules

bladzijde 248

1a Wanneer $a = -1$ krijg je $f_{-1}(x) = -\cos^2 x - \sin^2 x = -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1$ en dit is een constante functie en dus niet periodiek.

b Je kunt de toppen van de grafieken vinden door $f_a''(x) = 0$ op te lossen, dus
$f_a'(x) = a \cdot 2\cos x \cdot -\sin x - 2\sin x \cdot \cos x = -2a\sin x\cos x - 2\sin x\cos x = (-2a-2)\sin x\cos x$
Dit wordt 0 als a = –1, maar dat is uitgezonderd, of als $\sin x = 0$ of $\cos x = 0$ en deze laatste zijn onafhankelijk van de waarde van *a*.

c Wanneer je de grafiek van $f_2(x)$ plot, zie je dat de grafiek evenwichtsstand $y = 1$ heeft, periode π en amplitude 2. Dat geeft $f_3(x) = 2\cos 2x + 1$. Dus $a = 2, b = 2$ en $c = 1$.

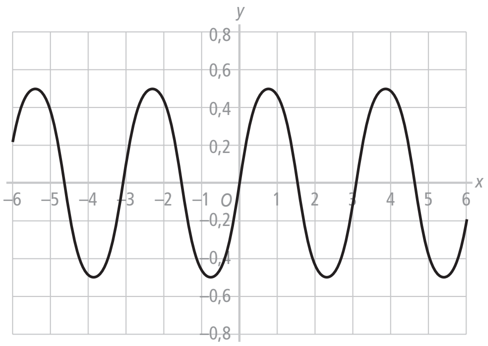
d $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (3\cos^2 x - \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (2\cos 2x + 1)\mathrm{d}x = \left[\sin 2x + x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = (\sin\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{4}\pi - \sin 0 - 0) = 1 + \tfrac{1}{4}\pi.$

2a Wanneer je de grafiek van $v(x)$ plot, blijkt deze 0 te zijn voor alle waarden van x, dus is $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$.

b $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Dus:
$1 - 2\sin^2 x = 1 - 2(1 - \cos^2 x) = 1 - 2 + 2\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$

bladzijde 249

3a



Uit de grafiek blijkt: periode π , het beginpunt is (0, 0) en het amplitude is 0,5.

b $y = 0{,}5\sin 2x$

4 Plot de grafiek van $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} - (x + 5)$. De grafiek blijkt de lijn $y = 0$ te zijn, mits $x \neq 1$ want dan bestaat de eerste formule niet en dus $h(x)$ ook niet, en dus lijken de formules bij dezelfde grafiek te horen.

5a Bekijk driehoek *ABQ* en driehoek *PCQ*.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \angle AQB = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \angle AQB \\ \angle AQB + \angle PQC = 90^\circ \Rightarrow \angle PQC = 90^\circ - \angle AQB \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \angle PQC$$

b $AB \,//\, DP \Rightarrow \alpha + \beta = \angle APD$(Z-hoeken)

c

ΔAPQ	ΔABQ	ΔPCQ	ΔAPD
$\cos\beta = \frac{AQ}{1} = AQ$	$\cos\alpha = \frac{AB}{AQ}$	$\cos\alpha = \frac{CQ}{PQ}$	$\cos(\alpha+\beta) = \frac{DP}{1} = DP$
$\sin\beta = \frac{PQ}{1} = PQ$	$\sin\alpha = \frac{BQ}{AQ}$	$\sin\alpha = \frac{PC}{PQ}$	$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AD}{1} = AD$

d Uit de tabel volgt $\sin\alpha = \dfrac{BQ}{AQ} \Rightarrow AQ\sin\alpha = BQ$ en $\cos\alpha = \dfrac{CQ}{PQ} \Rightarrow PQ\cos\alpha = CQ$
Dus $\sin(\alpha+\beta) = AD = BQ + CQ = AQ\sin\alpha + PQ\cos\alpha$.

e Kijk weer naar de tabel $\sin(\alpha+\beta) = AQ\sin\alpha + PQ\cos\alpha = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha$

f Uit de tabel volgt $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AQ} \Rightarrow AQ\cos\alpha = AB$ en $\sin\alpha = \dfrac{PC}{PQ} \Rightarrow PQ\sin\alpha = PC$
Dus $\cos(\alpha+\beta) = DP = AB + PC = AQ\cos\alpha - PQ\sin\alpha$.

Kijk weer naar de tabel $\cos(\alpha+\beta) = AQ\cos\alpha - PQ\sin\alpha = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$

bladzijde 250

6a $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x\sin x = 2\sin x\cos x$

b $\cos 2x - \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

7a $\displaystyle\int_{1\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int_{1\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} \cos 2x\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2x\right]_{1\frac{1}{2}\pi}^{2\pi} = (\tfrac{1}{2}\sin 4\pi - \tfrac{1}{2}\sin 3\pi) = 0$

b $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 4\sin x\cos x\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 2\sin 2x\mathrm{d}x = \left[-\cos 2x\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = (-\cos\pi - \cos\tfrac{1}{2}\pi) = 1 - 0 = 1$

c $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \sin 2x\cos 2x\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \tfrac{1}{2}\sin 4x\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{8}\cos 4x\right]_{0}^{\frac{1}{4}\pi} = (-\tfrac{1}{8}\cos\pi - -\tfrac{1}{8}\cos 0) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}$

d $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 x + 2\sin^2 x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin^2 x)\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} (1\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x = \left[1\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} =$

$(1\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\sin 2\pi) - (-1\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\sin(-2\pi)) = 3\pi$

8a De x-coördinaat van P is gelijk aan de x-coördinaat van R, dus $\cos t = \cos(-t)$.
De y-coördinaat van P is tegengesteld aan de y-coördinaat van R, dus
$\sin t = -\sin(-t)$.

b $\cos(t-u) = \cos(t+(-u)) = \cos t\cos(-u) + \sin t\sin(-u) = \cos t \cdot \cos u + \sin t \cdot -\sin u =$
$\cos t\cos u - \sin t\sin u$

c $\sin(t-u) = \sin(t+(-u)) = \sin t\cos(-u) + \sin(-u)\cos t = \sin t \cdot \cos u + -\sin u \cdot \cos t =$
$\cos t\cos u - \sin u\cos t$

bladzijde 251

9a

booglengte	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{10}\pi$
oppervlakte	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{20}\pi$

b De oppervlakte is $\pi r^2 = \pi$ en de booglengte is $2\pi r = 2\pi$. Dus oppervlakte : booglengte is 1 : 2

10a Oppervlakte $\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2}\sin x$

b Oppervlakte $\triangle OCD = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot OC = \frac{1}{2}\tan x$

c Oppervlakte $\triangle OBC \leq$ oppervlakte segment OCB $\leq$ oppervlakte $\triangle OCD \Rightarrow$
$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x \Rightarrow \sin x \leq x \leq \tan x$

d Alle leden delen door $\sin x$ geeft: $1 \leq \dfrac{x}{\sin x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$ vervolgens alle leden omdraaien geeft: $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$

Wanneer x naar 0 gaat, dan gaat $\cos x$ naar 1, dus als x naar 0 gaat dan krijg je

$$\lim_{x\to 0}\cos x \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

11a $\sin(x+\Delta x) = \cos\Delta x \sin x + \sin\Delta x \cos x$, dit volgt uit de formules uit opdracht 5e

b $$h(x) = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\Delta x\cos x + \cos\Delta x \sin x - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\Delta x \cos x}{\Delta x} + \frac{\cos\Delta x \sin x - \sin x}{\Delta x} =$$
$$\cos x \cdot \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} + \sin x \cdot \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}.$$

c Wanneer $\Delta x \to 0$ dan $\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} \to 1$ en $\cos\Delta x \to 1$, dus $h(x) \to \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

d $$\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \frac{\cos\Delta x\cos x - \sin\Delta x \sin x - \cos x}{\Delta x} = \frac{\cos\Delta x \cos x - \cos x}{\Delta x} - \frac{\sin\Delta x \sin x}{\Delta x} =$$
$\cos x \cdot \dfrac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \sin x \cdot \dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$. Wanneer $\Delta x \to 0$ dan gaat dit over in:
$\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$. Dus $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$