Extra oefening hoofdstuk 1

1a $\frac{dR}{dv} = 1 \cdot e^{-\frac{v}{70}} + v \cdot e^{-\frac{v}{70}} \cdot \left(-\frac{1}{70}\right) = e^{-\frac{v}{70}}\left(1 - \frac{v}{70}\right) = 0$ als $e^{-\frac{v}{70}}\left(1 - \frac{v}{70}\right) = 0$ dus als $1 - \frac{v}{70} = 0$

waaruit volgt dat $v = 70$ km/uur.

b $v = 70$ geeft $R = 70 \cdot e^{-1} \approx 25{,}75$ mg/min.

2a $f'(x) = e^{-2x} \cdot -2 = -2e^{-2x}$

b $f'(x) = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot e^{3x} \cdot 3 = x \cdot e^{3x}(2 + 3x)$

c $f'(x) = \dfrac{2x \cdot 2^x - x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^x}{\left(2^x\right)^2} = \dfrac{x \cdot 2^x(2 - x\ln 2)}{2^{2x}} = \dfrac{x \cdot (2 - x\ln 2)}{2^x}$

d $f'(x) = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 5\ln\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

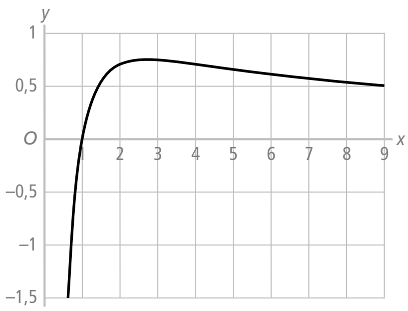
e $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{x - 1} \cdot 1 = \dfrac{1}{(x-1) \cdot \ln 2}$

f $f'(x) = \dfrac{1}{5 - 3x} \cdot -3 = \dfrac{-3}{5 - 3x}$

g $f(x) = 2 \cdot (\ln x)^{-1}$ dus $f'(x) = -2(\ln x)^{-2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{x\ln^2 x}$

h $f'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

3a $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$



b $\dfrac{2\ln x}{x} > 0$ voor $2\ln x > 0$ dus $x > 1$

c De y-as is de verticale asymptoot en de x-as de horizontale asymptoot.

d $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \cdot x - 2\ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2} = 0$ als $\ln x = 1$ dus voor $x = e$

Het maximum is $f(e) = \dfrac{2}{e} \approx 0{,}74$.

4a $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

b $F(x) = \dfrac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + C$

c $f(x) = \frac{1}{2}e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{1+x}$ dus $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{1+x} + C$

d $F(x) = \dfrac{2^{3x}}{3\ln 2} + C$

e $F(x) = -5\ln(-x - 1) + C$

f $f(x) = 2e^{-x} - 3x^{-2} + \dfrac{4}{x}$ dus $F(x) = -2e^{-x} + 3x^{-1} + 4\ln|x| + C = \dfrac{-2}{e^x} + \dfrac{3}{x} + 4\ln|x| + C$

5a $F(x) = -2\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}x}$ dus $A(2) = \int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}\cdot 2} - -2\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}\cdot -3} = -2\mathrm{e}^{-2} + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}027$

b $A(p) = \int_{-3}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}p} - -2\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}\cdot -3} = -2\left(\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}p} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)$

c $A(p) = 2$ als $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}p} = 1$

$\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}p} = \sqrt{\mathrm{e}} - 1$

$\frac{1}{2}p + 1 = -\ln\left(-1 + \sqrt{\mathrm{e}}\right)$

$p = -2 - 2\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}} - 1\right) \approx -1{,}13$

6a $\mathrm{e}^{2x} = 5$

$2x = \ln 5$

$x = \frac{1}{2}\ln 5$

b $\ln 2x = 5$

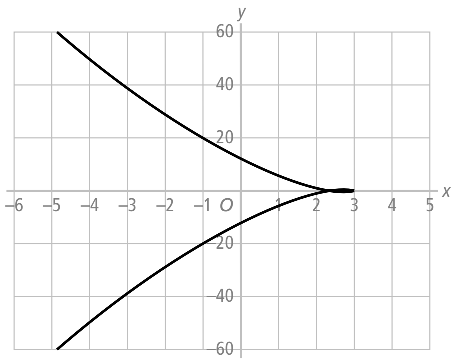
$2x = \mathrm{e}^5$

$x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^5$

Extra oefening hoofdstuk 2

1a

t	–3	–2	–1	0	1	2	3
x	–6	–1	2	3	2	–1	–6
y	75	20	1	0	–1	–20	–75

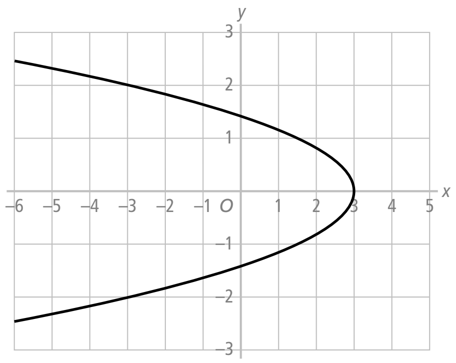


b $x = 3 - t^2 = 0$ dus $t = -\sqrt{3}$ of $t = \sqrt{3}$

$y\left(-\sqrt{3}\right) = 2 \cdot -\sqrt{3} - 3 \cdot -3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ en $y\left(\sqrt{3}\right) = 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot 3\sqrt{3} = -7\sqrt{3}$

De snijpunten met de y-as zijn $\left(0, 7\sqrt{3}\right)$ en $\left(0, -7\sqrt{3}\right)$.

2a



Keerpunten: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -6\sin 2t = 0$ voor $2t = k\pi$ geeft $t = \frac{1}{2}k\pi$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\cos t = 0$ voor $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$.

Binnen het domein: $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

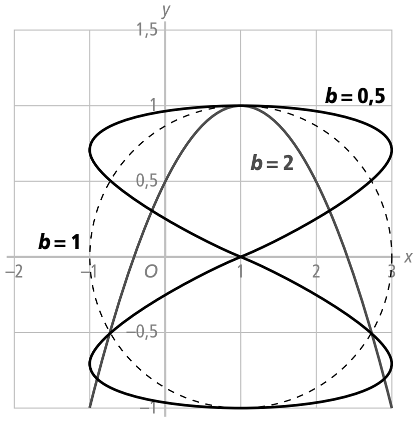
Dit geeft de keerpunten $(-3, 2)$ en $(-3, -2)$.

b $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2\cos\frac{1}{6}\pi}{-6\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{-6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$

c $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ geeft $t = \frac{1}{2}k\pi$ dus $t = 0$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

Dit geeft de punten: $(3, 0)$, $(-3, 2)$ en $(-3, -2)$.

3a



De kromme heeft keerpunten als b even is.

b Wanneer $b = 4$ wordt de kromme:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\sin t \\ y = \cos 4t \end{cases}$$

$y = \cos 4t = 0$ geeft $4t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ dus $t = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4}k\pi$ met domein $[0, 2\pi]$ geeft dat

$t = \frac{1}{8}\pi$ geeft $(1,76;0)$, $t = \frac{3}{8}\pi$ geeft $(2,85;0)$, $t = \frac{5}{8}\pi$ geeft $(2,85;0)$

$t = \frac{7}{8}\pi$ geeft $(1,76;0)$, $t = \frac{9}{8}\pi$ geeft $(0,23;0)$, $t = \frac{11}{8}\pi$ geeft $(-0,85;0)$

$t = \frac{13}{8}\pi$ geeft $(-0,85;0)$, $t = \frac{15}{8}\pi$ geeft $(0,23;0)$.

Snijpunten met de x-as zijn dus $(-0,85;0)$, $(0,23;0)$, $(1,76;0)$ en $(2,85;0)$.

4a Horizontale snelheid: $\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$; verticale snelheid: $\frac{dy}{dt} = \cos t - 2\sin 2t$.

b $v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ dus $v(1) = \sqrt{(2\cos 2)^2 + (\cos 1 - 2\sin 2)^2} \approx \sqrt{2,33} \approx 1,53$

c Het punt $(0,1)$ krijg je voor $t = 0$ en voor $t = \pi$.

De helling van de raaklijnen: $t = 0$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 0 - 2\sin 0}{2\cos 0} = \frac{1}{2}$ en $t = \pi$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\pi - 2\sin 2\pi}{2\cos 2\pi} = -\frac{1}{2}$.

5a x heeft periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ en y heeft periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
De kromme heeft dan periode 2π want $3 \cdot \frac{2}{3}\pi = 2 \cdot \pi = 2\pi$.

b $-1 \le \sin 3t \le 1$ en $-2 \le -2\sin 3t \le 2$ dus $1 \le 3 - 2\sin 3t \le 5$ en
$-1 \le \cos 2t \le 1$ en $-2 \le 2\cos 2t \le 2$ dus $1 \le 3 + 2\cos 2t \le 5$.
De x-coördinaat en de y-coördinaat zijn dus beide positief.

c Je krijgt het punt $(3,2)$ wanneer $3 - 2\sin 3t = 3 \Rightarrow \sin 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}k\pi$ en wanneer
$3 + 2\cos 2t = 2 \Rightarrow \cos 2t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{3}\pi + k\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi + k\pi$ dus voor
$t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$.

d Je krijgt het keerpunt $(1,1)$ voor $t = 1\frac{1}{2}\pi \approx 4,71$ dus de helling in het keerpunt is dan

ongeveer $\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin(2 \cdot 4,71)}{-6\cos(3 \cdot 4,71)} \approx 0,44$

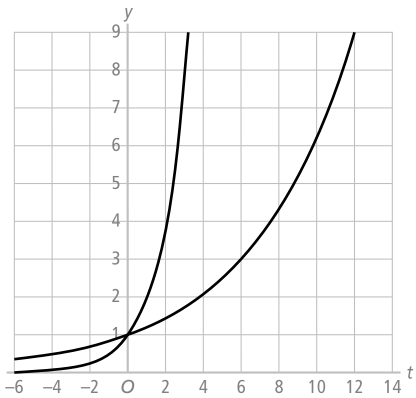
Oefentoets hoofdstuk 1 en 2

1a H is de verdubbelingstijd dus $1,2^H = 2$ geeft $H = {}^{1,2}\log 2 \approx 3,8$ dus $H \approx 3,8$ uur

b $10\,000 = 5000 \cdot 2^{u \cdot 3,8}$ geeft $2^{u \cdot 3,8} = 2$ dus $3,8u = 1$ en $u \approx 0,26$

c Dan moeten de twee formules aan elkaar gelijk zijn.
$1,2^t = 2^{uH}$
Maak van groeifactor 1,2 ook 2 en je krijgt:
$\left(2^{{}^2\log 1,2}\right)^t = 2^{uH} \Rightarrow 2^{t \cdot {}^2\log 1,2} = 2^{uH} \Rightarrow t = \dfrac{uH}{{}^2\log 1,2}$.

d



Wanneer je de grafiek van $y = 2^t$ ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{{}^2\log 1,2} \approx 3,8$ vermenigvuldigt krijg je de grafiek van $y = 1,2^t$.

e Deze factor is gelijk aan H.

2a $f'(x) = \dfrac{1}{xe^x} \cdot \left(1 \cdot e^x + xe^x\right) = \dfrac{e^x(1+x)}{xe^x} = \dfrac{1+x}{x}$

b $f(x) = \sqrt{e^{3x}} = \left(e^{3x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{1,5x}$ dus $f'(x) = 1,5e^{1,5x}$

c $f'(x) = \dfrac{-\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{-e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{e^{2x}} = \dfrac{-\sin x - \cos x}{e^x}$

d $f'(x) = 5 \cdot \ln^4(2x) \cdot \dfrac{1}{2x} \cdot 2 = \dfrac{10}{2x}\ln^4(2x) = \dfrac{5\ln^4(2x)}{x}$

3a Het domein van f_1 is $x > 0$.

b Ja, $\ln x$ bestaat alleen als $x > 0$.

c $f_a'(x) = ax^{a-1} \cdot \ln x + \dfrac{x^a}{x} = ax^{a-1} \cdot \ln x + x^{a-1} = x^{a-1}\left(a \cdot \ln x + 1\right)$

d $x^{a-1}\left(a \cdot \ln x + 1\right) = 0$ geeft $a \cdot \ln x + 1 = 0$ dus $x = e^{-\frac{1}{a}}$

De extreme waarde is $f\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^a \ln e^{-\frac{1}{a}} = e^{-1} \cdot -\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{ae}$.

Er is een minimum als $a > 0$ en een maximum als $a < 0$.

e $-\dfrac{1}{ae} = -1$ dus $a = \dfrac{1}{e}$

f De top is $\left(e^{-\frac{1}{a}}, -\dfrac{1}{ae}\right)$ invullen geeft $-\dfrac{1}{ae} = \dfrac{\ln e^{-\frac{1}{a}}}{e}$ dus $-\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a}$ en dat is waar voor elke $a \neq 0$.

4a Er is een horizontale asymptoot $y = p$ want $e^{-qt} \to 0$ als $t \to \infty$.

b Voor de relaxatietijd τ geldt $0,63 \times p = p\left(1 - e^{-q\tau}\right)$ dus $0,63 = 1 - e^{-q\tau}$ en $e^{-q\tau} = 0,37$.

Dan geldt $\ln e^{-q\tau} = \ln 0,37$ dus $-q\tau = \ln 0,37$ met $\tau = \dfrac{\ln 0,37}{-q}$.

c $\dfrac{dv}{dt} = qpe^{-qt}$ dan is voor $t = 0$: $\dfrac{dv}{dt} = qpe^{-q\cdot 0} = qp$ en voor $t = \tau$:

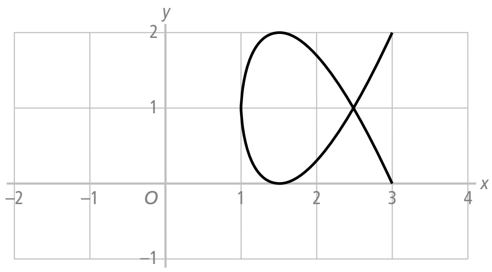
$\dfrac{dv}{dt} = qpe^{-q\cdot\tau} = qpe^{-q\cdot\frac{\ln 0,37}{-q}} = qpe^{\ln 0,37} = 0,37qp$

d Als de afgeleide weg s een functie is van t, dan is de afgeleide van s de snelheid. Zo is de primitieve van de functie $v(t)$ weer de afgelegde weg.

Een primitieve van $v(t)$ is $V(t) = p \cdot t + \frac{p}{q} e^{-qt}$.
Voor $s(t_1)$ geldt dan dat

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} v(t)\,dt = \left[V(t)\right]_{t_1} = pt_1 + \frac{p}{q}e^{-qt_1} - \left(p \cdot 0 + \frac{p}{q}e^{-q\cdot 0}\right) = pt_1 + \frac{p}{q}e^{-qt_1} = pt_1 + \tfrac{p}{q}\left(e^{-qt_1} - 1\right).$$

5a



$y = 1 + \sin 3t = 0$ als $\sin 3t = -1$ waaruit volgt dat $3t = 1\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ dus $t = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}k\pi$
$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft $(3,0)$ en $t = 1\frac{1}{6}\pi$ en $t = 1\frac{5}{6}\pi$ geven $\left(1\frac{1}{2},0\right)$

b 2π want $2 \cdot \pi = 3 \cdot \frac{2}{3}\pi = 2\pi$

c Voor de keerpunten moet gelden: $2\sin 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}k\pi$ en
$3\cos 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi$.
Je krijgt de keerpunten dus voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ > De keerpunten zijn $(3,0)$ en $(3,2)$.

d $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\cos(3\cdot 2)}{2\sin(2\cdot 2)} \approx -1,90$

e $v(t) = \sqrt{(2\sin 2t)^2 + (3\cos 3t)^2}$ dus $v(5) = \sqrt{(2\sin 10)^2 + (3\cos 15)^2} \approx 2,53$

6a $x = 0$ is de verticale asymptoot en $y = -1$ is de horizontale asymptoot.

b $x = 4t - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t(8 - t) = 0$ voor $t = 0$ of $t = 8$
Voor $t = 0$ bestaat y niet en $t = 8$ geeft $y = -\frac{1}{2}$ dus het snijpunt met de y-as is $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

$y = \dfrac{4}{t} - 1 = 0$ dus $t = 4$

Voor $t = 4$ geldt $x = 8$ dus het snijpunt met de x-as is $(8,0)$.

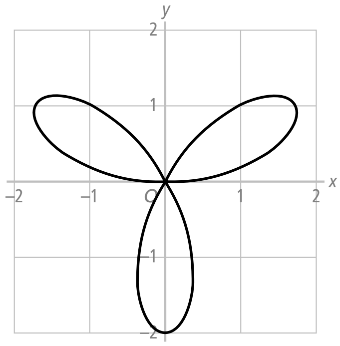
c $\dfrac{dx}{dt} = 4 - t = 0$ voor $t = 4$ dus er is een verticale raaklijn in $(8,0)$.

$\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{4}{t^2} = 0$ heeft geen oplossingen dus de kromme heeft nergens een horizontale raaklijn.

7a $x(0)=\sin 0+\sin 0=0+0=0$ en $y(0)=\cos 0-\cos 0=1-1=0$
Voor $t=0$ gaat de kromme altijd door de oorsprong.

b $x=2\sin t$ en $y=0$. De x-waarde loopt van –2 tot 2 en $y=0$ dus het is een lijnstuk op de x-as met beginpunt (–2, 0) en eindpunt (2, 0).

c



d De kromme heeft verticale raaklijnen als de grafiek van f uiterste waarden heeft.
Met de grafische rekenmachine vind je als uiterste waarden van f: 1,76 voor $t\approx 0,94$; 0,37 voor $t\approx 3,71$; =0,37 voor $t\approx 2,57$ en –1,76 voor $t\approx 5,35$.
Het invullen van de t-waarden in g levert de bijbehorende y-waarden op.
Je krijgt dan $(1,76;0,89)$, $(0,37;-1,26)$, $(-0,37;-1,26)$ en $(-1,76;0,89)$.
De kromme heeft horizontale raaklijnen als de grafiek van g uiterste waarden heeft.
Deze zijn: 0 voor $t=0$; 1,13 voor $t\approx 1,32$ en $t\approx 4,97$ en –2 voor $t\approx 3,14$.
De kromme heeft een horizontale raaklijn in (0, 0), $(1,45;1,13)$, $(-1,45;1,13)$ en $(0,-2)$.

e Gegeven is dat a geheel positief is.
Als a is oneven geldt $x(\pi)=y(\pi)=0$ dus door $(0,0)$.
Als a is even geldt $x(\pi)=0$ en $y(\pi)=-2$ dus door $(0,-2)$.
De kromme gaat dus door de oorsprong voor a oneven.

8a Voor $t=\frac{1}{4}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt}=\cos\frac{1}{4}\pi-\sin\frac{1}{4}\pi=0$ en $\frac{dy}{dt}=2\cdot\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{1}{4}\pi\right)=0$.

b $t=\frac{1}{4}\pi\approx 0,785$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(2\cdot 0,785)}{\cos 0,785-\sin 0,785}\approx 1,41$$

c $\frac{dy}{dt}=\cos 2t=0$ voor $t=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$

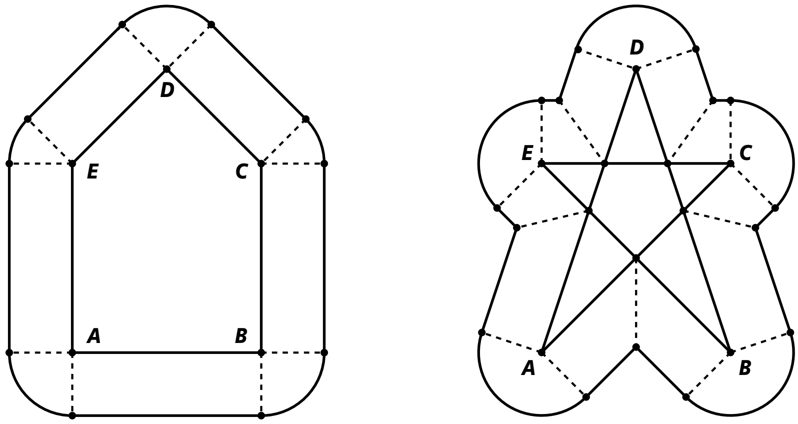
$\frac{dx}{dt}=0$ voor $t=\frac{1}{4}\pi$ of $t=1\frac{1}{4}\pi$

Voor het andere keerpunt geldt dus $t=1\frac{1}{4}\pi$ en dit is $\left(-\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)\approx(-1,41;\ 0,5)$.

d $\frac{dy}{dt}=0$ en $\frac{dx}{dt}\neq 0$ voor $t=\frac{3}{4}\pi$ en $t=1\frac{3}{4}\pi$.
De kromme heeft een horizontale raaklijn in $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

Extra oefening bij hoofdstuk 3

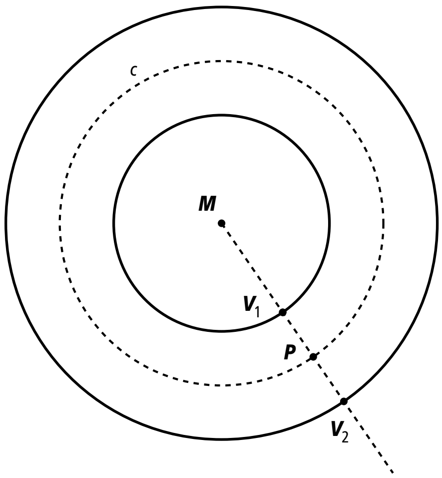
1a



b De cirkelbogen samen vormen een volledige cirkel met straal 1. De gezamenlijke lengte van die bogen is dus 2 . De lijnstukken van de iso-1-lijn komen overeen met de lijnstukken waaruit vijfhoek $ABCDE$ bestaat. Deze lijnstukken beslaan dus samen lengte van $3+3+1\frac{1}{2}\sqrt{2}+1\frac{1}{2}\sqrt{2}+3=9+3\sqrt{2}$ en de lengte van de iso-1-lijn is $9+3\sqrt{2}+2 \quad \approx 19{,}52$.

c Voor gebied G geldt dat de iso-a-lijnen voor grote a steeds rondere vormen aannemen en zelfs op den duur goed te benaderen zijn met een cirkel. Voor gebied H geldt dat de inhammen voor grotere a al snel verdwijnen (bij de iso-1-lijn is dat laatste nog niet helemaal het geval) en dat de iso-a-lijnen steeds rondere vormen aannemen. Ook voor H geldt dat de iso-a-lijnen op den duur goed zijn te benaderen met een cirkel.

2a



De conflictlijn is cirkel c met middelpunt M en een straal die het gemiddelde is van de stralen van de concentrische cirkels in de opgave.

b Het is duidelijk dat de conflictlijn niet (geheel of gedeeltelijk) binnen de binnenste cirkel ligt en ook niet (geheel of gedeeltelijk) buiten de buitenste cirkel. Een punt P tussen de twee cirkels heeft voetpunten V_1 en V_2 , die allebei op de halfrechte van M naar P liggen. Wil P op de conflictlijn liggen, dan moet P midden tussen V_1 en V_2 liggen en dus is de conflictlijn een cirkel met hetzelfde middelpunt M en met een straal die het gemiddelde is van de stralen van de cirkels uit de opgave .

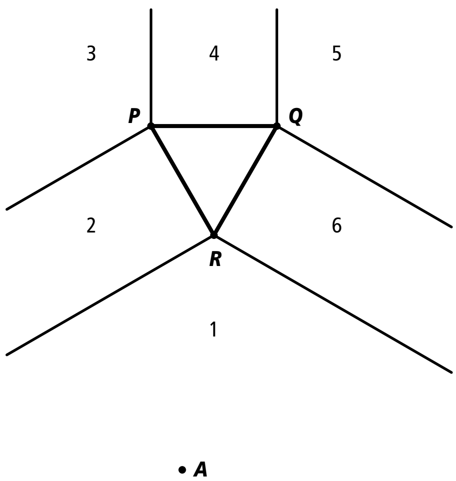
3 Omdat vierhoek $ABDE$ koordenvierhoek is, geldt $\angle ABD + \angle AED = 180^0$.
Verder is $\angle AED + \angle DEC = 180^0$ en dus $\angle ABD = \angle ABC = \angle DEC$. Dus:

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC = \angle DEC \\ \angle ACB = \angle DCE\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \simeq \triangle DEC \Rightarrow$$

$$\frac{|BC|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|DE|} \Rightarrow \frac{12}{|EC|} = \frac{6}{3} \Rightarrow 6|EC| = 36 \Rightarrow |EC| = 6 \Rightarrow |AE| = 14 - 6 = 8 \text{ en}$$

$$\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|DE|} \Rightarrow \frac{14}{|DC|} = \frac{6}{3} \Rightarrow 6|DC| = 42 \Rightarrow |DC| = 7 \Rightarrow |BD| = 12 - 7 = 5$$

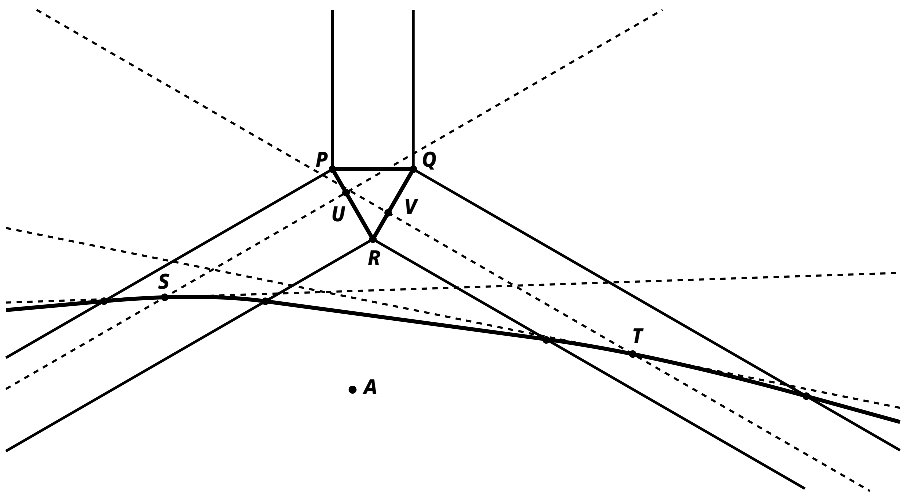
4a



Hierboven zijn sectoren 1 t/m 6 aangegeven.

b In sector 1, 3 en 5 komt de conflictlijn overeen met delen van de middelloodlijnen van respectievelijk AR, AP en AQ. In sector 2 en 6 komt de conflictlijn overeen met delen van parabolen met brandpunt A en richtlijn PR respectievelijk RQ. De conflictlijn ligt in het geheel niet in sector 4: Daar ligt geen enkel punt dat even ver van A als van het driehoekig gebied PQR ligt.

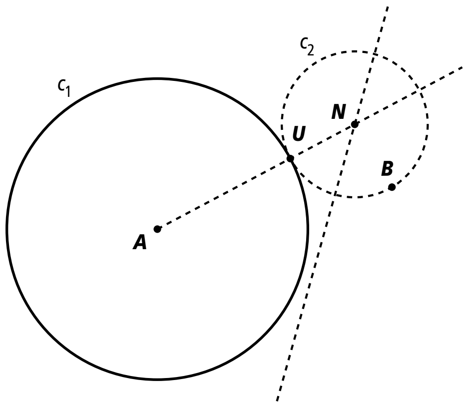
c



Je vindt bij voorbeeld punt S in sector 2 door een voetpunt U op PR te kiezen en de loodlijn in U op PR met de middelloodlijn van AU te snijden.

Extra oefening bij hoofdstuk 4

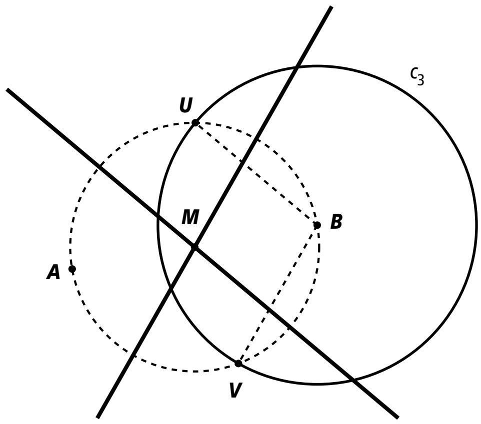
1a



De meetkundige plaats van middelpunten N is de verzameling van punten waarvoor geldt $\mathrm{d}(N, c_1) = \mathrm{d}(N, B)$, de conflictlijn tussen c_1 en B buiten c_1 en is volgens de definitie een hyperbooltak.

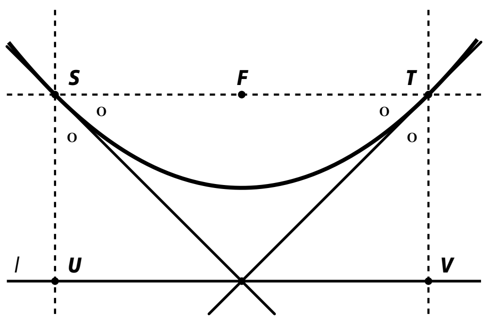
b c_3 heeft middelpunt B en een straal die gelijk is aan die van c_1. Verder is $X = A$.

c Neem de richtcirkel van een van de takken, bij voorbeeld c_3.



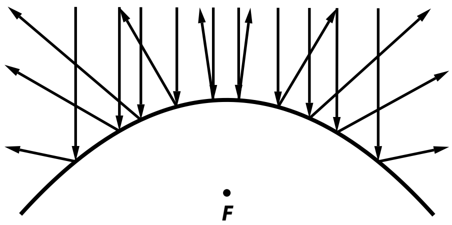
De constructie gaat als volgt: Teken een cirkel door A en B met middelpunt M dat precies midden tussen A en B in ligt. Snijd deze cirkel met de gekozen richtcirkel (c_3). Dit levert de punten U en V op. Trek nu de lijnen door punt M die respectievelijk evenwijdig aan BU en AV zijn en je hebt de gevraagde asymptoten.

2



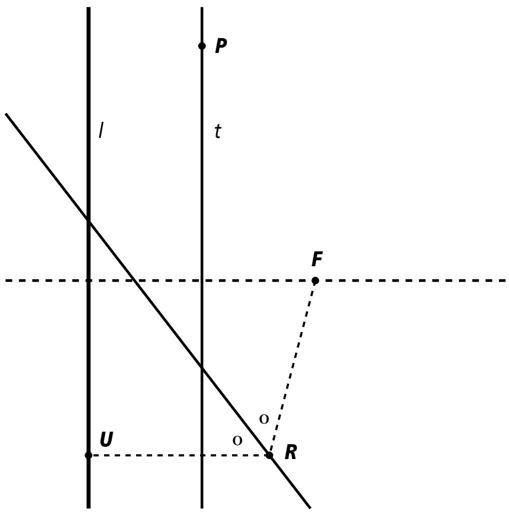
De lijn door F evenwijdig aan richtlijn l snijdt de parabool in S en T. Omdat de raaklijn in S $\angle FSU$ (90^0) middendoor deelt, voldoet punt S aan de voorwaarde. Voor punt T geldt iets dergelijks.

3



De gereflecteerde lichtstralen lijken hier uit het brandpunt te komen.

4a

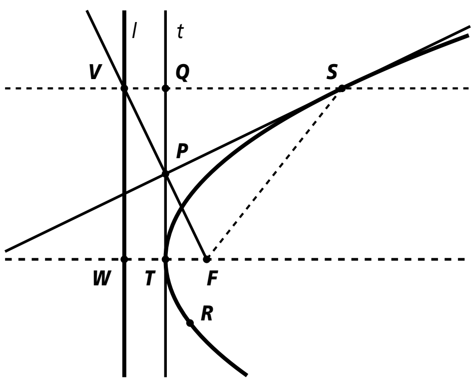


Laat een loodlijn neer van R op l. snijpunt met l is U. De bissectrice van $\angle FRU$ is de raaklijn in R aan de parabool.

b Deze raaklijn staat loodrecht op PF.

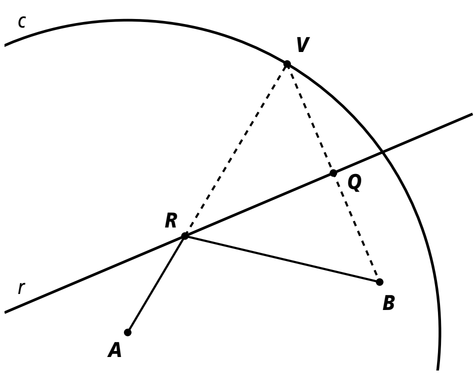
c V is het snijpunt van l en PF.

d



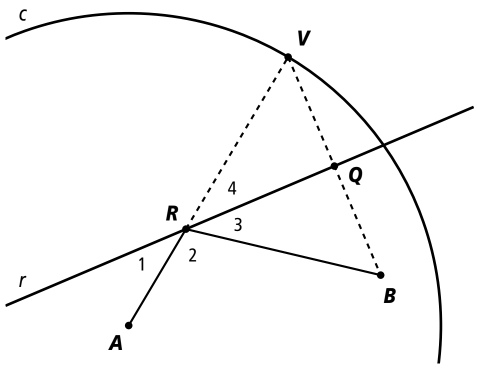
S is het snijpunt van de lijn door V loodrecht op l en de lijn door P loodrecht FV.

5a



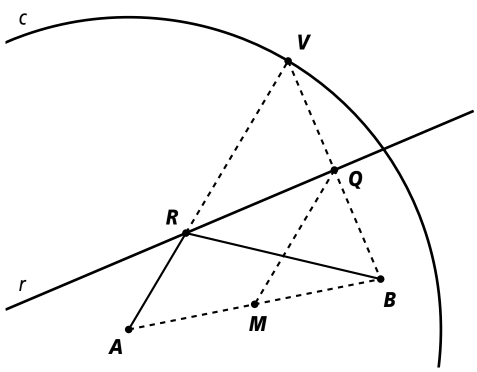
b De richtcirkel c met middelpunt A heeft als straal $|AR|+|RB|=|AR|+|RV|=|AV|$ en dus ligt V erop.

c



Laat $\angle R_1=\alpha$, dan is $\angle R_4=\alpha$ (overstaande hoek) en ook $\angle R_3=\alpha$ (hoek van inval is hoek van terugkaatsing), dus $\angle ARB=\angle R_2=180^0-2\alpha$. Omdat $|RV|=|RB|$, is $\triangle BVR$ gelijkbenig en geldt: $\angle RVB=\angle RBV$. Omdat $\angle V+\angle RBQ+2\alpha=180^0$ is $\angle RBQ=\frac{1}{2}(180^0-2\alpha)=\frac{1}{2}\angle ARB$.

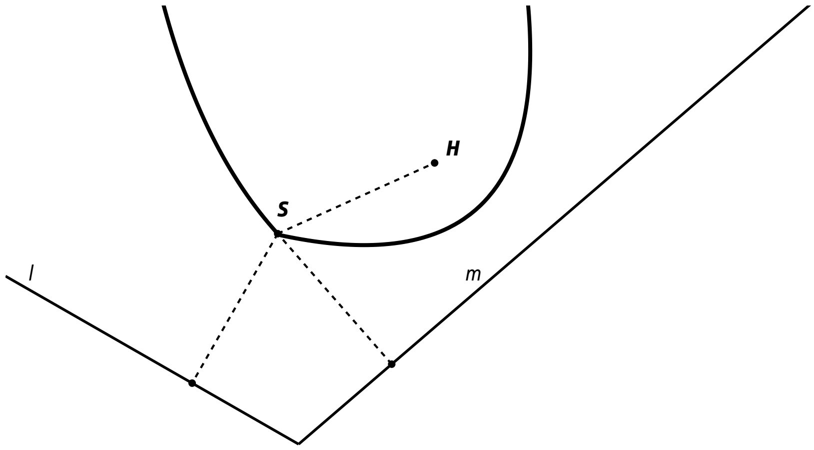
d



De cirkel met als middellijn de lange as van de ellips heeft een middelpunt dat precies tussen A en B ligt en een straal gelijk aan $\frac{1}{2}|AV|$. Bewezen moet dus worden dat $|QM|=\frac{1}{2}|AV|$. Volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken BMQ en BAV (zhz: $\angle B$ gemeenschappelijk, $|BA|=\frac{1}{2}|BM|$, $|BQ|=\frac{1}{2}|BV|$).

Oefentoets bij hoofdstuk 3 en 4

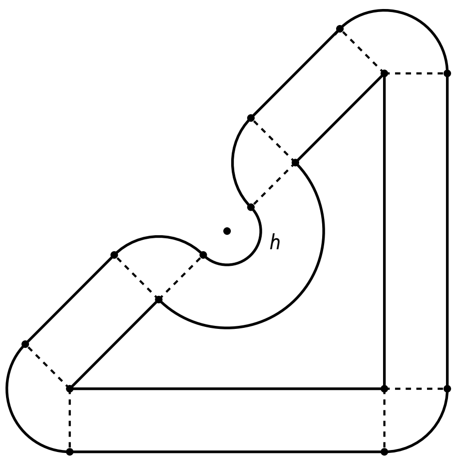
1a



b De conflictlijn bestaat uit twee gedeelten van parabolen, de parabool met brandpunt H en richtlijn l en de parabool met brandpunt H en richtlijn m.

c Het linkergedeelte bestaat uit punten P met $\mathrm{d}(P, l) = \mathrm{d}(P, H)$,
het rechtergedeelte bestaat uit punten Q met $\mathrm{d}(Q, m) = \mathrm{d}(Q, H)$,
Punt S ligt op beide paraboolgedeelten en dus is $\mathrm{d}(S, l) = \mathrm{d}(S, H)$ en
$\mathrm{d}(S, m) = \mathrm{d}(S, H) \Rightarrow \mathrm{d}(S, l) = \mathrm{d}(S, m)$ en S ligt op de bissectrice van l en m .

2a



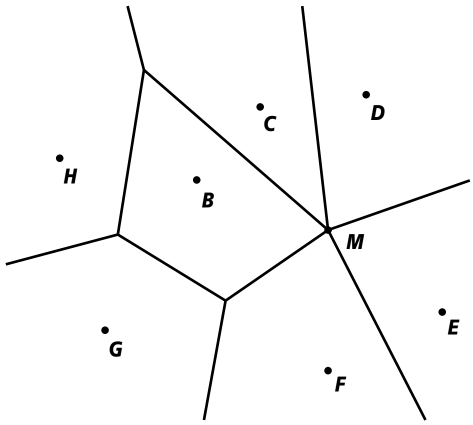
De iso-1-lijn bestaat uit 10 stukken.

b De iso-lijn bestaat voor het eerst uit 9 stukken als de halve cirkel in de inham (vergelijk de halve cirkel h in de iso-1-lijn) gereduceerd is tot een punt. En dus is c gelijk aan de straal van de in gebied G uitgespaarde halve cirkel. Dit is dus

$\frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2} - 2 \cdot 2) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2$.

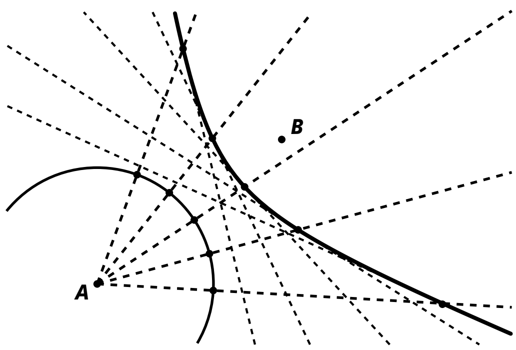
3a Er is een vijflandenpunt omdat de middelloodlijnen van BC, CD, DE, EF en FB door één punt (M) gaan. Dit is een rechtstreeks gevolg van het feit dat de centra B, C, D, E en F op een cirkel liggen.

b



c Als je bijvoorbeeld centrum F verplaatst naar een plek op de cirkel die door de centra B, H en G gaat, dan ontstaan er in het Voronoi-diagram 2 vierlandenpunten.

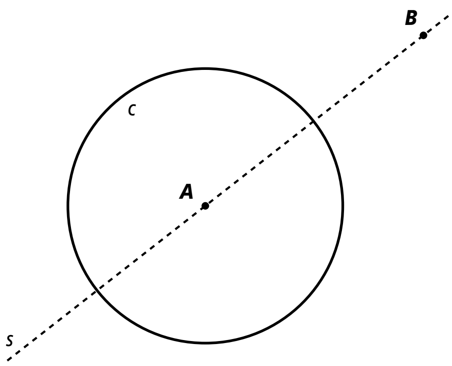
4a



De constructie gaat als volgt: Kies een punt V op de cirkel. Teken een halfrechte vanuit A door V en snijd deze halfrechte met de middelloodlijn van VB. Het snijpunt ligt dan op de conflictlijn.

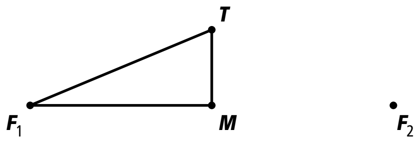
b Dit volgt direct uit de constructiemethode. P ligt op de conflictlijn, dus $d(P,c) = d(P,B) \Rightarrow |PA| - |AV| = |PB| \Rightarrow |PA| - |PB| = |AV| = 2$

c



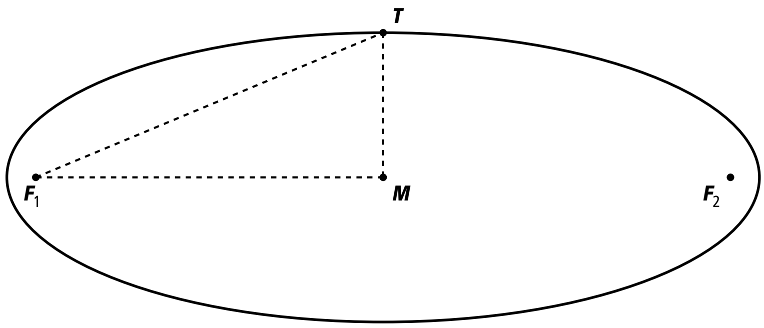
De gebieden c en B zijn symmetrisch ten opzichte van de lijn AB, de conflictlijn dus ook.

5a



$|F_1M| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ en $|MT| = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$. Met de stelling van Pythagoras krijg je $|F_1T| = 6\frac{1}{2}$ en de lange as is dus $|F_1T| + |F_2T| = 2 \cdot 6\frac{1}{2} = 13$ (alles in cm).

b

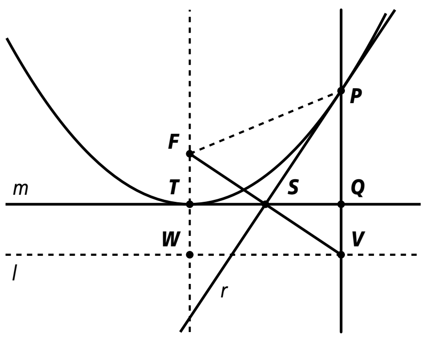


6a Een cirkel c_2 raakt aan de binnenkant van cirkel c_1. M ligt dan op één lijn met A en het raakpunt R dat tevens voetpunt is van M *op* c_1. Er geldt

$d(M, c_1) = |MR| = \text{straal } c_2 = |MB|$.

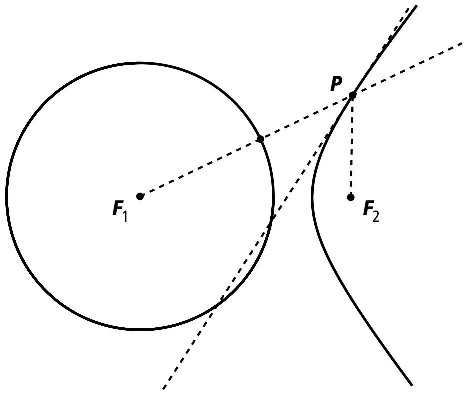
b Er geldt $\mathrm{d}(M, c_1) = |MB| = \mathrm{d}(M, B)$. Omdat $\mathrm{d}(M, c_1) = \text{straal } c_1 - \mathrm{d}(M, A)$ geldt dus voor zo'n middelpunt M dat $\mathrm{d}(M, A) + \mathrm{d}(M, B) = \text{straal } c_1$ (constante), hetgeen precies aansluit bij de definitie van een ellips met brandpunten A en B.

7

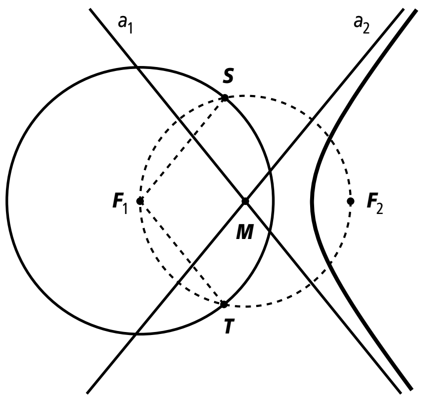


Teken eerst een aantal hulplijntjes: de symmetrielijn door F en T, de richtlijn l op afstand $|FT|$ van m, het lijnstuk FP. Verleng verder het lijnstuk PQ en bepaal snijpunt V. Er geldt $\triangle FPS \cong \triangle VPS$ (ZHZ): $\angle FPS = \angle VPS$ (eigenschap raaklijn), $PS = PS$ en $FP = VP$ (P ligt op de conflictlijn). Hieruit volgt $FS = VS$. Vervolgens is $\triangle QSV \cong \triangle TSF$ (HZH): $\angle QSV = \angle TSF$ (overstaande hoeken), $FS = VS$, $\angle QVS = \angle TFS$ (Z – hoeken). En dus is $TS = QS$ en deelt de raaklijn in P het lijnstuk TQ middendoor.

8a



b



Bepaal het midden M tussen F_1 en F_2, teken de cirkel met middelpunt M door F_1 en F_2. Bepaal de snijpunten met cirkel $c(F_1, 3)$ en noem deze S en T. Teken nu lijnen door M evenwijdig aan F_1S en F_1T en je hebt de asymptoten a_1 en a_2.

c De asymptoten staan loodrecht op elkaar als $F_1S \perp F_1T$. Om te zorgen dat $\angle SF_1T = 90^0$ moet bijvoorbeeld $\triangle F_1MS$ een 45-90-45 graden driehoek zijn en dus moet dan $|F_1M| = |F_1S| \cdot \sin 45^0 = 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $|F_1F_2| = 3\sqrt{2}$.

Extra oefening bij hoofdstuk 5

1a $\cos 2t = 1 + \sin t$
$1 - 2\sin^2 t = 1 + \sin t$
$0 = 2\sin^2 t + \sin t$
$\sin t\left(2\sin t + 1\right) = 0$
$\sin t = 0$ of $\sin t = -\frac{1}{2}$
$t = k\pi$ of $t = 1\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ of $t = 1\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

b $\cos 2t = \cos t - 1$
$2\cos^2 t - 1 = \cos t - 1$
$2\cos^2 t - \cos t = 0$
$\cos t\left(2\cos t - 1\right) = 0$
$\cos t = 0$ of $\cos t = \frac{1}{2}$
$t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ of $t = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ of $t = 1\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

c $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \Rightarrow 2\cos^2 t = \cos 2t + 1 \Rightarrow 4\cos^2 t = 2\cos 2t + 2$
$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} 4\cos^2 t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left(2\cos 2t + 2\right)\mathrm{d}t = \left[\sin 2t + 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \left(1 + \tfrac{1}{2}\pi\right) - \left(0 + 0\right) = 1 + \tfrac{1}{2}\pi$$

2a Keerpunten: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow -3\sin 3t = 0 \Rightarrow \sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = k\pi \Rightarrow t = \frac{1}{3}k\pi$ en
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow -\sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi$. Binnen het domein: $t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$.
Dit geeft de punten $\left(1,1\right)$ en $\left(-1,-1\right)$.

b $\cos 3t = \cos\left(2t + t\right) = \cos 2t \cdot \cos t - \sin 2t \cdot \sin t = \left(2\cos^2 t - 1\right)\left(\cos t\right) - 2\sin t \cdot \cos t \cdot \sin t$
$= 2\cos^3 t - \cos t - 2\sin^2 t\cos t = 2\cos^3 t - \cos t - 2\left(1 - \cos^2 t\right)\left(\cos t\right)$
$= 2\cos^3 t - \cos t - 2\cos t + 2\cos^3 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$

c $x = 4y^3 - 3y$

d Wanneer je een horizontale raaklijn wilt bepalen doe je dat met $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. Een verticale raaklijn vind je door $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 12y^2 - 3 = 0$ geeft $y^2 = \frac{1}{4}$ dus $y = \frac{1}{2}$ of $y = -\frac{1}{2}$.
$y = \frac{1}{2}$ geeft $x = 4 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1$ en $y = -\frac{1}{2}$ geeft $x = 4 \cdot -\frac{1}{8} - 3 \cdot -\frac{1}{2} = 1$

De punten met verticale raaklijnen zijn dus $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ en $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

3a $y = \sin 2t$ dus
$y^2 = \sin^2 2t = \left(2\sin t \cdot \cos t\right)^2 = 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t = 4\left(1 - \cos^2 t\right) \cdot \cos^2 t$
$= 4\cos^2 t - 4\cos^4 t = 4x^2 - 4x^4$

b Voor het domein moet gelden: $4x^2 - 4x^4 \geq 0$ ofwel $4x^2\left(1 - x^2\right) \geq 0$ dus $D_f = \left[-1,1\right]$.

c De oppervlakte van het linker gebied is: $2 \cdot \int_{-1}^{0} \sqrt{4x^2 - 4x^4}\, \mathrm{d}x \approx 2 \cdot 0{,}667 \approx 1{,}33$.
Het rechter gebied heeft dezelfde oppervlakte.

4a $\frac{dx}{dt} = 5\cos t - 5\sin 5t$ voor $t = \frac{1}{12}\pi$ geeft dit $\frac{dx}{dt} = 5\cos\frac{1}{12}\pi - 5\sin\frac{5}{12}\pi = 0$
(dit volgt uit de symmetrie van $\sin x$ en $\cos x$ in de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$).
$\frac{dy}{dt} = -5\sin t + 5\cos 5t$ voor $t = \frac{1}{12}\pi$ geeft dit $\frac{dy}{dt} = -5\sin\frac{1}{12}\pi + 5\cos\frac{5}{12}\pi = 0$
Dus voor $t = \frac{1}{12}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} = 0$ en dat betekent dat er een keerpunt is.

b De baansnelheid is:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(5\cos t - 5\sin 5t)^2 + (-5\sin t + 5\cos 5t)^2}$$

$$= \sqrt{25\cos^2 t - 50\cos t \cdot \sin 5t + 25\sin^2 5t + 25\sin^2 t - 50\sin t \cdot \cos 5t + 25\cos^2 5t}$$

$$= \sqrt{25\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) + 25\left(\sin^2 5t + \cos^2 5t\right) - 50\left(\cos t \cdot \sin 5t + \sin t \cdot \cos 5t\right)}$$

$$= \sqrt{25 + 25 - 50\sin(5t + t)} = \sqrt{50 - 50\sin 6t}$$

c $-1 \le \sin 6t \le 1 \Rightarrow -50 \le -50\sin 6t \le 50 \Rightarrow 0 \le 50 - 50\sin 6t \le 100$.

Dus voor de baansnelheid geldt $\sqrt{0} \le v(t) \le \sqrt{100}$
De baansnelheid is dus minimaal 0 en maximaal 10.

Extra oefening bij hoofdstuk 6

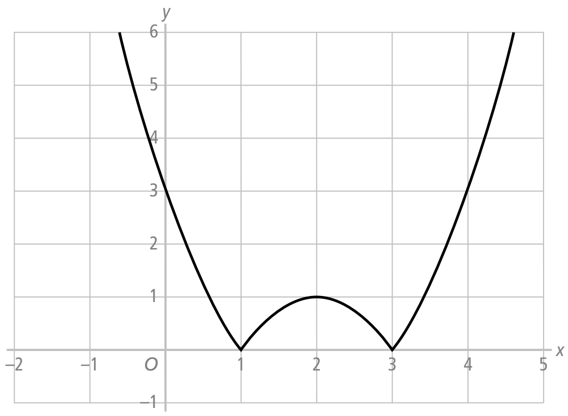
1a $f(x) = x - x^3$ geeft $f'(x) = 1 - 3x^2$ dus $f''(x) = -6x$

$f''(x) = 0$ voor $x = 0$ dus het buigpunt is $(0,0)$

b $g(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ geeft $g'(x) = \mathrm{e}^x - 2x$ dus $g''(x) = \mathrm{e}^x - 2$

$g''(x) = 0$ als $\mathrm{e}^x = 2$ dus $x = \ln 2$ dus het buigpunt is $(\ln 2, 2 - \ln^2 2)$

2



$x^2 - 4x + 3 = 0$ geeft $(x-3)(x-1) = 0$ dus $x = 1$ of $x = 3$

Op $\langle \leftarrow, 1] \cup [3, \rightarrow\rangle$ geldt: $f(x) = |x^2 - 4x + 3| = x^2 - 4x + 3$ dus $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0$ voor $x = 2$, ligt buiten het interval dus vervalt.

Op $\langle 1, 3\rangle$ geldt $f(x) = |x^2 - 4x + 3| = -x^2 + 4x - 3$ dus $f'(x) = -2x + 4$

$f'(x) = 0$ voor $x = 2$ geeft maximum 1

Dus f heeft voor $x = 1$ een minimum 0, voor $x = 2$ een maximum 1 en voor $x = 3$ een minimum 0.

3a Doortrekken van de opstaande ribben geeft een piramide met hoogte 40.

Dan geldt: $\dfrac{PQ}{20} = \dfrac{40 - h}{40}$ waaruit volgt $40 \cdot PQ = 20(40 - h)$ dus

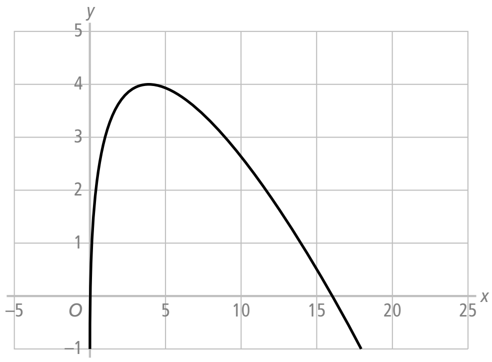
$PQ = \frac{1}{2}(40 - h) = 20 - \frac{1}{2}h$.

b Oppervlakte $PQRS = PQ^2 = \left(20 - \frac{1}{2}h\right)^2 = 400 - 20h - \frac{1}{4}h^2$.

c Inhoud $ABCD.EFGH = \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 20^2 - \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 15^2 = 3083\frac{1}{3}$.

Of: Inhoud $ABCD.EFGH = \int_0^{10} (20 - \frac{1}{2}h)^2 \,\mathrm{d}h = \left[-\frac{2}{3}(20 - \frac{1}{2}h)^3\right]_0^{10} = 3083\frac{1}{3}$.

4a



$f(x)=0$ als $4\sqrt{x}-x=0$ waaruit volgt $\sqrt{x}\left(4-\sqrt{x}\right)=0$ dus $x=0$ of $x=16$

b Inhoud omwentelingslichaam:

$$\pi\int_0^{16}\left(4\sqrt{x}-x\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^{16}\left(16x-8x\sqrt{x}+x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left[8x^2-8\cdot\tfrac{2}{5}x^{2\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{16}=\left[8x^2-3\tfrac{1}{5}x^2\sqrt{x}+\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{16}$$

$$=\pi\left(\left(8\cdot 256-3\tfrac{1}{5}\cdot 256\cdot 4+\tfrac{1}{3}\cdot 16^3\right)-0\right)=136\tfrac{8}{15}\pi\approx 428{,}93$$

5a $y=\cos 2t=2\cos^2 t-1=2x^2-1$

b $L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(4x\right)^2}\,\mathrm{d}x\approx 4{,}6$

c L is een cirkel met straal 4 dus de lengte is $2\pi\cdot 4=8\pi$

6a $f(x)=\frac{1}{2}x$ dus $f'(x)=\frac{1}{2}$ De lengte van de grafiek is:

$$L=\int_0^4\sqrt{\left(1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}x=\int_0^4\sqrt{1\tfrac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=\int_0^4\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\cdot x\right]_0^4=2\sqrt{5}-0=2\sqrt{5}$$

b $g(x)=\cos x$ dus $g'(x)=-\sin x$

$$L=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\left(1+\left(-\sin x\right)^2\right)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

c De lengte is: $L\approx 1{,}91$.

Oefentoets bij hoofdstuk 5 en 6

1a $f_1(x) = \sin 3x + \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}(3x+x)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(3x-x) = 2\sin 2x\cdot\cos x$
$= 2\cdot 2\sin x\cos x\cdot\cos x = 4\sin x\cdot\cos^2 x$

b $f_2(x) = \sin 3x + \sin 2x = 2\sin\tfrac{1}{2}(3x+2x)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(3x-2x) = 2\sin 2\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x$

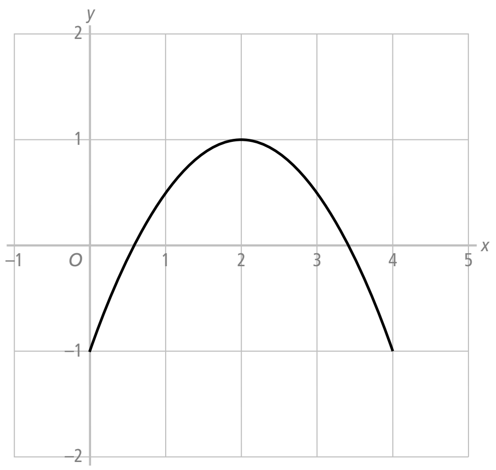
c $2\sin 2\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = 0$
$\sin 2\tfrac{1}{2}x = 0$ of $\cos\tfrac{1}{2}x = 0$
$2\tfrac{1}{2}x = 0 + k\pi$ of $\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi$
$x = k\cdot\tfrac{2}{5}\pi$ of $x = \pi + 2k\pi$
$x = 0$; $x = \tfrac{2}{5}\pi$; $x = \tfrac{4}{5}\pi$; $x = \pi$; $x = 1\tfrac{1}{5}\pi$; $x = 1\tfrac{3}{5}\pi$; $x = 2\pi$

2a $x - 3 + \dfrac{6}{x+4} = 0$
$\dfrac{6}{x+4} = 3 - x$
$(x+4)(3-x) = 6$
$-x^2 - x + 12 = 6$
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x-2)(x+3) = 0$
$x = 2$ of $x = -3$

b $f(x) = x - 3 + 6(x+4)^{-1}$ dus $f'(x) = 1 - \dfrac{6}{(x+4)^2}$
$f'(x) = 0$ als $(x+4)^2 = 6 \Rightarrow x+4 = \sqrt{6}$ of $x+4 = -\sqrt{6}$ dus $x = \sqrt{6} - 4$ of $x = -\sqrt{6} - 4$
Uit een plot volgt dat *f* een minimum heeft voor $x = \sqrt{6} - 4$.

c De oppervlakte ligt onder de *x*-as dus oppervlakte $= -\displaystyle\int_{-3}^{2}\left(x - 3 + \frac{6}{x+4}\right)dx \approx 6,75$.

3a



$y = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \;(1)$
$x = 2(1+\sin t) = 2 + 2\sin t \Rightarrow 2\sin t = x - 2 \Rightarrow \sin t = \tfrac{1}{2}x - 1 \;(2)$
(1) en (2) geeft $y = 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ dus de grafiek van de kromme is een deel van een parabool.

b $\begin{cases} x = 2 + 2\sin 3t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

Keerpunten: $\frac{dx}{dt} = 6\cos 3t = 0$ geeft $3t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ dus $t = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi$ en
$\frac{dy}{dt} = -2\sin 2t = 0$ geeft $2t = k\pi$ dus $t = \frac{1}{2}k\pi$.
Binnen het domein geeft dit $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

c De kromme heeft periode π en wordt:
$\begin{cases} x = 2 + 2\sin 4t \\ y = \cos 2t \end{cases}$
Het punt $(2,0)$ krijg je voor $t = \frac{1}{4}\pi$ en $t = \frac{3}{4}\pi$.
Helling voor $t = \frac{1}{4}\pi$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 2t}{8\cos 4t} = \frac{-2\sin\frac{1}{2}\pi}{8\cos\pi} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$.
De raaklijn in $(2,0)$ wordt dan: $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.
Helling voor $t = \frac{3}{4}\pi$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 1\frac{1}{2}\pi}{8\cos 3\pi} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$.
De raaklijn in $(2,0)$ wordt dan: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

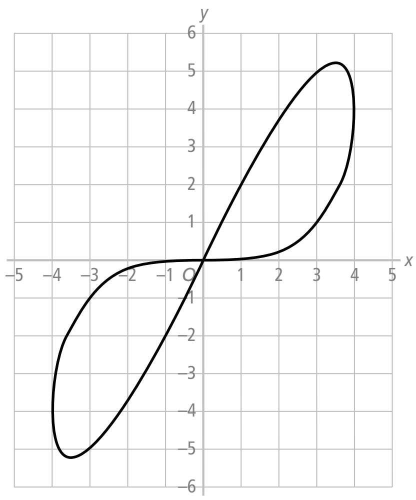
4a Inhoud bij wentelen om de y-as is: $\pi\int_0^4 x^2\,dy$.
$f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}y^2$
De inhoud: $\pi\int_0^4 \left(\frac{1}{4}y^2\right)^2 dy = \pi\int_0^4 \frac{1}{16}y^4\,dy = \pi\left[\frac{1}{80}y^5\right]_0^4 = \pi\left(\frac{1024}{80} - 0\right) = 12{,}8\pi \approx 40{,}21$.

b Bij wentelen om de x-as krijg je als inhoud
$\pi\cdot 4^2\cdot 4 - \pi\int_0^4 \left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = 64\pi - \pi\left[2x^2\right]_0^4 = 64\pi - 32\pi = 32\pi$.

5a $\int_0^\pi (1+\cos x)\,dx = \left[x + \sin x\right]_0^\pi = \pi + \sin\pi = \pi$

b $\pi\int_0^\pi (1+\cos x)^2\,dx = \pi\int_0^\pi \left(1 + 2\cos x + \cos^2 x\right)dx = \pi\int_0^\pi \left(1 + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right)dx$
$= \pi\int_0^\pi \left(2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + 1\frac{1}{2}\right)dx = \pi\left[2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + 1\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = \pi\cdot 1\frac{1}{2}\pi = 1\frac{1}{2}\pi^2$
Hierbij wordt gebruik gemaakt van de formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ dus
$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$.

6a



$-4 \le x \le 4$

b $\dfrac{dy}{dt} = 4\cos t - 4\cos 2t = 0$
$4\cos t - 4\left(2\cos^2 t - 1\right) = 0$
$-8\cos^2 t + 4\cos t + 4 = 0$
$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$
$\left(2\cos t + 1\right)\left(\cos t - 1\right) = 0$
$\cos t = -\frac{1}{2}$ of $\cos t = 1$
binnen het domein: $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi$, $t = 0$ of $t = 2\pi$
$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft $y = 4\sin\frac{2}{3}\pi - 2\sin 1\frac{1}{3}\pi = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
$t = 1\frac{1}{3}\pi$ geeft $y = 4\sin 1\frac{1}{3}\pi - 2\sin 2\frac{2}{3}\pi = 4\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$
$t = 0$ geeft $y = 4\sin 0 - 2\sin 0 = 0$ en $t = 2\pi$ geeft $y = 4\sin 2\pi - 2\sin 4\pi = 0$
Dus $-3\sqrt{3} \le y \le 3\sqrt{3}$.

c Voor $t = 0$ krijg je het punt $(0,0)$ en dan geldt: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\cos 0 - 4\cos 0}{4\cos 0} = \frac{0}{4} = 0$ dus de kromme raakt de x-as in het punt $(0,0)$.

d De punten op de kromme waar de raaklijn evenwijdig loopt aan de x-as:
$t = \frac{2}{3}\pi$ geeft het punt $\left(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ en $t = 1\frac{1}{3}\pi$ geeft het punt $\left(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right)$ en natuurlijk in $(0,0)$.
De punten op de kromme waar de raaklijn evenwijdig loopt aan de y-as:
$\dfrac{dx}{dy} = 4\cos t = 0$ dus $t = \frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(4,4)$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft het punt $(-4,-4)$.

e $x - y = 4\sin t - \left(4\sin t - 2\sin 2t\right) = 2\sin 2t$ waaruit volgt dat
$16\left(x - y\right)^2 = 16\cdot 4\sin^2 2t = 64\left(2\sin t\cdot\cos t\right)^2 = 256\sin^2 t\cos^2 t\,(1)$
$x^2\left(16 - x^2\right) = 16\sin^2 t\left(16 - 16\sin^2 t\right) = 16\sin^2 t\cdot 16\left(1 - \sin^2 t\right) = 256\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,(2)$
Uit (1) en (2) volgt dat elk punt van de kromme voldoet aan $16\left(x - y\right)^2 = x^2\left(16 - x^2\right)$.

7a Oppervlakte $B = \int_{-1}^{1}\left(e^x + e^{-x}\right)dx = \left[e^x - e^{-x}\right]_{-1}^{1} = \left(e - e^{-1}\right) - \left(e^{-1} - e\right) = 2e - \frac{2}{e}$.

b $L = \int_{-1}^{1}\sqrt{1 + \left(e^x - e^{-x}\right)^2}\,dx \approx 3{,}10$

c Gebied B wentelen om de x-as geeft:
inhoud $(B) = \pi\int_{-1}^{1}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1}$
$= \pi\left(\left(\frac{1}{2}e^2 + 2 - \frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-2} - 2 - \frac{1}{2}e^2\right)\right) = \pi\left(e^2 - e^{-2} + 4\right)$

d Gebied C is de rechthoek begrensd door de x-as, de lijnen $x = 1$, $x = -1$ en $y = e + \frac{1}{e}$.
Gebied A wentelen om de x-as geeft:
inhoud $(A) =$ inhoud cilinder (C) – inhoud (B) =
$\pi\cdot\left(e + e^{-1}\right)^2\cdot 2 - \pi\left(e^2 - e^{-2} + 4\right) = \pi\left(2e^2 + 4 + 2e^{-2} - e^2 - 4\right) = \pi\left(e^2 + 3e^{-2}\right)$.

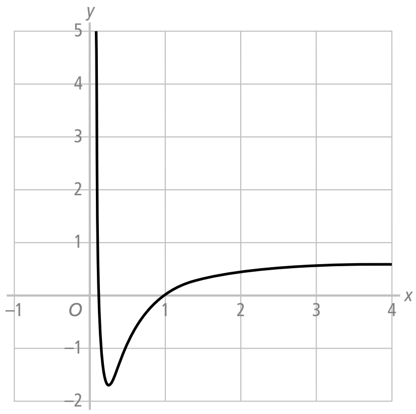
8a $f(x)=\ln^2 x+2\ln x=0$ geeft $\ln x(\ln x+2)=0$ dus $\ln x=0$ of $\ln x=-2$ ofwel $x=1$ of $x=\mathrm{e}^{-2}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

b $f'(x)=\dfrac{\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot 2x-\left(\ln^2 x+2\ln x\right)\cdot 2}{(2x)^2}=\dfrac{4\ln x+4-2\ln^2 x-4\ln x}{4x^2}=\dfrac{4-2\ln^2 x}{4x^2}$

c $f'(x)=0\Rightarrow\ 4-2\ln^2 x=0$ als $\ln^2 x=2$ dus $\ln x=\sqrt{2}$ of $\ln x=-\sqrt{2}$ ofwel

$x=\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$ of $x=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$

$f\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\left(-\sqrt{2}\right)^2+2\cdot-\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}$ en $f\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$



Voor $x\downarrow 0$ geldt $f(x)\to\infty$ dus $B_f=\left[\dfrac{2-2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}},\to\right\rangle$

d $f''(x)=\dfrac{-4\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot 4x^2-\left(4-2\ln^2 x\right)\cdot 8x}{\left(4x^2\right)^2}=\dfrac{-16x\ln x-32x+16x\ln^2 x}{16x^4}=\dfrac{\ln^2 x-\ln x-2}{x^3}$

$f''(x)=\ln^2 x-\ln x-2=0$ geeft $(\ln x-2)(\ln x+1)=0$ dus

$\ln x=2$ of $\ln x=-1$ ofwel $x=\mathrm{e}^2$ of $x=\mathrm{e}^{-1}$

$f\left(\mathrm{e}^2\right)=\dfrac{2^2+2\cdot 2}{2\mathrm{e}^2}=\frac{4}{\mathrm{e}^2}=4\mathrm{e}^{-2}$ en $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\dfrac{(-1)^2-2}{2\mathrm{e}^{-1}}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}$

De buigpunten zijn dus $\left(\mathrm{e}^2,4\mathrm{e}^{-2}\right)$ en $\left(\mathrm{e}^{-1},-\frac{1}{2}\mathrm{e}\right)$.