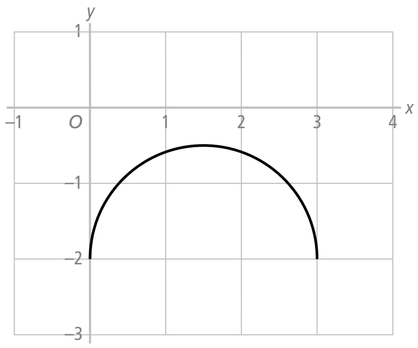
Overzicht examenstof

Analyse

1a



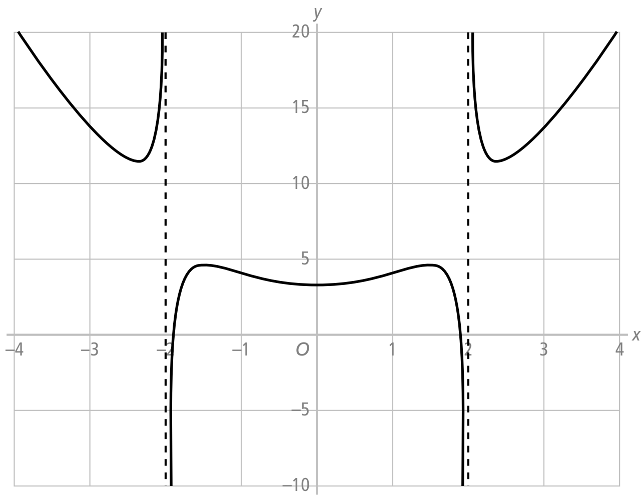
b Randpunt als $3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3-x) = 0$.
Dit geeft de randpunten $(0,\ f(0)) = (0,\ -2)$ en $(3,\ f(3) = (3,\ -2)$.
De top is $(1\frac{1}{2},\ f(1\frac{1}{2})) = (1\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$.

c Domein $[0, 3]$ en bereik $[-2,\ -\frac{1}{2}]$.

2

	Domein	Bereik	Asymptoten
a	$\mathbb{R}$	$\langle\leftarrow,\ 3]$	Geen
b	$\langle\leftarrow,\ 0\rangle\cup\langle 0,\ \rightarrow\rangle$	$\langle\leftarrow,\ 1\rangle\cup\langle 1,\ \rightarrow\rangle$	Verticaal: $x = 0$ Horizontaal: $y = 1$
c	$\langle\leftarrow,\ \frac{1}{2}\rangle\cup\langle\frac{1}{2},\ \rightarrow\rangle$	$\langle\leftarrow,\ 3\rangle\cup\langle 3,\ \rightarrow\rangle$	Horizontaal: $x = \frac{1}{2}$ Verticaal: $y = 3$
d	$\langle\leftarrow,\ -2]\cup[4,\ \rightarrow\rangle$	$[0,\ \rightarrow\rangle$	Geen

3a

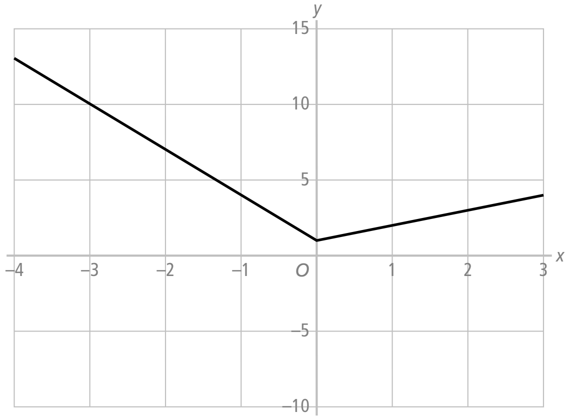


b Domein: $\langle\leftarrow,\ -2\rangle\cup\langle -2,\ 2\rangle\cup\langle 2,\ \rightarrow\rangle$
Het bereik is bij benadering: $\langle\leftarrow;\ 4{,}54]\cup[11{,}46;\ \rightarrow\rangle$.

c Verticale asymptoten: $x = -2$ en $x = 2$

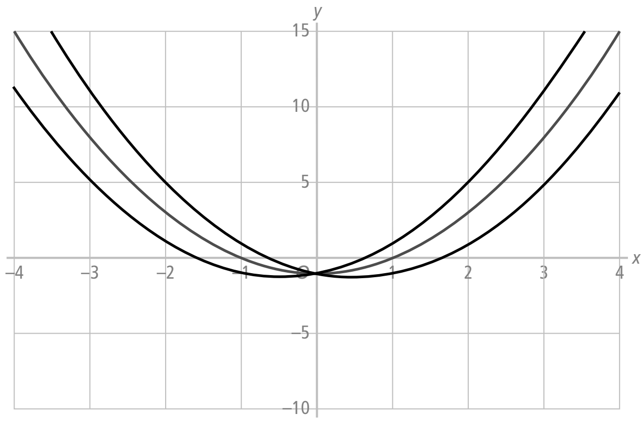
4a $f(x)=\begin{cases}2x-x+1=x+1 & \text{voor } x\geq 0\\ -2x-x+1=-3x+1 & \text{voor } x<0\end{cases}$

b



c Bereik: $[1, \rightarrow\rangle$

5a

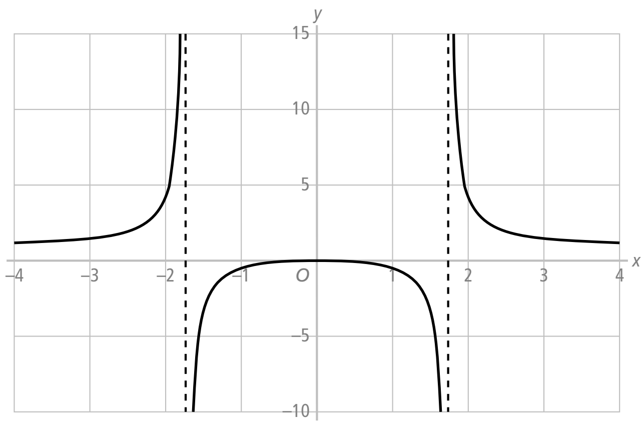


b $f_p'(x)=2x+2p=0$ geeft $2x+2p=0$ dus geldt $x_{TOP}=-p$ en
$y_{TOP}=f_p(-p)=(-p)^2+2p\cdot(-p)-1=p^2-2p^2-1=-p^2-1$

c Omdat $y_{TOP}=-p^2-1=-(p^2+1)<0$ ligt de top voor elke waarde van p onder de x-as.

d Dan moet gelden: $y_{TOP}=-5\Rightarrow -p^2-1=-5\Rightarrow p^2=4$ en is $p=2$ of $p=-2$.

6a



b Horizontale asymptoot: $y=1$

c Verticale asymptoten: $x = -\sqrt{3}$ en $x = \sqrt{3}$

d Domein: $\langle \leftarrow, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle \cup \langle \sqrt{3}, \rightarrow\rangle$

Bereik: $\langle \leftarrow, 0] \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$

7a
$3x^4 = 4x^3$
$3x^4 - 4x^3 = 0$
$x^3(3x-4) = 0$
$x = 0$ of $x = 1\frac{1}{3}$

b
$x^4 - 2x^2 = 3$
$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
$(x^2-3)(x^2+1) = 0$
$x^2 = 3$
$x = \sqrt{3}$ of $x = -\sqrt{3}$

c
$x^3 + 3x^2 - 4x = 0$
$x(x^2+3x-4) = 0$
$x(x+4)(x-1) = 0$
$x = 0$ of $x = -4$ of $x = 1$

d
$(2x-1)(x-1) = 3$
$2x^2 - 3x + 1 - 3 = 0$
$2x^2 - 3x - 2 = 0$
$(2x+1)(x-2) = 0$
$x = -\frac{1}{2}$ of $x = 2$

e
$(2x+1)(x+3) - (x-5)^2 = 16$
$2x^2 + 7x + 3 - x^2 + 10x - 25 - 16 = 0$
$x^2 + 17x - 38 = 0$
$(x+19)(x-2) = 0$
$x = -19$ of $x = 2$

8a
$\frac{-6}{1-2x} = x - 1$
$-6 = (1-2x)(x-1)$
$-6 = x - 1 - 2x^2 + 2x$
$2x^2 - 3x - 5 = 0$
$(2x+2)(x-2\frac{1}{2}) = 0$
$x = -1$ of $x = 2\frac{1}{2}$

b
$\frac{2}{x-1} = \frac{x}{x+2}$
$2(x+2) = x(x-1)$
$2x + 4 = x^2 - x$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ of $x = -1$

c
$4 - \frac{2x}{x+3} = 2(x+6)$
$\frac{4(x+3) - 2x}{x+3} = 2x + 12$
$\frac{2x+12}{x+3} = 2x + 12$
$2x + 12 = 0$ of $x + 3 = 1$
$x = -6$ of $x = -2$

9a
$\sqrt{x+3} = 3 - x$
$x + 3 = (3-x)^2$
$x + 3 = 9 - 6x + x^2$
$x^2 - 7x + 6 = 0$
$(x-6)(x-1) = 0$
$x = 1$ of $x = 6$ (voldoet niet)

b
$\sqrt{x^2 - 3x - 1} = 2x - 7$
$x^2 - 3x - 1 = 4x^2 - 28x + 49$
$3x^2 - 25x + 50 = 0$
$(3x-10)(x-5) = 0$
$x = 5$ of $x = 3\frac{1}{3}$ (voldoet niet)

c
$\frac{2}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2}$
$\sqrt{x-2} = 4$
$x = 18$

10a $x^2 - x - 2 < 2(x+4)$
$x^2 - x - 2 < 2x + 8$
$x^2 - 3x - 10 < 0$
$(x+2)(x-5) < 0$
Een plot van $y = (x+2)(x-5)$ geeft als oplossing $-2 < x < 5$.

b $2(x+4)(x+5) \geq 5(x+8)$
$2x^2 + 18x + 40 \geq 5x + 40$
$2x^2 + 13x \geq 0$
$x(2x+13) \geq 0$
Een plot van $y = x(2x+13)$ geeft als oplossing $x \leq -6\frac{1}{2}$ of $x \geq 0$.

c $2 - \dfrac{1}{x+1} > 4$
$-\dfrac{1}{x+1} > 2$
$\dfrac{1}{x+1} < -2$
Oplossen van $\dfrac{1}{x+1} = -2$ geeft $x = -1\frac{1}{2}$.
Plotten van $y = \dfrac{1}{x+1}$ en $y = -2$ gevolgd door aflezen geeft als oplossing $[-1\frac{1}{2}, -1\rangle$.

d Los eerst op $\sqrt{-x^2+3x+4} = \sqrt{x+1}$.
$-x^2 + 3x + 4 = x + 1$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x-3)(x+1) = 0$
$x = 3$ of $x = -1$
Plotten in één figuur van $y = \sqrt{-x^2+3x+4}$ en $y = \sqrt{x+1}$ en aflezen geeft als oplossing $\langle 3, 4]$.

11a Omdat $P(p, p^2+3)$ en $Q(p, p-3)$ is $L(p) = p^2 + 3 - (p-3) = p^2 - p + 6$.
b Stel $p^2 - p + 6 = 4$ dan is $p^2 - p + 2 = 0$.
Omdat $D = 1 - 8 < 0$ is er geen enkele waarde van p waarvoor dit het geval is.
c Omdat $L'(p) = 2p - 1$ en de grafiek van L een dalparabool is, is het minimum $L(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 6 = 5\frac{3}{4}$ en is $B_L = [5\frac{3}{4}, \rightarrow\rangle$.

12a $\cos^2 x + 3\cos x - 4 = (\cos x + 4)(\cos x - 1)$
b $\ln^2 x + \ln x^2 - 3 = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = (\ln x + 3)(\ln x - 1)$
c $x - 6\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x})^2 - 6\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 1)$

13 Horizontale asymptoot $y = 2$ en verticale asymptoot $x = -2$.
Snijpunt van de asymptoten is $S(-2, 2)$.
Er is sprake van symmetrie in een punt S als geldt: $f(x_S - p) + f(x_S + p) = 2 \cdot y_S$ voor elke waarde van p.

$$f(-2-p) + f(-2+p) = 2 + \frac{3}{-2-p+2} + 2 + \frac{3}{-2+p+2} = 4 + \frac{3}{-p} + \frac{3}{p} = 4$$

Dus is de grafiek van f puntsymmetrisch in $S(-2, 2)$.

14a $\ln(x^2-4)=\ln(x+2)$

$x^2-4=x+2$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3$ of $x=-2$ (voldoet niet)

b $\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}=2$

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}}=2$

$\frac{4}{\sqrt{x}}=2$

$\sqrt{x}=2$

$x=4$

c $\ln(x^2-4)+\ln(x+2)+\ln(x-2)=2$

$\ln(x^2-4)+\ln(x^2-4)=2$

$\ln(x^2-4)=1$

$x^2-4=\mathrm{e}$

$x=\sqrt{\mathrm{e}+4}$ of $x=-\sqrt{\mathrm{e}+4}$ (voldoet niet)

15a Uit $f(x)=\frac{1}{f(x)}$ volgt:

$f(x)=1$ of $f(x)=-1$

$\ln x+1=1$ of $\ln x+1=-1$

$\ln x=0$ of $\ln x=-2$

$x=1$ of $x=\mathrm{e}^{-2}$

b $g(x)=\frac{1}{\ln x+1}=(\ln x+1)^{-1}\Rightarrow g'(x)=-(\ln x+1)^{-2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-1}{x(\ln x+1)^2}\neq 0$ voor elke x.

Dus heeft $g'(x)=0$ geen oplossing en dan heeft $g(x)$ geen uiterste waarde.

16 $\int_0^3 (x^2+3-2)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^3 (x^4+2x^2+1)\,\mathrm{d}x=[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x]_0^3=$

$((\frac{243}{5}+\frac{54}{3}+3)-(0+0+0))=69\frac{3}{5}$

17a $f(x)=\frac{10}{x+20}-\frac{10}{x-20}=\frac{10(x-20)-10(x+20)}{x^2-400}=\frac{-400}{x^2-400}=-\frac{400}{x^2-400}$

Als $0<x<20$ en x gaat van 0 naar 20 dan gaat x^2-400 van -400 naar 0, dus

$f(x)=\frac{-400}{x^2-400}$ gaat van 1 naar ∞. De grafiek stijgt dus.

b De oppervlakte van het gebied M is $10\cdot m$

De oppervlakte van het gebied V is $\int_0^{10}\left(\frac{10}{x+20}-\frac{10}{x-20}\right)\mathrm{d}x=10\cdot[\ln|x+20|-\ln|x-20|]_0^{10}=$

$10\cdot((\ln 30-\ln 10)-(\ln 20-\ln 20))=10\cdot\ln 3$.

Dus is $m=\ln 3$.

18 $h(x)$ is constant als $f(x)-f(\frac{1}{x})$ constant is.

$f(x)-f(\frac{1}{x})=\frac{4x}{x^2+1}-\frac{4\cdot\frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^2+1}=\frac{4x}{x^2+1}-\frac{4\cdot\frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^2+1}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\frac{4x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2+1}=0$

19 Uit $A(a,\, a^2)$ en $B(b,\, b^2)$ volgt dat de helling van AB gelijk is aan
$\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=b+a$.
Dus is AB: $y=(b+a)(x-a)+a^2$.
De oppervlakte van het ingesloten gebied is:

$$\int_a^b \left((b+a)(x-a)+a^2-x^2\right)\,\mathrm{d}x=[(b+a)\cdot\tfrac{1}{2}(x-a)^2+a^2x-\tfrac{1}{3}x^3]\,_a^b=$$
$$((b+a)\cdot\tfrac{1}{2}(b-a)^2+a^2\cdot b-\tfrac{1}{3}b^3)-((b+a)\cdot\tfrac{1}{2}(a-a)^2+a^2\cdot a-\tfrac{1}{3}a^3)=$$
$$((b+a)\cdot\tfrac{1}{2}(b-a)^2+a^2\cdot b-\tfrac{1}{3}b^3)-(a^2\cdot a-\tfrac{1}{3}a^3)=$$
$$(\tfrac{1}{2}(b+a)(b-a)(b-a)+a^2b-\tfrac{1}{3}b^3-\tfrac{2}{3}a^3=$$
$$\tfrac{1}{2}(b^2-a^2)(b-a)+a^2b-\tfrac{1}{3}b^3-\tfrac{2}{3}a^3=$$
$$\tfrac{1}{2}(b^3-a^2b-ab^2+a^3)+a^2b-\tfrac{1}{3}b^3-\tfrac{2}{3}a^3=$$
$$\tfrac{1}{6}b^3-\tfrac{1}{2}ab^2+\tfrac{1}{2}a^2b-\tfrac{1}{6}a^3=$$
$$\tfrac{1}{6}(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3)=\tfrac{1}{6}(b-a)^3$$

20a $$\frac{1000}{\sqrt{q}}\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{q}})=\frac{1000}{\sqrt{q}}-\frac{1000}{q}=\frac{1000\sqrt{q}}{q}-\frac{1000}{q}=\frac{1000\sqrt{q}-1000}{q}$$

b $$\frac{110-Z}{Z}=22\cdot 0{,}78^t$$
$$\frac{110}{Z}-1=22\cdot 0{,}78^t$$
$$\frac{110}{Z}=1+22\cdot 0{,}78^t$$
$$\frac{Z}{110}=\frac{1}{1+22\cdot 0{,}78^t}$$
$$Z=\frac{110}{1+22\cdot 0{,}78^t}$$

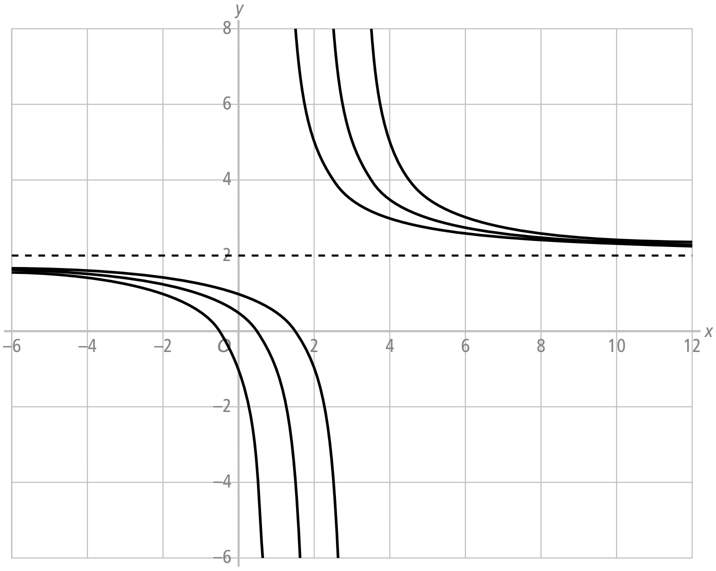
c $$\frac{3x+7}{x^2+5x+6}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}$$
$$\frac{3x+7}{x^2+5x+6}=\frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$\frac{3x+7}{x^2+5x+6}=\frac{(a+b)x+3a+2b}{(x+2)(x+3)}$ Dus moet gelden:

$\begin{cases} a+b=3\Rightarrow a=3-b \\ 3a+2b=7 \end{cases}$ de eerste vergelijking invullen in de tweede geeft:

$3\cdot(3-b)+2b=7\Rightarrow 9-3b+2b=7\Rightarrow b=2$ en dus is $a=3-2=1$

21a $f_a(x)=\dfrac{2(x-a)}{x-a}+\dfrac{3}{x-a}=\dfrac{2x-2a+3}{x-a}$

b



c Er is sprake van symmetrie in een punt S als geldt: $f_a(x_S-p)+f_a(x_S+p)=2\cdot y_S$ voor elke waarde van p.

$f_a(1-p)+f_a(1+p)=2+\dfrac{3}{1-p-1}+2+\dfrac{3}{1+p-1}=4=2\cdot 2$.

Dus f_1 is symmetrisch in $(1,2)$

d $f_a(a-p)+f_a(a+p)=2+\dfrac{3}{a-p-a}+2+\dfrac{3}{a+p-a}=4=2\cdot 2$.

Dus is f_a is symmetrisch in $(a,2)$

22 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^5}=x^{3-5}=x^{-2}$

b $f(x)=(x^4)^{-\frac{1}{2}}=x^{4\cdot-\frac{1}{2}}=x^{-2}$

c $f(x)=\dfrac{x^2\cdot x^{-1}}{x^{-3}}=x^{2-1-{-3}}=x^4$

d $f(x)=x^{\frac{1}{3}}\cdot(x^{-1})^2\cdot(x^{\frac{1}{2}})^2=x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-2}\cdot x^1=x^{-\frac{2}{3}}$

23a $x^3=20$

$x=\sqrt[3]{20}$

b $x^{-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

$x^{-1}=(\frac{3}{2})^3=\frac{27}{8}$

$x=\frac{8}{27}$

c $2x^3=3x^5$

$2x^3-3x^5=0$

$x^3(2-3x^2)=0$

$x=0$ of $x^2=\frac{2}{3}$

$x=0$ of $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

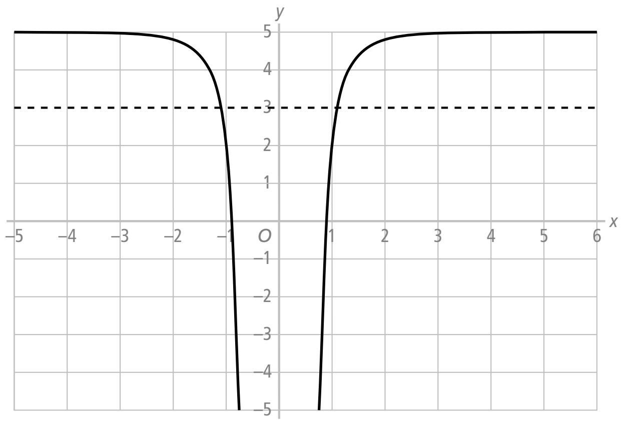
d $x^{-2}-3=0$

$\dfrac{1}{x^2}=3$

$x^2=\frac{1}{3}$

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

24a



b $5-\frac{3}{x^4}=0$

$5=\frac{3}{x^4}$

$x^4=\frac{3}{5}$

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$

c Verticaal: $x=0$

Horizontaal: $y=5$

d Los eerst op: $5-\frac{3}{x^4}=3$.

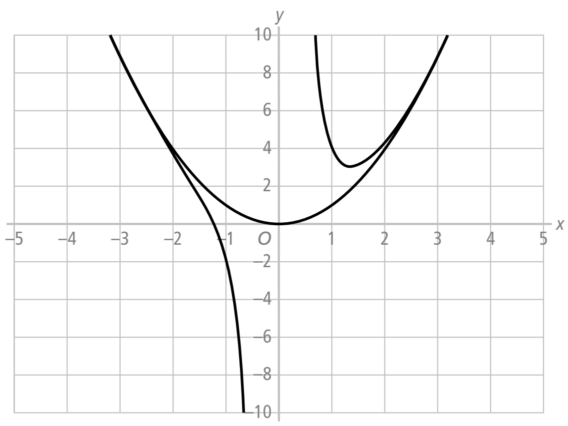
$\frac{3}{x^4}=2$

$x^4=1\frac{1}{2}$

$x=\pm\sqrt[4]{1\frac{1}{2}}$

Met behulp van een plot vind je $\left[-\sqrt[4]{1\frac{1}{2}},\ 0\right\rangle\cup\left\langle 0,\ \sqrt[4]{1\frac{1}{2}}\right]$.

25a



$g(x)=0$

$x^2+\frac{3}{x^3}=0$

$x^5+3=0$

$x=\sqrt[5]{-3}=-\sqrt[5]{3}$

b $f(x)=x^2$ want voor grote waarden van x is de term $\frac{3}{x^3}$ vrijwel 0.

c Verticale asymptoot $x=0$.

26a Uit $y = x^3$; eerst 2 naar links geeft $f_1(x) = (x+2)^3$, dan verticaal vermenigvuldigen met 2 geeft $f_2(x) = 2(x+2)^3$ en tenslotte 5 omlaag geeft $f(x) = 2(x+2)^3 - 5$.

b Uit $y = {}^2\log x$; 1 naar rechts geeft $g_1(x) = {}^2\log(x-1)$ en 1 omhoog geeft $g(x) = 1 + {}^2\log(x-1)$.

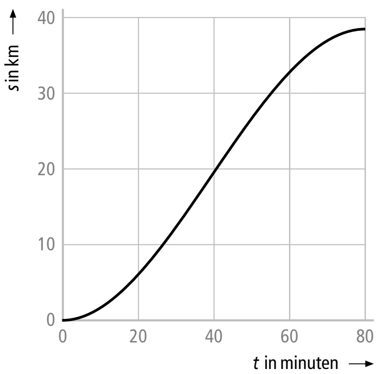
c Uit $y = \sqrt{x}$; horizontaal vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ geeft $h_1(x) = \sqrt{3x}$ en verticaal met 2 vermenigvuldigen geeft $h(x) = 2\sqrt{3x}$.

27a $k(x) = -f(x) = -2 + \dfrac{3}{x}$

b De horizontale vermenigvuldiging met 4 geeft $y = 2 - \dfrac{3}{\frac{1}{4}x} = 2 - \dfrac{12}{x}$.
Daarna 2 naar links geeft $l(x) = 2 - \dfrac{12}{x+2}$

28 $\dfrac{f(1{,}001) - f(1)}{0{,}001} = \dfrac{2^{1{,}001} + 1{,}001 - (2^1 + 1)}{0{,}001} = \dfrac{2^{1{,}001} - 2{,}999}{0{,}001} \approx 2{,}39$

29a



Op [40, 45] stijgt de grafiek sneller dan op [65, 70].

b $\dfrac{s(30) - s(15)}{30 - 15} \approx \dfrac{12{,}555 - 3{,}6788}{15} \approx 0{,}592$ km/min $\approx 35{,}5$ km/uur.

c Daar is de helling maximaal.
$s'(t) = -0{,}00048t^2 + 0{,}0375t \Rightarrow s''(t) = -0{,}00096t + 0{,}0375$
$s''(t) = 0 \Rightarrow t \approx 39{,}1$
Dus is de maximale snelheid $s'(39{,}1) \approx 0{,}733$ km/min ≈ 44 km/uur.

30a $f(x) = 2x^2 - 8\sqrt{x} = 2x^2 - 8 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 4x - 4x^{-\frac{1}{2}} = 4x - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

b $h(x) = \dfrac{-5}{3x^4} = -\frac{5}{3}x^{-4} \Rightarrow h'(x) = -\frac{5}{3} \cdot 4x^{-5} = \dfrac{20}{3x^5}$

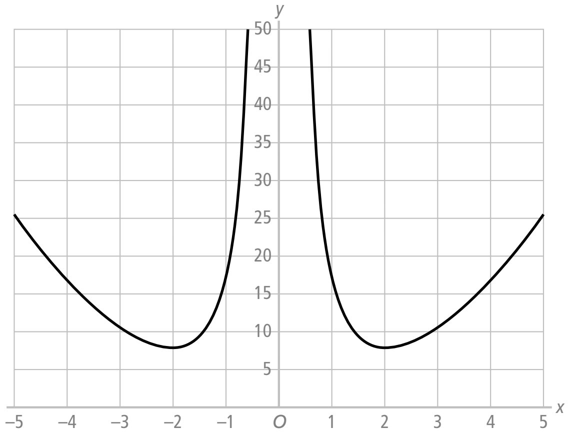
c $k(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{x^3} = \frac{1}{2}x^3 - 2x^{-3} \Rightarrow k'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 + 6x^{-4} = 1\frac{1}{2}x^2 + \dfrac{6}{x^4}$

d $g(x) = 1 - x + 2x^3 \Rightarrow g'(x) = -1 + 6x^2$

e $l(x) = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{1}{2x^3} = 2 + 4x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-3} \Rightarrow$
$l'(x) = 4 \cdot -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} + 12x^{-3} + 1\frac{1}{2}x^{-4} = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}} + \dfrac{12}{x^3} + \dfrac{3}{2x^4}$

f $m(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^4} = 2x^{-2} - 3x^{-3} + x^{-4} \Rightarrow$
$m'(x) = -4x^{-3} + 9x^{-4} - 4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^3} + \dfrac{9}{x^4} - \dfrac{4}{x^5}$

31a



Herschrijven als $g(x)=x^2+\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{x^4+16}{x^2}$ laat zien dat er geen nulpunten zijn, want $x^4+16>0$ voor elke x.

b $g'(x)=2x+16\cdot -2x^{-3} \Rightarrow g'(4)=8-32\cdot\frac{1}{64}=7\frac{1}{2}$

Vergelijking raaklijn: $y=7\frac{1}{2}(x-4)+17$ of $y=7\frac{1}{2}x-13$.

c Stel $g'(x)=0$ dan volgt $2x-\dfrac{32}{x^3}=0$.

Dus $\dfrac{2x^4}{x^3}-\dfrac{32}{x^3}=0 \Rightarrow \dfrac{2x^4-32}{x^3}=0$.

Dit geeft: $2x^4-32=0$

$x^4=16 \Rightarrow x=2$ of $x=-2$

Dus in $(-2,\ 8)$ en $(2,\ 8)$ loopt de raaklijn horizontaal.

32a $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=-2\cdot\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

b $g(x)=\dfrac{(x^2+3)^2}{x-1} \Rightarrow$

$$g'(x)=\frac{2(x^2+3)\cdot 2x\cdot(x-1)-(x^2+3)^2}{(x-1)^2}=(x^2+3)\cdot\frac{2\cdot 2x\cdot(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=$$

$$(x^2+3)\cdot\frac{4x^2-4x-x^2-3}{(x-1)^2}=(x^2+3)\cdot\frac{3x^2-4x-3}{(x-1)^2}$$

c $h(x)=(3x^2-4x+5)(1-x-x^3)$

$h'(x)=(6x-4)(1-x-x^3)+(3x^2-4x+5)(-1-3x^2)=-15x^4+16x^3-24x^2+14x-9$

33a $\frac{1}{4}(f(1\frac{1}{8})+f(1\frac{3}{8})+f(1\frac{5}{8})+f(1\frac{7}{8})+f(2\frac{1}{8})+f(2\frac{3}{8})+f(2\frac{5}{8})+f(2\frac{7}{8}))\approx$

$0,25\cdot(2,765625+2,390625+2,140625+2,015625+2,015625+$
$2,140625+2,390625+2,76625)=0,25\cdot 18,62425=4,6560625$

$$\int_1^3 (x^2-4x+6)\,\mathrm{d}x=[\tfrac{1}{3}x^3-2x^2+6x]_1^3=9-4\tfrac{1}{3}=4\tfrac{2}{3}$$

b $\frac{3}{8}(f(1\frac{3}{16})+f(1\frac{9}{16})+f(1\frac{15}{16})+f(2\frac{5}{16})+f(2\frac{11}{16})+f(3\frac{1}{16})+f(3\frac{7}{16})+f(3\frac{13}{16}))\approx$

$\frac{3}{8}(3,0897+3,25+3,3919+3,5207+3,6394+3,75+3,854+3,9256)\approx 10,658$

$$\int_1^4 (\sqrt{x}+2)\,\mathrm{d}x=[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}+2x]_1^4=(\tfrac{2}{3}\cdot 4\cdot 2+8)-(\tfrac{2}{3}+2)=10\tfrac{2}{3}$$

34a $F(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^4+2\frac{1}{2}x^2-x+C$

b $G(x)=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+C$

c $h(x)=x^{-2}+4x^{-3}\Rightarrow H(x)=-x^{-1}-2x^{-2}=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+C$

d $K(x)=\frac{1}{42}(7x+1)^6+C$

e $m(x)=x^2(x^3-1)=x^5-x^2\Rightarrow M(x)=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{3}x^3+C$

f $n(x)=\dfrac{2x+1}{x^3}=2x^{-2}+x^{-3}\Rightarrow N(x)=-2x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}=\dfrac{-2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+C$

35a $\int_2^8 \frac{1}{4}x^3\,\mathrm{d}x=[\frac{1}{16}x^4]_2^8=\frac{1}{16}(8^4-2^4)=255$

b $h(x)=0\Leftrightarrow x=0$ of $4-1\frac{1}{2}x=0\Leftrightarrow x=0$ of $x=\frac{8}{3}$

$\int_0^{\frac{8}{3}} 4x-1\frac{1}{2}x^2\ \mathrm{d}x=[2x^2-\frac{1}{2}x^3]_0^{\frac{8}{3}}=4\frac{20}{27}$

c $f(x)=h(x)\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^3=4x-1\frac{1}{2}x^2$

$x=0$ of $\frac{1}{4}x^2=4-1\frac{1}{2}x$

$x=0$ of $x^2+6x-16=0$

$x=0$ of $(x+8)(x-2)=0$

$x=0$ of $x=-8$ of $x=2$

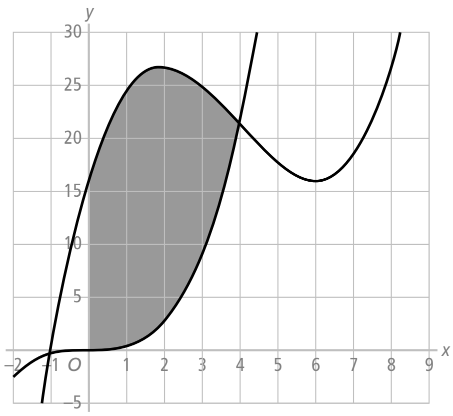
$\int_{-8}^{0} \frac{1}{4}x^3-(4x-1\frac{1}{2}x^2)\ \mathrm{d}x=[\frac{1}{16}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^3]_{-8}^{0}=128$

$\int_0^2 4x-1\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3\ \mathrm{d}x=[2x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{16}x^4]_0^2=3$

36a $f'(x)=x^2-8x+12=(x-6)(x-2)$

Dus zijn de toppen $(6,\ f(6))=(6,\ 16)$ en $(2,\ f(2))=(2,\ 26\frac{2}{3})$.

b



Eerst de snijpunten bepalen: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3-4x^2+12x+16=\frac{1}{3}x^3$

$-4x^2+12x+16=0$

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$x=4$ of $x=-1$

$\int_0^4 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^4 -4x^2+12x+16\,\mathrm{d}x=$

$[-\frac{4}{3}x^3+6x^2+16x]_0^4=(-\frac{4}{3}\cdot4^3+6\cdot4^2+16\cdot4)-(0)=74\frac{2}{3}$

c $P\left(p, f(p)\right) = \left(p, \frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16\right)$

Oppervlakte $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2}p(\frac{1}{3}p^3 - 4p^2 + 12p + 16) = \frac{1}{6}p^4 - 2p^3 + 6p^2 + 8p$.

d Dan moet gelden: $\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot Opp.\triangle OPQ$.

$\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = [\frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 16x]_0^p = \frac{1}{12}p^4 - \frac{4}{3}p^3 + 6p^2 + 16p$

Dus moet gelden:

$\frac{1}{12}p^4 - \frac{4}{3}p^3 + 6p^2 + 16p = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 12p^2 + 16p$

$\frac{1}{12}p^4 - \frac{4}{3}p^3 = \frac{1}{3}p^4 - 4p^3 + 6p^2$

$p^2 = 0$ of $\frac{1}{4}p^2 - 2\frac{2}{3}p + 6 = 0$

$p = 0$ of $p^2 - 10\frac{2}{3}p + 24 = 0$

$p = 0$ of $p \approx 3{,}23$ of $p \approx 7{,}44$

Voor $p = 0$ is er geen sprake van een driehoek OPQ.
Voor $p \approx 7{,}44$ snijdt de lijn OP de grafiek van f twee keer.
Dus voldoet alleen $p \approx 3{,}23$.

37a $2\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow 16x = x^4 \Leftrightarrow x = 0$ of $x^3 = 16$

Snijpunten $(0, 0)$ en $(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{16^2}) = (2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$.

b $\int_0^{2\sqrt[3]{2}} 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = [\frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^3]_0^{2\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{6} \cdot (2\sqrt[3]{2})^3 = 2\frac{2}{3}$

38 Stel de groeifactor per jaar is g. Dan moet gelden $g^{18} = 0{,}5$ en dus is
$g = 0{,}5^{\frac{1}{18}} \approx 0{,}9622$. Dus neemt het percentage euro elk jaar met ongeveer 3,78% af.

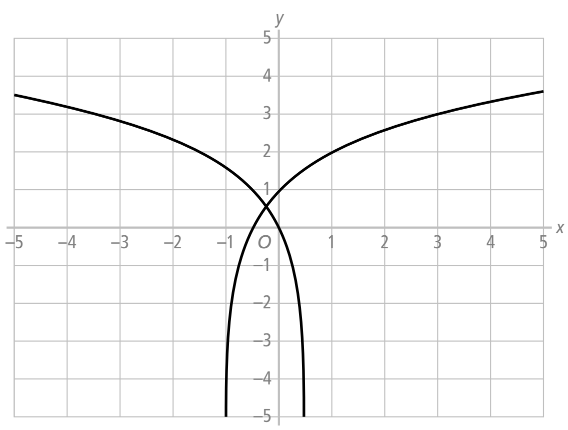
39a $N_1(t) = 20 \cdot 2{,}98^t$

b $g^{1,5} = 2 \Leftrightarrow g = 2^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}5874$ dus is dan $N_2(t) = 20 \cdot 1{,}5874^t$.

c $g^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow g = 2^3 = 8$ dus is $N_3(t) = 20 \cdot 8^t$.

d $g^2 = 0{,}75 \Leftrightarrow g = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}8660$ en dus is $N_4(t) = 20 \cdot 0866^t$.

40a



b $g(x) = {}^2\log 2 + {}^2\log(x+1) = {}^2\log 2(x+1) = {}^2\log(2x+2)$

c $f(x) = g(x)$

$^2\log(1-2x) = {}^2\log(2x+2)$

$1-2x = 2x+2$

$-4x = 1$

$x = -\frac{1}{4}$

Snijpunt $(-\frac{1}{4},\ {}^2\log 1\frac{1}{2})$

41a De omtrek van de aarde is ongeveer 40 000 km, dus

$D = \dfrac{100}{40\,000} \cdot\ 360^\circ = 0,9^\circ$

b $R_{10U} = \log 10U + 1,66\log D + 3,30 =$
$\log 10 + \log U + 1,66\log D + 3,30 = 1 + R_U$
Dus neemt R met 1 toe.

c $7,1 = \log U + 1,66\log 55 + 3,30$

$\log U = -1,66\log 55 + 3,8$

$\log U = \log 55^{-1,66} + \log 10^{3,8}$

$U = 55^{-1,66} \cdot 10^{3,8}$

$U \approx 8,1$ mm

d $\log U_1 + 1,66\log 0,9 + 3,30 = \log U_2 + 1,66\log 1,8 + 3,30$
$\log U_1 + 1,66\log 0,9 = \log U_2 + 1,66\log 1,8$
$\log U_1 + \log 0,9^{1,66} = \log U_2 + \log 1,8^{1,66}$
$\log U_1 - \log U_2 = \log 1,8^{1,66} - \log 0,9^{1,66}$
$\log \dfrac{U_1}{U_2} = \log \dfrac{1,8^{1,66}}{0,9^{1,66}}$
$\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{1,8^{1,66}}{0,9^{1,66}} = 2^{1,66} \approx 3,16 \Rightarrow U_1 : U_2 = 3,16 : 1$

42a $f(x) = {}^2\log(3x+5) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{3x+5} \cdot 3 = \dfrac{3}{(3x+5)\ln 2}$

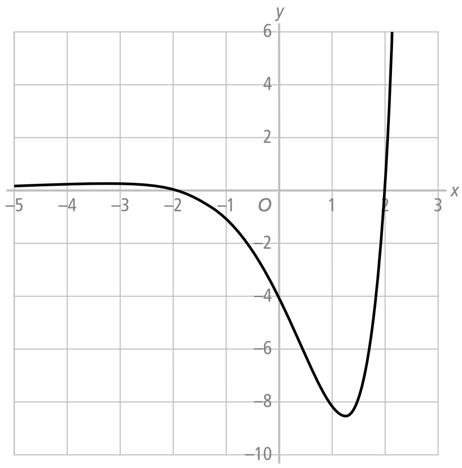
b $g(t) = 1500 \cdot 0,94^t \Rightarrow g'(t) = 1500 \cdot 0,94^t \cdot \ln 0,94$

c $h(x) = x\ln^2 x \Rightarrow h'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln^2 x + 2\ln x$

d $j(t) = \dfrac{250}{1+15\cdot e^{-0,18t}} = 250 \cdot (1+15\cdot e^{-0,18t})^{-1} \Rightarrow$
$j'(t) = 250 \cdot -1 \cdot (1+15\cdot e^{-0,18t})^{-2} \cdot 15 \cdot e^{-0,18t} \cdot -0,18 = \dfrac{675}{e^{0,18t}(1+e^{-0,18t})^2}$

e $k(x) = 3^{x^2+1} \Rightarrow k'(x) = 3^{x^2+1} \cdot 2x \cdot \ln 3$

43a



b $f(x)=0 \Rightarrow x^2-4=0$ dus nulpunten: $x=-2$ en $x=2$.

c Horizontaal: $y=0$

d $f'(x)=2x\mathrm{e}^x+(x^2-4)\cdot \mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cdot(x^2+2x-4)$

$f'(x)=0$ geeft:

$x^2+2x-4=0 \Rightarrow x=-1+\sqrt{5}$ of $x=-1-\sqrt{5}$

Maximum $f(-1-\sqrt{5})\approx 0{,}25$

Minimum $f(-1+\sqrt{5})\approx -8{,}51$

e $F'(x)=(2x+b)\mathrm{e}^x+(x^2+bx+c)\mathrm{e}^x=(x^2-4)\mathrm{e}^x$ voor elke x.

$2x+b+x^2+bx+c=x^2-4$ voor elke x

$2x+b+bx+c=-4$ voor elke x

$(2+b)x+b+c=-4$ voor elke x

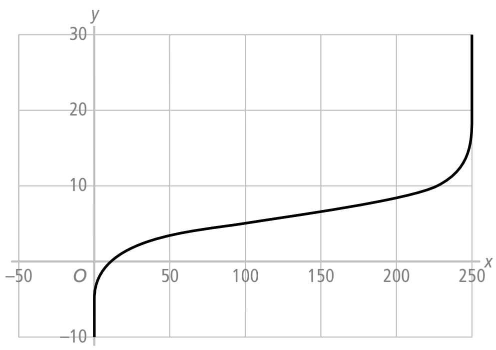
$2+b=0$ en $b+c=-4$

$b=-2$ en $c=-2$

f Oppervlakte $=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x=-[(x^2-2x-2)\mathrm{e}^x]_{-2}^{2}=-(-2\mathrm{e}^2-6\mathrm{e}^{-2})=2\mathrm{e}^2+6\mathrm{e}^{-2}$.

Dus is de oppervlakte $2\mathrm{e}^2+6\mathrm{e}^{-2}$.

44a



De formule geeft een redelijke schatting als $t>0 \Rightarrow \ln(\frac{10}{h}-0{,}04)<0$

Dus als $\frac{10}{h}-0{,}04<1 \Rightarrow \frac{10}{h}<1{,}004 \Rightarrow h>\frac{10}{1{,}004}\approx 9{,}96$

Vanaf zo'n 10 cm tot 250 cm.

b Op $[50, 200]$ is de helling ongeveer $\frac{8{,}289-3{,}298}{200-50}\approx 0{,}03$.

c $t(h)=-1,8\ln\left(\frac{10}{h}-0,04\right) \Rightarrow \; t'(h)=-1,8\cdot\frac{1}{\frac{10}{h}-0,04}\cdot-\frac{10}{h^2}=\frac{18}{10h-0,04h^2}$

$t'(50)\approx 0,05; t'(60)\approx 0,04; t'(90)\approx 0,03;$

$t'(140)\approx 0,03; t'(170)\approx 0,03; t'(200)\approx 0,05$.

d Wordt erg groot. Ja, want de plant groeit vrijwel niet meer en dan duurt het erg lang om de hoogte nog iets te laten toenemen.

De grafiek van t heeft verticale asymptoot $h=250$.

45a $C'(t)=160(\mathrm{e}^{-0,2t}\cdot-0,2+\mathrm{e}^{-t})\Rightarrow C'(0)=160\cdot(-0,2+1)>0$

Dus stijgt de concentratie direct na de injectie.

b De concentratie is maximaal als $C'(t)=0$,dus $160(\mathrm{e}^{-0,2t}\cdot-0,2+\mathrm{e}^{-t})=0$

$\mathrm{e}^{-0,2t}\cdot-0,2+\mathrm{e}^{-t}=0$

$0,2\mathrm{e}^{-0,2t}=\mathrm{e}^{-t}$

$\mathrm{e}^{-0,2t}=5\mathrm{e}^{-t}$

$\frac{\mathrm{e}^{-0,2t}}{\mathrm{e}^{-t}}=5\Rightarrow \mathrm{e}^{0,8t}=5$

$0,8t=\ln 5\Rightarrow t=1,25\cdot\ln 5$

Dus als $t=1,25\ln 5$ is de concentratie maximaal.

46

ß in graden	11,5	45	60	114,6	210	315	343,8
ß in radialen	0,2	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	2	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	6

47a $f(x)=\cos 2x$ of $f(x)=-\cos 2x$

b $f(x)=4\cos\pi x$ of $f(x)=-4\cos\pi x$

c $f(x)=-3\cos 20x$

48 $\sin x \xrightarrow{\text{2 naar boven}} 2+\sin x$

$2+\sin x \xrightarrow{\text{3 naar rechts}} 2+\sin(x-3)$

$2+\sin(x-3)\xrightarrow{\times -2} 2+\sin(-\frac{1}{2}\cdot x-3)=2+\sin(-\frac{1}{2}(x+6))$

Dus is $a=1$; $b=-\frac{1}{2}$; $c=6$; $d=2$.

49a $\cos x=\frac{1}{2}$

$\cos x=\cos\frac{1}{3}\pi$

$x=\pm\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ (k geheel)

Op $[-\pi, \pi]$ zijn de oplossingen: $x=\pm\frac{1}{3}\pi$.

b $\sin x=-0,6$

$\sin x\approx\sin -0,6435$

$x\approx -0,6435+k\cdot 2\pi$ of $x=\pi--0,6435+k\cdot 2\pi$ (k geheel)

Op [0, 10] zijn de oplossingen $x\approx 3,79$ of $x=5,64$.

c Los eerst op: $\cos x=-0,8$.

$\cos x\approx\cos 2,498$

$x\approx\pm 2,498+k\cdot 2\pi$ (k geheel)

Met een plot volgt de oplossing:.$\langle -10,07; -8,78\rangle\cup\langle -3,79; -2,50\rangle\cup\langle 2,50; 3,79\rangle\cup\langle 8,78; 10,07\rangle$

d Los eerst op: $\sin x=0,92$.

$\sin x\approx\sin 1,1681$

$x\approx 1,1681+k\cdot 2\pi$ of $x=\pi-1,1681+k\cdot 2\pi$ (k geheel)

Met een plot volgt de oplossing: $\langle 1,17; 1,97\rangle\cup\langle 7,45; 8,26\rangle$.

50a De waterhoogte is maximaal $1,4+0,7=2,1$ meter en minimaal $1,4-0,7=0,7$ meter.

b $1,4+0,7\cos 0,506t>1$ tussen $t=8,11$ uur en $t=16,72$ uur.
$16,72-8,11=8,61$ uur. Dit is ongeveer 8 uur en 37 minuten.

51a De periode van f is $\frac{2\pi}{\pi}=\pi$ en de periode van g is $\frac{2\pi}{2\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}\pi$.

b Dan moet $\cos 2x=0$.
$2x=\pm\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$
$x=\pm\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\pi$ (k geheel)
Met het gegeven domein zijn de snijpunten: $(\frac{1}{4}\pi, 2)$ en $(\frac{3}{4}\pi, 2)$.

c $1-2\sin 2\frac{1}{2}x=3$
$\sin 2\frac{1}{2}x=-1$
$2\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$
$x=\frac{-1}{5}\pi+k\cdot\frac{4}{5}\pi$

$1-2\sin 2\frac{1}{2}x=-1$
$\sin 2\frac{1}{2}x=1$
$\sin 2\frac{1}{2}x=\sin\frac{1}{2}\pi$
$x=\frac{1}{5}\pi+k\cdot\frac{4}{5}\pi$ (k geheel)
De toppen zijn: $(\frac{3}{5}\pi, 3)$; $(\frac{1}{5}\pi, -1)$ en $(\pi, -1)$.

d $f(x)=g(x)\Rightarrow 2+3\frac{1}{2}\cos 2x=1-2\sin 2\frac{1}{2}x.$

Met een rekenmachine vind je: $x\approx 1,07$ en $x\approx 2,34$.

52a De periode van f is 4π en de periode van g is $\frac{2\pi}{\frac{3}{4}}=2\frac{2}{3}\pi$.

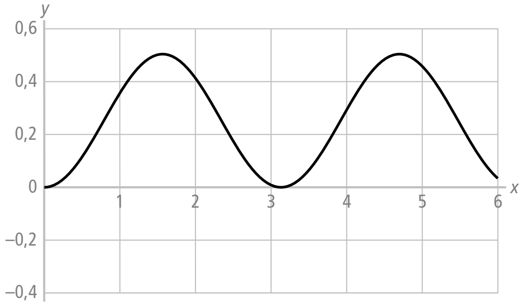
De gemeenschappelijke periode is 8π want $2\cdot 4\pi=8\pi$ en $3\cdot 2\frac{2}{3}\pi=8\pi$.

b Met een rekenmachine: $x\approx 0,84;\ 5,86;\ 10,89;\ 15,92;\ 20,94$.

c Er passen $\frac{400\pi}{8}=50$ perioden in dit interval.
Op $\left[0,400\pi\right]$ zijn er $50\cdot\ 5=250$ oplossingen.

53a $g(x)=3\sin x-\cos x\Rightarrow g'(x)=3\cos x+\sin x$
b $h(x)=3\cos 4x\Rightarrow h'(x)=-12\sin 4x$
c $k(x)=0,7\sin 6\pi x\Rightarrow k'(x)=4,2\pi\cos 6\pi x$

54a



De periode van f is π .

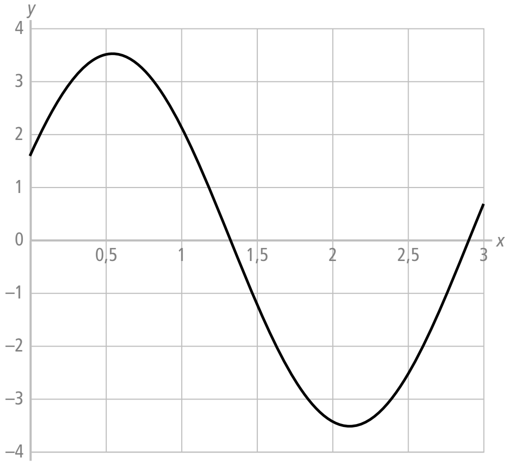
b $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

c $2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x) \, dx =$

$[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x]_0^{\pi} = (\frac{1}{2}\pi - 0) - (0) = \frac{1}{2}\pi$

55a Zowel van *f* als van *g* is de periode π, dus ook de periode van *h* is π.

b



Uit de plot volgt:
h heeft maximum 3,51 en minimum –3,51, dus is $a \approx 3{,}51$.

De periode is π, dus $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

De grafiek snijdt de *x*-as in (– 0,25, 0) dus $c = -0{,}25$.

Dit geeft $h(x) = 3{,}51 \sin 2(x + 0{,}25)$

c $h(x) = 2\sin 2x + 2\sin(2x+1) =$

$2(2\sin\frac{1}{2}(2x+2x+1) \cdot \cos\frac{1}{2}(2x-2x-1)) = \; 4\sin(2x+\frac{1}{2})\cos(-\frac{1}{2}) = 4\cos\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{1}{2})$

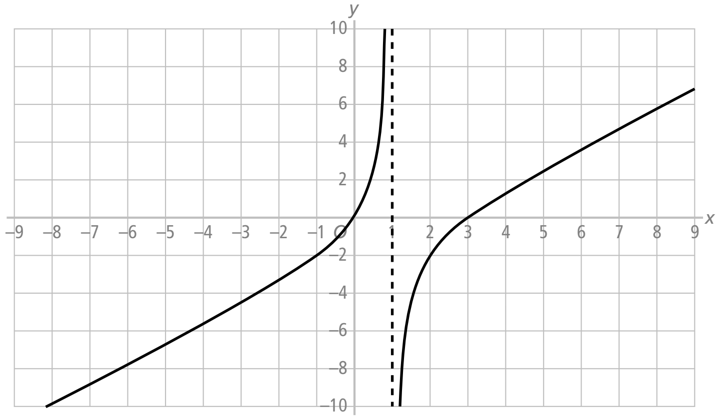
56a $f(x) = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x = \; 2\cdot 2\sin x\cos x\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 2x \cdot 2\cos 2x$

b $f(x) = \sin 4x = \sin 2\cdot(2x) = 2\sin 2x\cos 2x$

c $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} \sin 4x \, dx = [-\frac{1}{4}\cos 4x]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{8}\pi} =$

$(-\frac{1}{4}\cos 2\frac{1}{2}\pi) - (-\frac{1}{4}\cos 2\pi) = 0 - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.

57a



Nulpunten $x = 0$ en $x = 3$.

b $g'(x)=\dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2}$

De afgeleide functie is overal positief en dus heeft g geen extreme waarden.

c $g(x)=\dfrac{x-2}{1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{(x-2)(x-1)-2}{x-1}=$

$\dfrac{x^2-3x+2-2}{x-1}=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$.

d Verticale asymptoot $x=1$.

Scheve asymptoot $y=x-2$.

58a $f(x)=g(x)$

$x+4=x^2-2$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3$ of $x=-2$

Snijpunten: $(-2,\ 2)$ en $(3,\ 7)$.

b $v(x)=x+4-(x^2-2)=-x^2+x+6$

$v'(x)=-2x+1=0$ voor $x=\frac{1}{2}$.

Maximum $v(\frac{1}{2})=6\frac{1}{4}$ want de grafiek van v is een bergparabool.

c De verticale afstand tussen de grafieken van f en g is maximaal voor $x=\frac{1}{2}$.

d $s(x)=x+4+(x^2-2)=x^2+x+2$

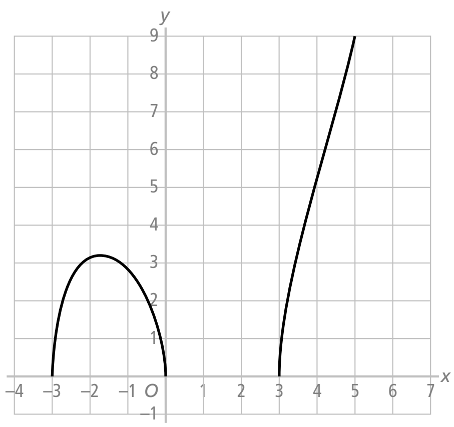
$s'(x)=2x+1=0$ voor $x=-\frac{1}{2}$.

Het minimum is $s(-\frac{1}{2})=1\frac{3}{4}$ want de grafiek van s is een dalparabool.

e $p(x)=(x+4)\cdot(x^2-2)=x^3+4x^2-2x-8$

$p'(x)=3x^2+8x-2=0$ voor $x=\dfrac{-8\pm\sqrt{88}}{6}=-1\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{22}$

59a



Het domein is $[-3,\ 0]\cup[3,\ \rightarrow\rangle$.

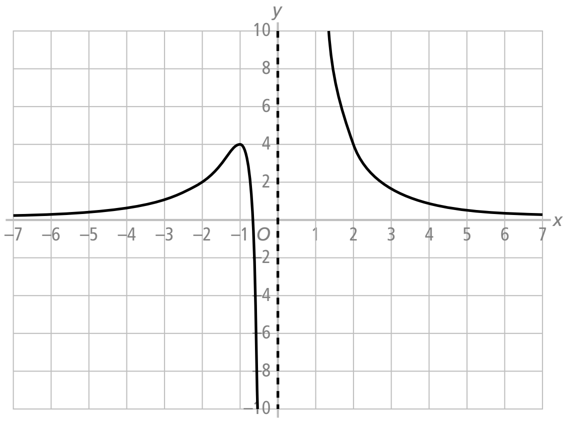
b $h(x)=(x^3-9x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}(x^3-9x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-9)=\dfrac{3x^2-9}{2\sqrt{x^3-9x}}$

c $h'(x)=0$ voor $3x^2-9=0$ dus voor $x=\pm\sqrt{3}$.

$x=\sqrt{3}$ valt buiten het domein.

Maximum $h(-\sqrt{3})=\sqrt{(-\sqrt{3})^3-9(-\sqrt{3})}=\sqrt{-3\sqrt{3}+9\sqrt{3}}=\sqrt{6\sqrt{3}}$.

60a



De x-as en de y-as zijn de asymptoten.

b $f(x)=0$ als $12x+8=0$ dus is $x=-\frac{2}{3}$ het nulpunt.

c $f(x)=12x^{-2}+8x^{-3} \Rightarrow f'(x)=-24x^{-3}-24x^{-4}=-\dfrac{24x+24}{x^4}$

Nulpunt van f' is $x=-1$ en het maximum is $f(-1)=4$.

d $f'(x)=-24x^{-3}-24x^{-4} \Rightarrow f''(x)=72x^{-4}+96x^{-5}=\dfrac{72x+96}{x^5}$

Nulpunt van f'': $72x+96=0 \Rightarrow 72x=-96 \Rightarrow x=-\frac{96}{72}=-1\frac{1}{3}$.

Dus is $x=-1\frac{1}{3}$, de exacte x-coördinaat van het buigpunt.

61a $f_a'(x)=\dfrac{2ax(x-1)-(ax^2-1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{ax^2-2ax+1}{(x-1)^2}$

Geen extreme waarden als $ax^2-2a+1\neq 0$ voor elke x.

Dus als de discriminant < 0

$(-2a)^2-4a<0$

$4a^2-4a<0$

$a(a-1)<0$

$0<a<1$

b Dan moeten teller en noemer beide gelijk aan 0 zijn voor $x=1$.

Dus moet dan gelden voor de teller: $a-1=0$.

Dit is het geval voor $a=1$. $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$ mits $x\neq 1$.

c Als de grafiek van f_a de x-as raakt moet gelden:

$f_a(x)=0$ en $f_a'(x)=0$.

$\begin{cases} ax^2-1=0 \Rightarrow ax^2=1 \\ ax^2-2ax+1=0 \end{cases}$ de eerste invullen in de tweede geeft:

$1-2ax+1=0 \Rightarrow 2ax=2 \Rightarrow x=\dfrac{1}{a}$.

Dit invullen in $ax^2=1$ geeft $a\cdot\left(\dfrac{1}{a}\right)^2=1 \Rightarrow \dfrac{a}{a^2}=1 \Rightarrow a=1$

Echter $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$ raakt niet aan de x-as.

62 De inhoud is $\pi\int_0^{30} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{30} 0{,}564^2 \cdot x(30-x)\,\mathrm{d}x =$

$0{,}318096\pi\int_0^{30} x(30-x)\,\mathrm{d}x = 0{,}318096\ \ [15x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^{30} =$

$0{,}318096\pi \cdot 4500 \approx 4497\ \text{cm}^3$.

63a Benader beide lichamen door een kegel en bereken de inhoud.

b Inhoud $G = \pi\int_0^4 (x\sqrt{x})^2\ \mathrm{d}x = \pi\int_0^4 x^3\ \mathrm{d}x = \pi[\frac{1}{4}x^4]_0^4 = 64\pi$

Inhoud R bereken je door eerst te spiegelen in de lijn $y = x$.

$f : y = x^{1\frac{1}{2}}$ wordt dan $g : x = y^{1\frac{1}{2}} \Rightarrow g : y = x^{\frac{2}{3}}$

Daarna werk je met de functie $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ op het interval [0, 8].

Inhoud $R = \pi\int_0^8 (x^{\frac{2}{3}})^2\ \mathrm{d}x = \pi\int_0^8 x^{\frac{4}{3}}\ \mathrm{d}x = \pi[\frac{3}{7}x^{2\frac{1}{3}}]_0^8 = 54\frac{6}{7}\pi$.

Dus is de inhoud bij wentelen om de x-as het grootst.

c Inhoud G – inhoud R = $64\pi - 54\frac{6}{7}\pi = 9\frac{1}{7}\pi$

d De afstand van (0, 0) tot (4, 8) is $4\sqrt{5} \approx 8{,}94$. De grafiek is tussen deze punten echter geen rechte lijn, maar een kromme en dus langer.

e $L = \int_0^4 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} = \int_0^4 \sqrt{1+(1\frac{1}{2}\sqrt{x})^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1+2\frac{1}{4}x}\ \mathrm{d}x =$

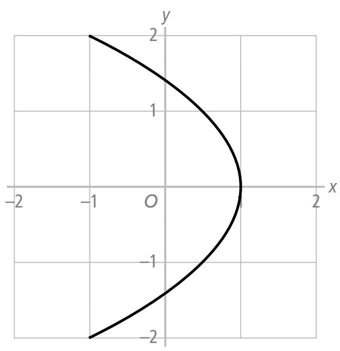
$[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}(1+2\frac{1}{4}x)^{1\frac{1}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1) \approx 9{,}07$.

f Inhoud $A = \pi\cdot 8^2\cdot 4 - \text{Inhoud}\,G = 256\pi - 64\pi = 192\pi$.

Inhoud $B = \pi\cdot 4^2\cdot 8 - \text{Inhoud}\,R = 128\pi - 54\frac{6}{7}\pi = 73\frac{1}{7}\pi$.

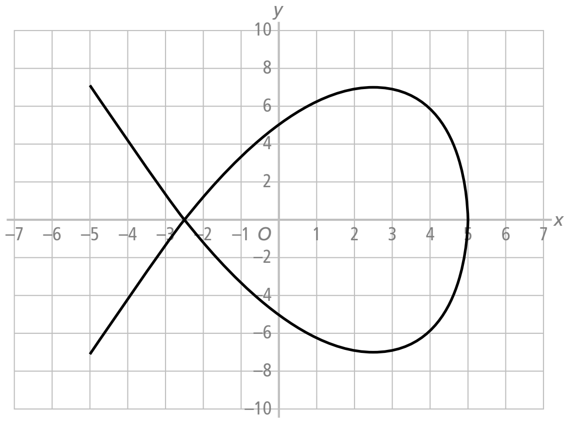
Het verschil is $118\frac{6}{7}\pi$.

64a



b $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \sqrt{(-2\sin 2t)^2+(2\cos t)^2}\ \mathrm{d}x \approx 5{,}92$

65a



De periode is 2π want $2 \times \pi = 3 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$.

b,c $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 21\cos 3t$ en $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -10\sin 2t$

Stel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 21\cos 3t = 0$.

$\cos 3t = 0$

$3t = \pm\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$t = \pm\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Dus t is $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{5}{6}\pi$.

$t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ voldoen niet want dan $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$.

$t = \frac{1}{6}\pi$ en $t = \frac{5}{6}\pi$ geven $(2\frac{1}{2}, 7)$.

$t = 1\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$ geven $(2\frac{1}{2}, -7)$.

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -10\sin 2t = 0$

$\sin 2t = 0$

$2t = 0 + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{2}k \cdot \pi$

Dus t is $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, 1\frac{1}{2}\pi$ en 2π .

Alleen $t = 0, t = \pi$ en $t = 2\pi$ voldoen.

Al deze waarden geven het punt (5, 0).

d Stel $y = 7\sin 3t = 0$ dan is $\sin 3t = 0$.

$3t = 0 + k \cdot \pi$

$t = \frac{1}{3}k \cdot \pi$

Voor $t = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 1\frac{2}{3}\pi$ gaat de kromme door $(-2\frac{1}{2}, 0)$ en voor $t = \pi$ door het punt (5, 0).

e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -21\cos 3t$ en $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 10\sin 2t$ hebben voor de waarden $t = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 1\frac{2}{3}\pi$ steeds uitkomst ± 21 en $\pm 5\sqrt{3}$, daar in de formule voor de snelheid beide gekwadrateerd worden maakt dat in de uitkomst dus niet uit.

f Voor de snelheid in $(-2\frac{1}{2}, 0)$ geldt in alle gevallen:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(10\sin 2t\right)^2 + \left(21\cos 3t\right)^2} =$$

$$\sqrt{(\pm 5\sqrt{3})^2 + (\pm 21)^2} = \sqrt{75 + 441} = \sqrt{516} \approx 22,72\,.$$

66a $x = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 = 0$ geeft $t = 0$ of $t = 6$.
De snijpunten met de y-as zijn: $(0, 0)$ en $(0, -12)$.
$y = t^2 - 8t = 0$ geeft $t = 0$ of $t = 8$.
De snijpunten met de x-as zijn $(0, 0)$ en $(64, 0)$.

b $\frac{dx}{dt} = 1\frac{1}{2}t^2 - 6t = 0$ geeft $t = 0$ of $t = 4$.
Alleen voor $t = 0$ geldt $\frac{dy}{dt} \neq 0$ en dus is er een verticale raaklijn in $(0, 0)$.

c $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = 0$ voor $t = 4$ dus is $(-16, -16)$ het keerpunt.

67 $\frac{dy}{dt} = 6\cos 3t = 0$ geeft $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Rightarrow t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$.
Dus moet $\frac{dx}{dt} = -2n\sin(nt) \neq 0$ zijn voor alle t met
$t = \frac{1}{6}\pi,\ t = \frac{1}{2}\pi,\ t = \frac{5}{6}\pi,\ t = 1\frac{1}{6}\pi,\ t = 1\frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$.
Dit laatste is het geval voor $n = 1$, 3 of 5. Voor $n = 2$ bijvoorbeeld is
$-2\sin 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = -2\sin\pi = 0$ en dus is er en keerpunt.
Dus alleen voor $n = 1$, 3 of 5 heeft de kromme geen keerpunten.

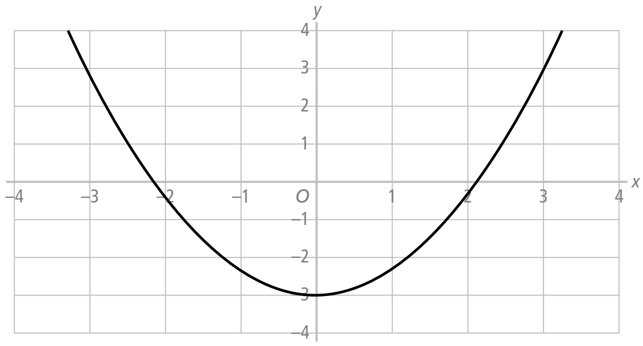
68a De periode is 2π want $3 \times \frac{2}{3}\pi = 4 \times \frac{1}{2}\pi = 2\pi$.

b $\frac{dx}{dt} = 15\cos 3t = 0$ voor $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Rightarrow t = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k \cdot \pi$, dus
$t = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{5}{6}\pi$.
$\frac{dy}{dt} = -8\sin 4t = 0$ voor $4t = k \cdot \pi \Rightarrow t = \frac{1}{4}k \cdot \pi$, dus
$t = 0,\ t = \frac{1}{4}\pi,\ t = \frac{1}{2}\pi,\ t = \frac{3}{4}\pi,\ t = \pi,\ t = 1\frac{1}{4}\pi,\ t = 1\frac{1}{2}\pi,\ t = 1\frac{3}{4}\pi$ en $t = 2\pi$.
Dus $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$.
De keerpunten zijn dan $(-5, 2)$ en $(5, 2)$.

c $x = 5\sin 3t = 0$ voor $t = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$.
$t = 0, \pi, 2\pi$ horen bij $(0, 2)$ en dan is $\frac{dy}{dx} = 0$.
$t = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 1\frac{2}{3}\pi$ horen bij $(0, -1)$.
Voor $t = \frac{1}{3}\pi$ en $\frac{2}{3}\pi$ is $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{15}\sqrt{3}$.
Voor $t = 1\frac{1}{3}\pi$ en $1\frac{2}{3}\pi$ is $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{15}\sqrt{3}$.

d De keerpunten treden op voor $t = \frac{1}{2}\pi : (-5, 2)$ en voor $t = 1\frac{1}{2}\pi : (5, 2)$
Dus is de helling in $(-5, 2)$ ongeveer $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1,57} = \frac{-8\sin(4 \cdot 1.57)}{15\cos(3 \cdot 1.57)} \approx -0,71$.
De helling in $(5, 2)$ is ongeveer $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=4,71} = \frac{-8\sin(4 \cdot 4,71)}{15\cos(3 \cdot 4,71)} \approx 0,71$.

69a



Periode 2π.

b $\frac{dx}{dt} = -3\sin t = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = \pi$ of $t = 2\pi$

$\frac{dy}{dt} = -6\sin 2t = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = \frac{1}{2}\pi,\ t = \pi,\ t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$

De keerpunten dus voor $t = 0$ en $t = \pi$ en dit zijn $(3, 3)$ en $(-3, 3)$.

c $y = 3\cos 2t = 3(2\cos^2 t - 1) = 6\cos^2 t - 3 =$
$\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \cos^2 t - 3 = \frac{2}{3} \cdot (3\cos t)^2 - 3 = \frac{2}{3}x^2 - 3 = \frac{2}{3}x^2 - 3$.

Dus de parabool $y = \frac{2}{3}x^2 - 3$

d $x = 3\cos t$, dus x ligt in tussen –3 en 3.

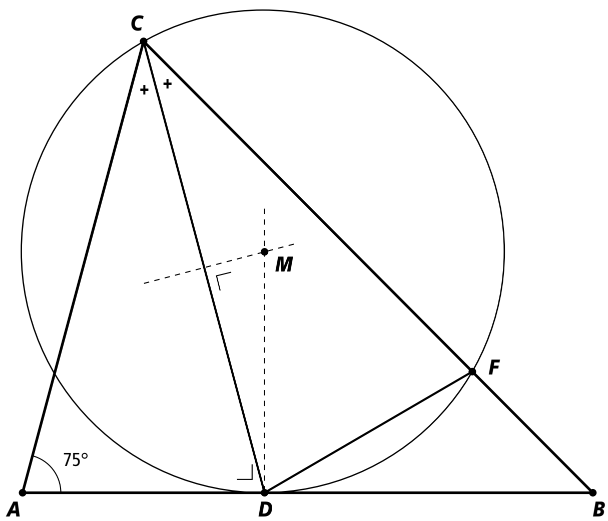
Dus $D_f = [-3, 3]$.

Meetkunde

1a *AH* staat loodrecht op zijde *BC*, *AB* staat loodrecht op zijde *CH* en *AC* staat loodrecht op zijde *BH*. Dus is *A* het snijpunt van de hoogtelijnen in ΔBCH.

b Van driehoek *ACH* want *BH* staat loodrecht op zijde *AC*, *AB* staat loodrecht op zijde *CH* en *BC* staat loodrecht op zijde *AH*.

2a



Teken eerst een driehoek *ABC* met $\angle A = 75^\circ$ en $\angle C = 60^\circ$. Daarna teken je de bissectrice *CD* van hoek *C*. Richt in *D* de loodlijn op *AB* op en snij deze met de middelloodlijn van *CD* om punt *M* te vinden. Teken de cirkel met middelpunt *M* door *C* en *D*.

b $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$

$\angle BDF = \angle CDF = \frac{1}{2}$ bg DF. Dus $\angle BDF = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$

c $\angle CDF = \angle B + \angle BDF = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

d Bekijk $\triangle ADC$ en $\triangle FDC$ er geldt:

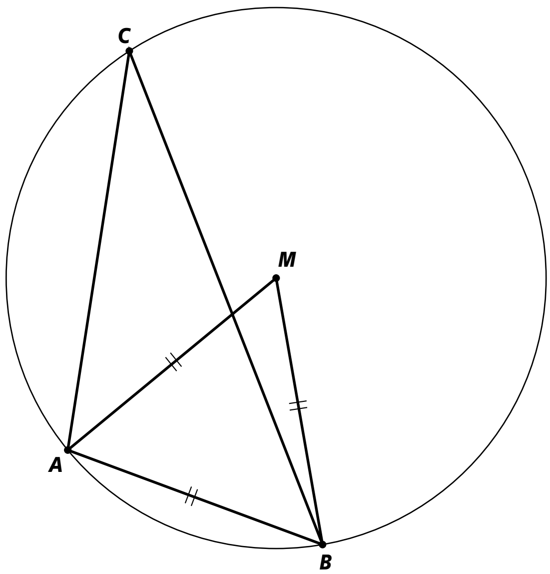
$$\left.\begin{array}{l} \angle ADC = \angle FDC \ (= 75^\circ) \\ |CD| = |CD| \\ \angle ACD = \angle FCD \ (CD \text{ is bissectrice}) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC \cong \triangle FDC \ (HZH) \Rightarrow |AD| = |DF|$$

3a Teken de hulplijn CE evenwijdig aan AD.
Dan is vierhoek $AECD$ een parallellogram en dus geldt $|AD| = |EC|$.
Omdat $ABCD$ gelijkbenig is, is ook $|AD| = |BC|$ en dus is driehoek EBC gelijkbenig.
Tenslotte geldt: $\angle ADC = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - \angle B = \angle BCD$.

b Teken de hulplijnen AN en BN.
Uit $\triangle AND \cong \triangle BNC$ (ZHZ) volgt $|AN| = |BN|$ en dan geldt ook $\triangle AMN \cong \triangle BMN$
(ZZZ) en dus $\left.\begin{array}{l} \angle AMN = \angle BMN \\ \angle AMN + \angle BMN = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle AMN = \angle BMN = 90^\circ$.

c $\angle BAD + \angle BCD = \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$

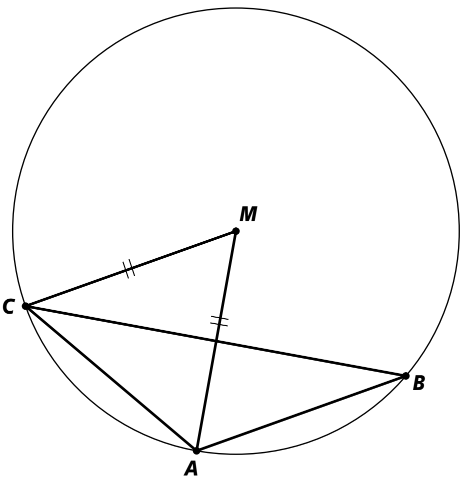
4a



Veronderstel dat zijde AB even lang is als de straal van de omgeschreven cirkel. Dan is driehoek ABM gelijkzijdig en heeft dus hoeken van 60° .
En er geldt $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot$ bg $AB = \frac{1}{2} \cdot \angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

b Als driehoek ABC één hoek van 30° heeft dan is er een zijde even lang als de straal van de omgeschreven cirkel.

c



Veronderstel $\angle B = 30^\circ$. Dan is $\angle AMC = 60^\circ$. Ook is driehoek AMC gelijkbenig.
Omdat $\angle MAC = \angle MCA = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$ is driehoek AMC gelijkzijdig. Dit heeft als gevolg dat AC even lang is als de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.

d Tegenover een zijde die even lang is als de straal van de omgeschreven cirkel ligt een hoek van 30°. Dus moeten er in deze situatie twee hoeken van 30° zijn.
De driehopek is dus gelijkbenig met een tophoek van $120°$.

e Dan heeft de driehoek als hoekensom 90° en dit is in tegenspraak met de stelling dat de hoekensom van een driehoek 180° is.

5a Omdat D op de middelloodlijn ligt van lijnstuk BC is driehoek BCD gelijkbenig en dus $\angle DBM = \angle DCB$ (1). Verder geldt:

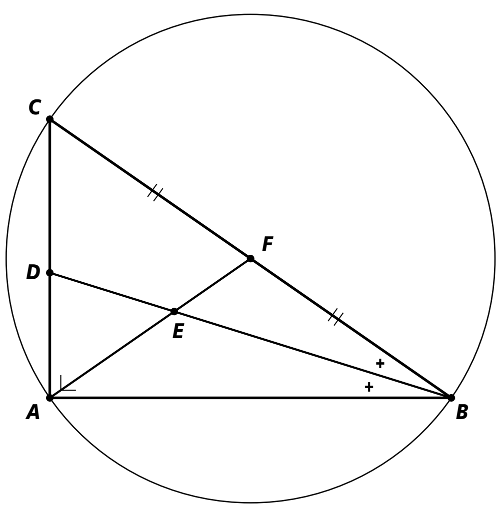
$$\left.\begin{array}{l} |EM| = |DM| \text{ (stralen)} \\ |DM| = |BM| \text{ (stralen)} \\ \angle EMD = \angle DMB \text{ (middelpuntshoeken op gelijke bogen)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle EMD \cong \triangle BMD\ (ZHZ) \Rightarrow$$

$\angle DEM = \angle DBM$ (2).

$$\left.\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle DEM = \angle DBM = \angle DCB.$$

b Uit $\angle DEM = \angle DCM$ volgt (meetkundige plaats van de constante hoek) dat D, E, C en M op één cirkel liggen en dus is $DECM$ een koordenvierhoek.

6a



b Teken de cirkel met middellijn BC. Dan ligt punt A op deze cirkel want $\angle BAC = 90^\circ$.
En dus geldt $|AF| = |CF| = |BF| \Rightarrow |BC| = 2 \cdot |AF|$.

c Stel $\angle ABD = \beta$, dan $\angle ABC = 2\beta$ en $\angle EDC = \angle BDC = 90^\circ + \beta$ (buitenhoek van $\triangle ABD$) en
Omdat $|AF| = |BF|$ is $\angle BAF = \angle ABF = 2\beta$ en is $\angle AFC = 2\beta + 2\beta = 4\beta$ (buitenhoek van driehoek ABF). Als $CDEF$ een koordenvierhoek is moet gelden:
$\angle EDC + \angle EFC = 180^\circ$.
Dus $90^\circ + \beta + 4\beta = 180^\circ \Rightarrow 5\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 18^\circ$ en dus is $\angle B = 2\beta = 36^\circ$.

7 Teken hulplijn BC. Dan is $\angle ACB = 90^\circ$ want AB is een middellijn. Omdat punt C het midden is van ED en $\angle ACB = 90^\circ$ is BC de middelloodlijn van lijnstuk ED en dus is $\angle BDE = \angle BED$ (1). Verder geldt $\angle AEF = \angle DEB$ (overstaande hoeken) (2).
Omdat AF en BD beide een hoek van 90° maken met AB geldt $AF // BD$.
Dus $\angle FAE = \angle BDE$ (Z - hoeken) (3).
Uit (1), (2) en (3) volgt $\angle FAE = \angle FEA$ en dus $|AF| = |FE|$.

8 Teken hulplijn AQ. In cirkel c_2 is $\angle T = \frac{1}{2}\text{bg}AB$ constant en in cirkel c_1 is $\angle AQB = \frac{1}{2}\text{bg}AB$ constant. Dan is $\angle QAP = \angle T + \angle AQB$ ook constant en dus heeft PQ een constante lengte.

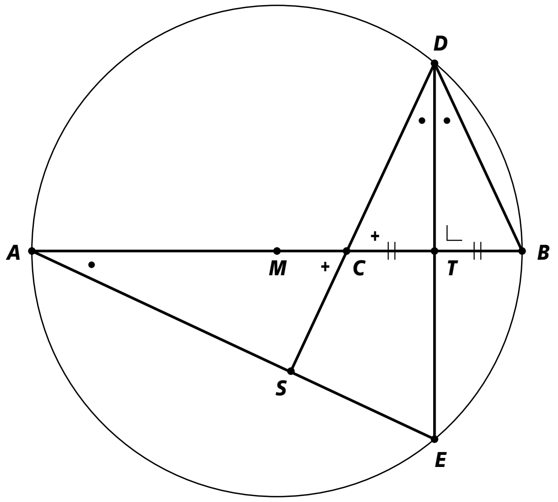
9a Teken de hulplijnen MS en MQ. Dan is $\angle MQS = 90^\circ$ want QS is de raaklijn in Q aan de cirkel. Omdat $\angle MPS = \angle MQS = 90^\circ$ kun je de stelling van de constante hoek toepassen en liggen P, Q, M en S op één cirkel en is $MSQP$ een koordenvierhoek.

b $AMSP$ is een parallellogram als de overstaande zijden evenwijdig zijn.
Gegeven is dat de lijn PS evenwijdig AM is.
$MSQP$ is een koordenvierhoek dus $\angle MSP = \angle MQP$. (1)
Omdat $\triangle AMQ$ gelijkbenig is (AM en MQ zijn even lang) is $\angle MAQ = \angle MQA$. (2)
Uit het evenwijdig zijn van PS en AB volgt $\angle MSP = \angle BMS$ (Z hoeken). (3)
Uit (1), (2) en (3) volgt $\angle A = \angle BMS$ en dus $AP // MS$ (F - hoeken).
Dus geldt voor $AMSP$ dat de overstaande zijden evenwijdig zijn en dus is $AMSP$ een parallellogram.

c Teken hulplijn SB. Omdat $AP // MS$ is $\angle PQM = \angle SMQ$ zodat geldt $\angle SMQ = \angle SMB$.

$$\left.\begin{array}{l} |MS| = |MS| \\ |MQ| = |MB| \text{ (stralen)} \\ \angle SMQ = \angle SMB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MSQ \cong \Delta MSB\ (ZHZ) \Rightarrow |SB| = |SQ|.$$

10a



b Stel de lijnen CD en AE snijden elkaar in punt S en T is het midden van lijnstuk CB.
Dan geldt $\angle CDT = \angle BDT$ want D op middelloodlijn van BC.
Dan $\angle BAE = \angle BDE$ want beide zijn omtrekshoeken op boog BE
$\Rightarrow \angle CAS = \angle BDT$.
Verder is $\angle ACS = \angle BCD$ (overstaande hoeken).
Hieruit volgt $\angle ASC = 180 - \angle CAS = 180^\circ - \angle BCD - \angle BDT = \angle T = 90^\circ$.
Dus $DC \perp AE$.

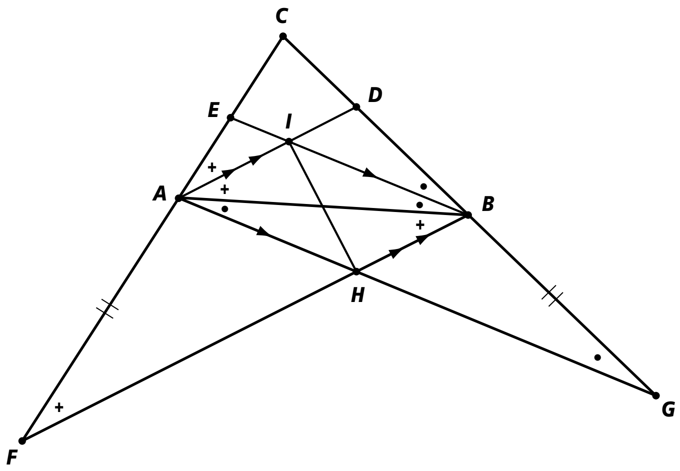
11a Teken hulplijn CN.

$$\left.\begin{array}{l} |CN| = |CN| \\ \angle E = \angle F \ (= 90^\circ) \\ \angle ECN = \angle FCN \text{ (op gelijke bogen)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ECN \cong \triangle FCN \ (ZHH) \Rightarrow |NE| = |NF|$$

b Teken NB en NB.

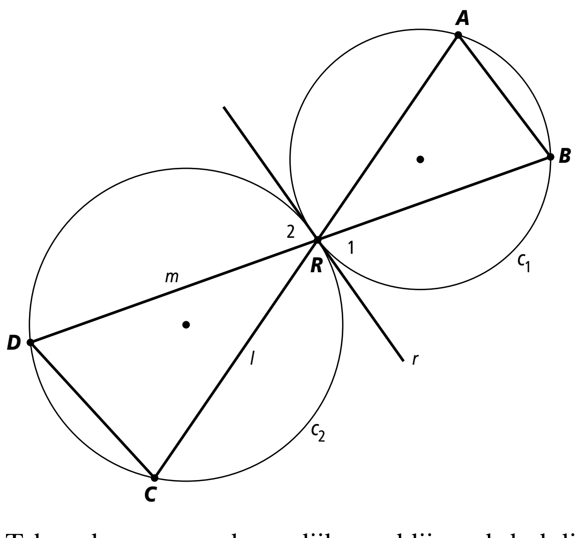
$$\left.\begin{array}{l} |NE| = |NF| \\ \angle AEN = \angle BFN \ (= 90^\circ) \\ AN| = |NB| \text{ (koorden van gelijke bogen)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AEN \cong \triangle BFN \Rightarrow |AE| = |BF|$$

12

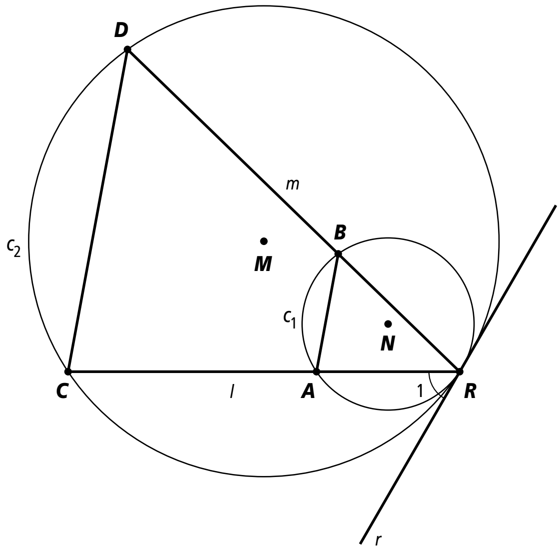


Terugredeneren: Als $AHBI$ een parallellogram is dan delen de diagonalen elkaar middendoor. Omdat $|AB| = |BG|$ is $\angle BAG = \angle BGA$.
Verder is $\angle ABC = \angle BAG + \angle BGA = 2\angle BAG \Rightarrow \angle ABI = \angle BAG$.
Dus zijn $\angle BAG$ en $\angle ABI$ Z-hoeken met als gevolg $AH//BI$.
$\triangle ABF$ gelijkbenig $\Rightarrow \angle AFB = \angle ABF$.
$\angle CAB = \angle AFB + \angle ABF = 2 \cdot \angle ABF \Rightarrow \angle DAB = \angle ABF \Rightarrow AI \,//\, BH$
In vierhoek $AHBI$ zijn de overstaande zijden evenwijdig en dus is $AHBI$ een parallellogram waarin AB en HI elkaar middendoor delen.

13

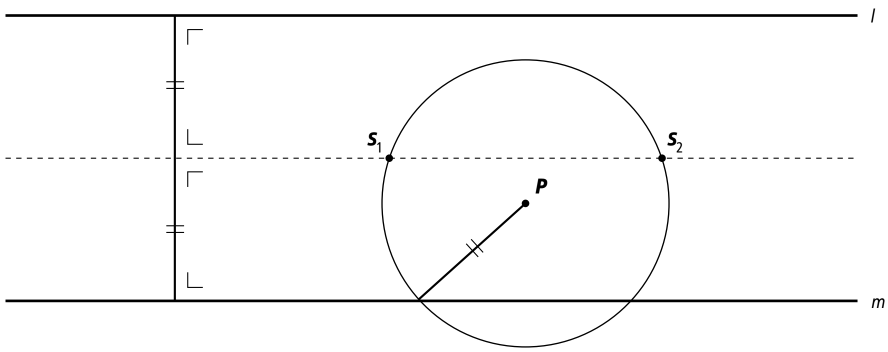


Teken de gemeenschappelijke raaklijn r als hulplijn.
Dan geldt $\angle A = \angle R_1$ want beide staan in c_1 op boog RB. (1)
Ook geldt $\angle R_1 = \angle R_2$ (overstaande hoeken). (2)
$\angle C = \angle R_2$ want beide staan in c_2 op boog DR. (3)
Uit (1), (2) en (3) volgt $\angle A = \angle C$ en dus (Z-hoeken) zijn AB en CD evenwijdig.



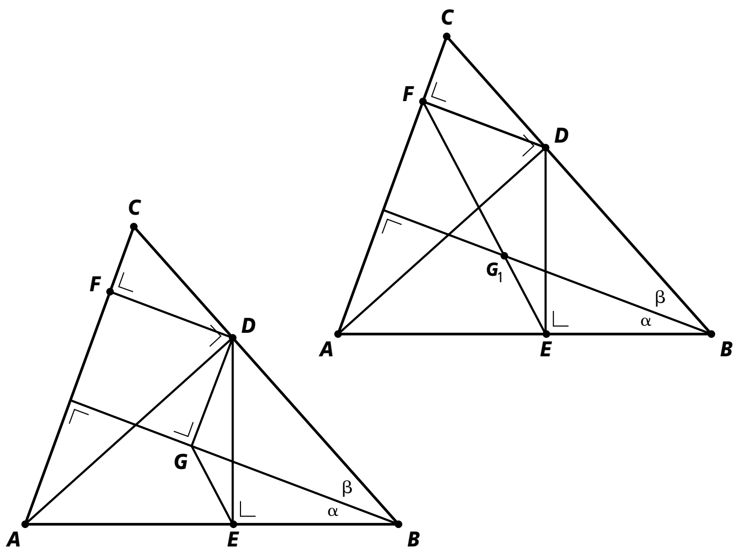
Teken de gemeenschappelijke raaklijn r als hulplijn.
Dan geldt $\angle R_1 = \angle CDR$ want beide staan in c_2 op boog CR.
Dan geldt $\angle R_1 = \angle ABR$ want beide staan in c_1 op boog AR.
Dus $\angle CDR = \angle ABR$ en dus (F-hoeken) zijn AB en CD evenwijdig.

14



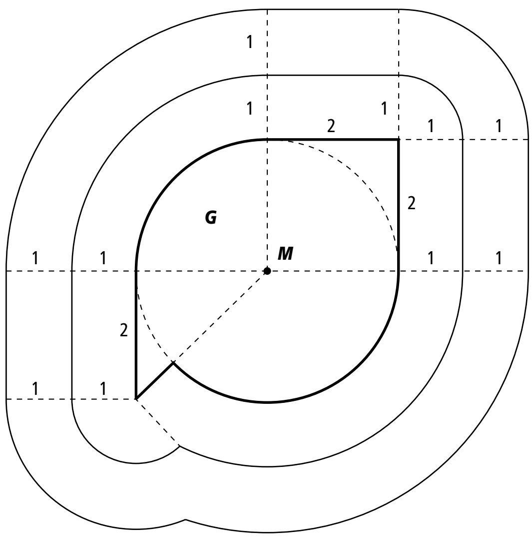
Teken de middenparallel van l en m. Teken de cirkel met middelpunt P en straal r met $r = \frac{1}{2}d(l,\ m)$. Voor de snijpunten S_1 en S_2 van de cirkel met de middenparallel geldt dan:
$\mathrm{d}(S_1,\ P) = \mathrm{d}(S_1,\ l) = \mathrm{d}(S_1,\ m) = r$.

15

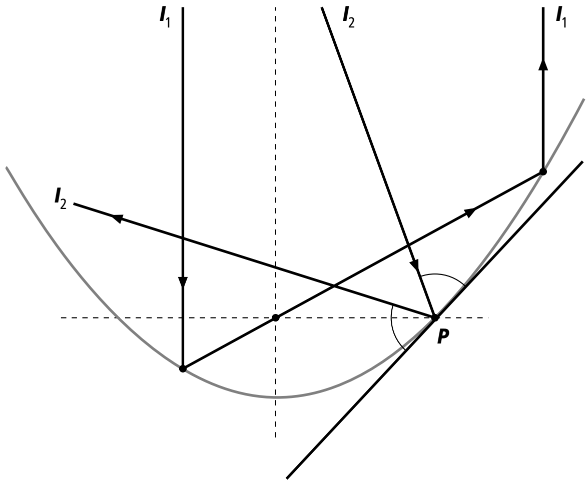


In figuur 1 is G het voetpunt van D op de hoogtelijn vanuit B.
In figuur 2 is G_1 het snijpunt van EF met de hoogtelijn vanuit B.
In figuur 1 is $EBDG$ een koordenvierhoek want $\angle BED = \angle BGD = 90^\circ$ (constante hoek) en dus $\angle GED = \angle GBD = \beta$. (1)
In figuur 2 is $\angle C = 90^\circ - \beta$ dus is ook $\angle CAD = \beta$.
Verder is vierhoek $AEDF$ een koordenvierhoek want $\angle AED + \angle AFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
Dus is $\angle FED = \angle FAD = \angle CAD = \beta$. (2)
Uit (1) en (2) volgt $\angle FED = \angle GED = \beta$ en daaruit volgt dat de lijnen EG en EF samenvallen en dus liggen E, F en G op één lijn.

16a,b

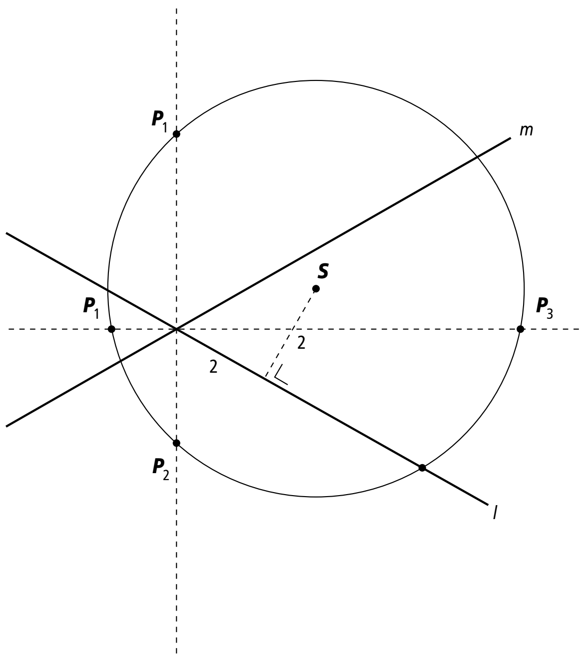


17a De verdere baan van deze lichtstraal gaat door het brandpunt F en verlaat na de tweede weerkaatsing de spiegel evenwijdig aan de as van de parabool.



b Lichtstraal l_2 wordt zodanig teruggekaatst dat de hoek van de invallende straal met de raaklijn gelijk is aan de hoek van de teruggekaatste straal met de raaklijn. Dit proces herhaalt zich bij een volgend contact met de spiegel.

18a



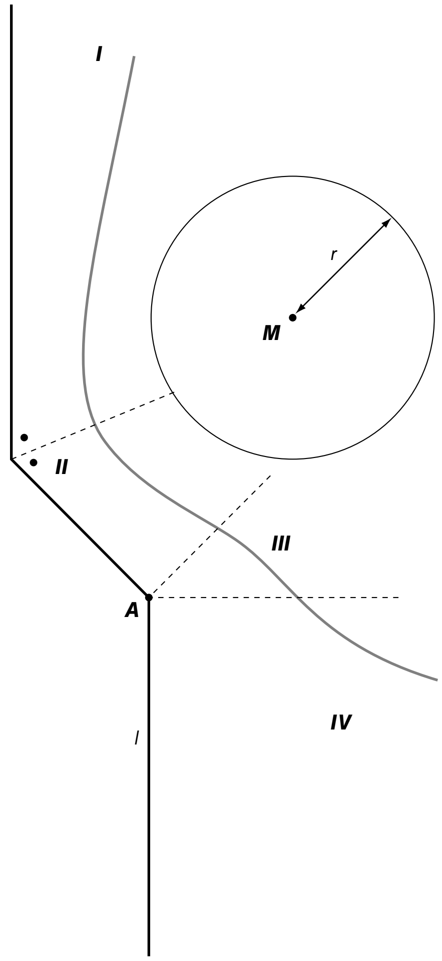
d$(S, l) = 2$ dus moet d$(P, S)=4$.
Dus moeten de punten P op afstand 4 van S liggen en op een bissectrice van $\angle(l, m)$.

b Je moet zorgen dat de cirkel om S slechts één van de bissectrices snijdt.

c De punten X moeten op de middelparallel van r en s liggen en op de cirkel met middelpunt Q en straal 2.

d De cirkel om Q moet dan een straal hebben zodat de middenparallel niet gesneden wordt.
Als Q tussen r en s ligt dan is dit het geval als de afstand van Q tot r kleiner is dan $\frac{2}{3}$. Want de straal van de cirkel is dan kleiner dan $\frac{4}{3}$ en de afstand van Q tot de middenparallel is dan groter dan $\frac{4}{3}$. Als Q aan de andere kant van lijn r ligt met afstand x tot lijn r dan is de straal van de cirkel om Q $2x$. Er is geen snijpunt met de middenparallel als $2x < x+2$ dus moet $x < 2$ zijn.

19a,c



b In de sectoren 1, 2 en 4 is de conflictlijn steeds een deel van een parabool want het is de conflictlijn van een lijn en een cirkel. In sector 3 is het een stukje hyperbool want het is de conflictlijn van punt A en de cirkel.

20a Wordt in tegengestelde richting langs l_1 weerkaatst.
b Na vier keer verlaat de lichtstraal deze spiegel.

21a Als T het punt is halverwege de top en de richtlijn van de oorspronkelijke parabool , dan beschrijft punt M een parabool met top T.

b Bewijs:
Definieer een x-y assenstelsel met de oorsprong in de top van de oorspronkelijke parabool en de x-as evenwijdig aan de richtlijn.
Stel $F(0,p)$, de richtlijn r is dan de lijn $y=-p$.
$A(x,y)$ ligt op de parabool dus geldt $FA=\mathrm{d}(A,r)$.

$AF=\sqrt{x^2+(p-y)^2}$ en $\mathrm{d}(A,r)=y+p$, dus

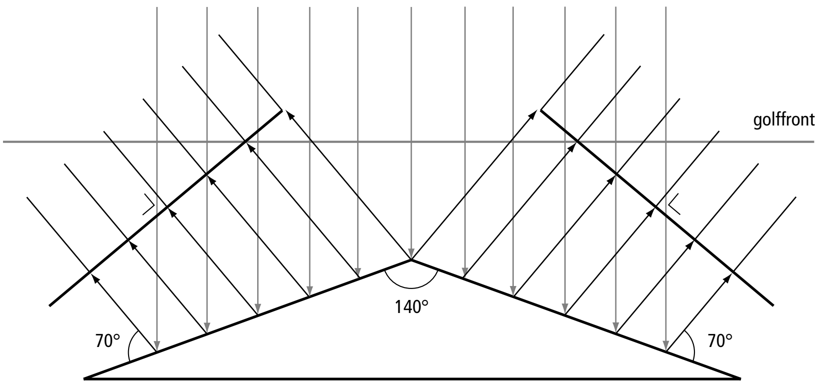
$x^2+(p-y)^2=(y+p)^2 \Rightarrow x^2+p^2-2py+y^2=y^2+2py+p^2 \Rightarrow$

$x^2=4py \Rightarrow y=\dfrac{x^2}{4p}$. Dus $A\left(x,\dfrac{x^2}{4p}\right)$.

M ligt halverwege A en de lijn r, dus $M\left(x,\dfrac{\frac{x^2}{4p}+(-p)}{2}\right)=\left(x,\dfrac{x^2}{8p}-\tfrac{1}{2}p\right)$.

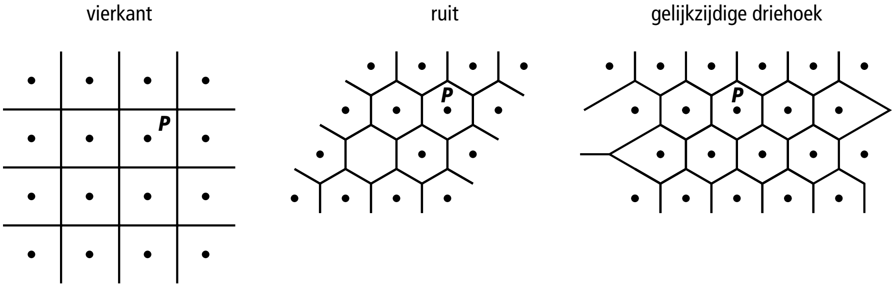
M ligt dus op $y=\dfrac{x^2}{8p}-\tfrac{1}{2}p$. Dit is een parabool met top $\left(0,-\tfrac{1}{2}p\right)$.

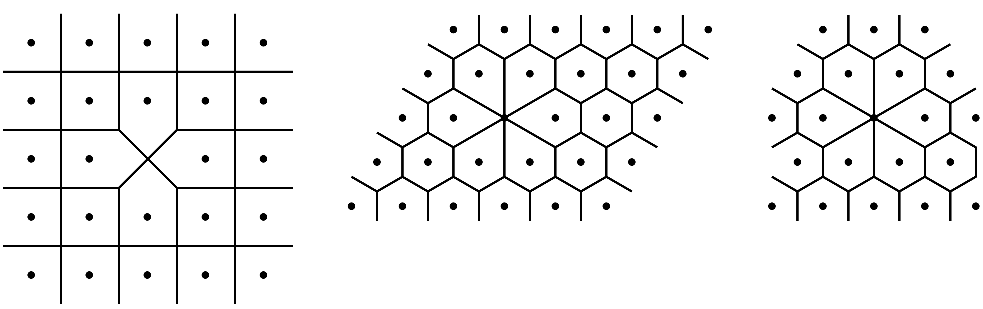
22



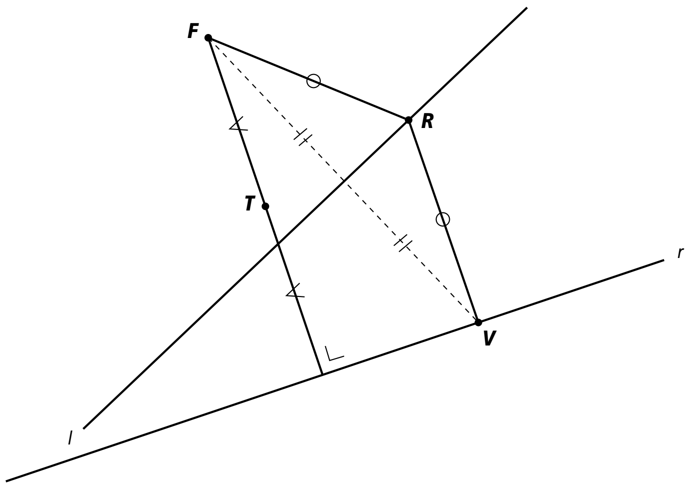
Het golffront na terugkaatsing ontstaat door de linkerhelft van de basis te spiegelen in de linkerzijde en de rechterhelft van de basis te spiegelen in de rechterzijde en vervolgens beide fronten evenwijdig te verschuiven. De front maken na terugkaatsing een hoek van $100°$ met elkaar.

23a,b



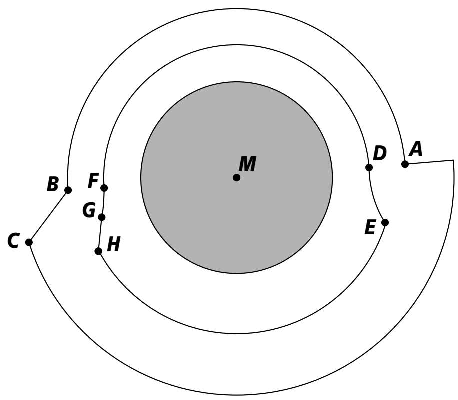


24



Spiegel punt F in de gegeven raaklijn en noem het beeldpunt V.
Dan is V het voetpunt van R op de richtlijn r.
Teken de lijn r door V loodrecht RV, r is de richtlijn
Laat uit F de loodlijn neer op r en halveer het loodlijnstuk om de top T te construeren.

25a,c



b De conflictlijn bestaat uit twee cirkelbogen, tussen F en D en tussen E en H. Een deel van een parabool, tussen G en H, de conflictlijn tussen het binnengebied en zijde CB. En twee stukjes hyperbool, tussen D en E en tussen F en G, de conflictlijn tussen het binnengebied en punt A en tussen het binnengebied en punt B.