Hoofdstuk 2 - Periodieke bewegingen

Voorkennis: Sinusoïden

bladzijde 36

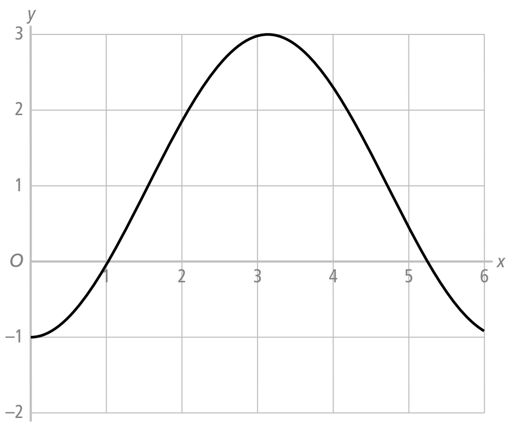
V-1a $A(-\pi,0)$, $B(-\frac{1}{2}\pi,2)$, $C(\frac{1}{2}\pi,-2)$ en $D(\pi,0)$

b Via Intersect vind je de snijpunten van $y1=-2\sin x$ en $y2=1$.
$x\approx-2{,}62$ $x\approx-0{,}52$ of $x\approx3{,}67$

c Bij een verschuiving van 2 eenheden naar rechts vervang je *x* door $x-2$ dus
$g(x)=-2\sin(x-2)$.

d De grafiek van *f* moet $\pi+k\cdot2\pi$ eenheden naar rechts of links worden geschoven.

V-2a



Het bereik van *f* is $[-1,3]$.

b De periode is 2π en de amplitude is 2.

c Vervang *t* door $t+3$ en trek vervolgens 1 eenheid van de functiewaarde af.
$g(t)=1-2\cos(t+3)-1=-2\cos(t+3)$

d $b=\frac{2\pi}{periode}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

bladzijde 37

V-3a Periode $=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi}=8$, amplitude = 3, evenwichtsstand $y=0$, bereik $=\left[-3,3\right]$.

b Periode $=\frac{2\pi}{20\pi}=\frac{1}{10}$, amplitude = 12, evenwichtsstand $y=5$, bereik $=\left[-7,17\right]$.

c Periode $=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi}=6$, amplitude $=\frac{1}{2}$, evenwichtsstand $y=-2$, bereik $=\left[-2\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right]$.

V-4a Evenwichtsstand $y=\frac{-5+3}{2}=-1$, amplitude $=3--1=4$ en de periode loopt van $x=-2$ tot $x=4$ en is dus 6.

b Het beginpunt van een golf ligt bij $x=-2$ dus $c=-2$.

c $d=-1$, $a=4$, $c=-2$ en $b=\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{3}\pi$ dus $f(x)=-1+4\sin\frac{1}{3}\pi(x+2)$

d d, a en b blijven hetzelfde.
Het hoogste punt van een golf ligt bij $x=-\frac{1}{2}$ dus $c=-\frac{1}{2}$.
$g(x)=-1+4\cos\frac{1}{3}\pi(x+\frac{1}{2})$

V-5a De periode van f is $\frac{2\pi}{4}=\frac{1}{2}\pi$ en de periode van g is $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$.

b De gemeenschappelijke periode is 2π want $4\times\frac{1}{2}\pi=3\times\frac{2}{3}\pi=2\pi$.

c Met Intersect vind je $t=0,\ t\approx 0{,}61,\ t\approx 1{,}41,\ t\approx 2{,}27,\ t=\pi,\ t\approx 4{,}01,\ t\approx 4{,}87,\ t\approx 5{,}67,\ t=2\pi$.

d Op het interval $\left[0,2\pi\right\rangle$ zijn er acht oplossingen. Het interval bevat $84\pi:2\pi=42$ perioden.
Op het interval $\left[-4\pi,80\pi\right\rangle$ heeft de vergelijking dus $42\cdot\ 8=336$ oplossingen, omdat 80π ook een oplossing is op het interval $[-4\pi,80\pi]$ dus 337 oplossingen.

e De periode van h is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi}=6$ en van k $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}\pi}=10$. De gemeenschappelijke periode is $5\cdot\ 6=3\cdot\ 10=30$.
Op interval $\left[-30,0\right\rangle$ zijn 6 oplossingen. In het interval $\left[-30,1500\right\rangle$ passen 51 gemeenschappelijke perioden dus $51\cdot\ 6=306$ oplossingen.
Op interval $[-45,-30]$ vind je via Intersect nog 3 oplossingen zodat er in totaal 309 oplossingen zijn.

V-6a $f'(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{1}{2}t=\cos\frac{1}{2}t$ (met de kettingregel)

b $g'(t)=2\cdot 3\sin 2(t+1)=6\sin 2(t+1)$ (met de kettingregel)

c $h'(t)=\pi\sin\pi t$ (met de kettingregel)

d $k'(t)=-2\cdot\pi\cos(1-2t)$ (met de kettingregel)

e $l'(t)=6\cos^2 t\cdot -\sin t=-6\sin t\cos^2 t$ (met de kettingregel)

f $p'(t)=1\cdot\cos t+t\cdot(-\sin t)=\cos t-t\sin t$ (met de productregel)

V-7a $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2\sin x\,dx=\left[-2\cos x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=-2\cos\frac{1}{2}\pi-\left(-2\cos 0\right)=0-\left(-2\right)=2$

b $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=-\frac{1}{2}\cos\pi-\left(-\frac{1}{2}\cos 0\right)=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

c $\int_{-\pi}^{\pi}\left(-1+\cos\frac{1}{2}x\right)dx=\left[-x+2\sin\frac{1}{2}x\right]_{-\pi}^{\pi}=\left(-\pi+2\sin\frac{1}{2}\pi\right)-\left(\pi+2\sin(-\frac{1}{2}\pi)\right)$

$=(-\pi+2)-(\pi-2)=-2\pi+4$

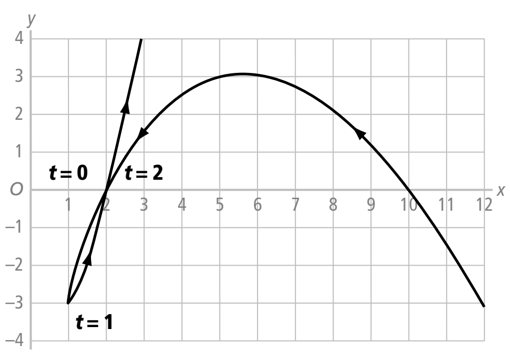
2.1 Parametervoorstellingen

bladzijde 38

1a $t=0$ geeft $x=0^2-2\cdot 0+2=2$ en $y=0^3+4\cdot 0=0$ dus $P(2,0)$

b $t=1$ geeft $(1,-3)$
$t=2$ geeft $(2,0)$
$t=3$ geeft $(5,15)$

c

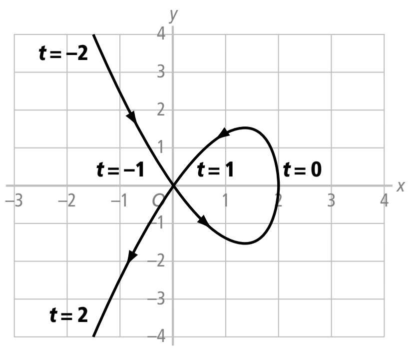


d Er geldt $y=0$ dus $t^3-4t=0$
$t\left(t^2-4\right)=0$
$t=-2$ of $t=0$ of $t=-2$
Hierbij horen achtereenvolgens de punten $(10,0)$, $(2,0)$ en nogmaals $(2,0)$.

bladzijde 39

2a

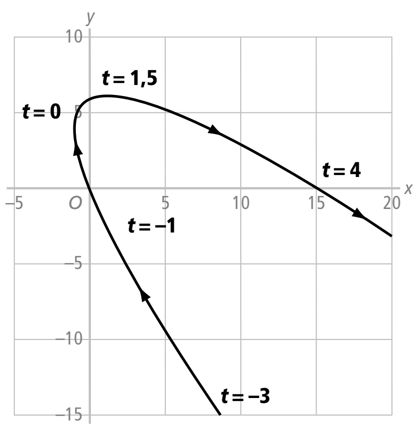
t	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x	–16	–6	0	2	0	–6	–16	–30
y	96	24	0	0	0	–24	–96	–240



b Er geldt $y=0$:
$4t-4t^3=0$
$4t\left(1-t^2\right)=0$
$4t=0$ of $1-t^2=0$
$t=0$ of $t=-1$ of $t=1$
Voor $t=0$, $t=-1$ en $t=1$ snijdt de kromme de x-as in $(2,0)$, $(0,0)$ en weer $(0,0)$.

3a De grafiek van $x=t^2-1$ is een dalparabool met minimum –1 voor $t=0$ dus $x\geq -1$.
De grafiek van $y=-t^2+3t+4$ is een bergparabool met maximum $6\frac{1}{4}$ voor $t=1\frac{1}{2}$
dus $y\leq 6\frac{1}{4}$.

b



c Uit opdracht a volgt dat $x=-1$ de minimale x-coördinaat is voor $t=0$.
Als $t=0$ geldt $y=4$ dus $\left(-1,\ 4\right)$.

d Uit opdracht a volgt dat $y=6\frac{1}{4}$ de maximale y-coördinaat is voor $t=1\frac{1}{2}$.
Als $t=1\frac{1}{2}$ geldt $x=1\frac{1}{4}$ dus $\left(1\frac{1}{4},\ 6\frac{1}{4}\right)$.

e Als $y = x$ dan is $-t^2 + 3t + 4 = t^2 - 1$.

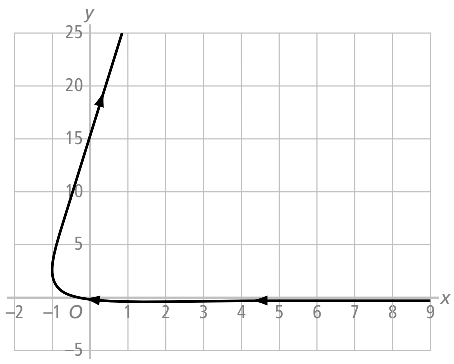
f $2t^2 - 3t - 5 = 0$

$t = \frac{3-\sqrt{49}}{4} = -1$ of $t = \frac{3+\sqrt{49}}{4} = 2\frac{1}{2}$

$t = -1$ geeft $(0,0)$ en $t = 2\frac{1}{2}$ geeft $(5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{4})$

4a

t	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
x	15	8	3	0	–1	0	3	8
y	–0,15	–0,27	–0,37	0	2,72	14,78	60,26	218,39



b $\frac{dx}{dt} = 2t - 2 = 0$ voor $t = 1$

minimale *x*-coördinaat is –1 voor $t = 1$

c $\frac{dy}{dt} = e^t + te^t$ (met de produktregel)

$e^t(1 + t) = 0$ als $t = -1$

De minimale *y*-coördinaat is $y = -1e^{-1} = -\frac{1}{e}$ voor $t = -1$

d $t^2 - 2t = 3$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t-3)(t+1) = 0$

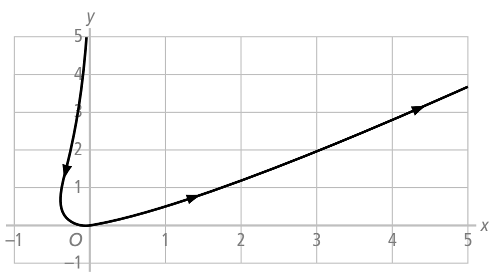
$t = 3$ of $t = -1$

$t = -1$ geeft $\left(3, -\frac{1}{e}\right)$ en $t = 3$ geeft $\left(3, 3e^3\right)$

e Voor grote negatieve waarden van *t* gaat $y = te^t$ naar nul en $x = t^2 - 2t$ naar oneindig dus nadert het punt de *x*-as.

5a

t	0	0,5	1	2	3	4
x	-	–0,35	0	1,39	3,30	5,55
y	-	0,35	0	0,69	2,20	4,16



b $\frac{dx}{dt} = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = \ln t + 1 = 0$ voor $t = e^{-1} = \frac{1}{e}$

De minimale x-coördinaat is $x = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$ dus $x \geq -\frac{1}{e}$.

Het minimum van y is niet met algebra te berekenen dus plot $y1 = (x-1)\ln x$ en bereken met de grafische rekenmachine dat de minimale y-coördinaat 0 is voor $t = 1$ dus $y \geq 0$.

c $y = \frac{1}{2}x$ geeft
$(t-1)\ln t = \frac{1}{2}t \ln t$
$t - 1 = \frac{1}{2}t$ of $\ln t = 0$
$\frac{1}{2}t = 1$ of $t = e^0$
$t = 2$ of $t = 1$
$t = 1$ geeft $(0,0)$ en $t = 2$ geeft $(2\ln 2, \ln 2)$

d De krommen K en M vallen samen maar zijn niet identiek want een punt op K dat bij $t = a$ hoort, is ook een punt van kromme M maar dan voor $t = \frac{1}{2}a$. Een punt op kromme M verplaatst zich dus twee keer zo snel als een punt op K.

2.2 Bijzondere punten

bladzijde 40

6a $y = 0$ dus $3\sin t = 0$

b $3\sin t = 0$
$t = 0 + k\pi$
$x = 1 + \cos t$ is dan telkens $1 + 1 = 2$ of $1 + -1 = 0$ dus $(0,0)$ en $(2,0)$ zijn de snijpunten met de x-as.

c $x = 1 + \cos t = 0$
$\cos t = -1$
$t = \pi + 2k\pi$
$y = 3\sin t$ is dan telkens 0 dus $(0,0)$ is het snijpunt met de y-as.

7a $t = 2$ geeft $A(6,5)$

De helling van OA is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-0}{6-0} = \frac{5}{6}$.

b $t = 1\frac{1}{2}$ geeft $B(1\frac{7}{8}, 2)$

De helling van OB is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1\frac{7}{8}-0} = 1\frac{1}{15}$.

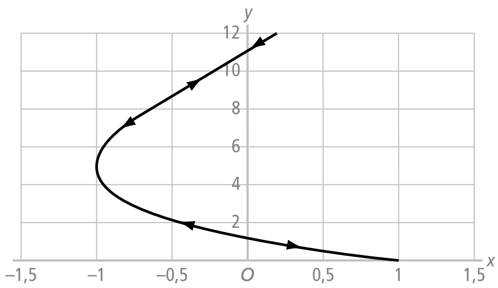
c $t = 1{,}01$ geeft $C(0{,}020301; 0{,}0302)$

d De helling van OC is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}0302-0}{0{,}020301-0} \approx 1\frac{1}{2}$.

De helling van de raaklijn aan kromme K in O zal $1\frac{1}{2}$ zijn.

8a

t	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x	0,28	–0,65	–0,99	–0,42	0,54	1	0,54	–0,42	–0,99	–0,65	0,28
y	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5



b $\frac{dy}{dt} = -\sin t$ en $\frac{dy}{dt} = t$

$t = 2$ geeft $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = 2 : -\sin 2 \approx -2,20$

c $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{-\sin t}$ dus $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-\sin 4} \approx 5,29$ voor $t = 4$

d $P(1,0)$ hoort bij $t = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ geeft geen uitkomst

bladzijde 41

9a $\frac{dx}{dt} = 2t$ en $\frac{dy}{dt} = 2te^{1-t} + t^2 \cdot e^{1-t} \cdot -1 = 2te^{1-t} - t^2e^{1-t}$

b Voor $t = 0$ geldt $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$.

c $t = 0$ geeft $(0,0)$ als keerpunt

d $t = 0,001$ geeft $\frac{dx}{dt} = 0,002$ en $\frac{dy}{dt} \approx 0,005428$ dus $\frac{dy}{dx} \approx \frac{0,005428}{0,002} = 2,71$

De helling in keerpunt $(0,0)$ is ongeveer 2,71.

10a $\frac{dx}{dt} = -\sin t + 2\cos t \sin t$

$\frac{dy}{dt} = \cos t(1 - \cos t) + \sin t \cdot \sin t = \cos t - \cos^2 t + \sin^2 t$

b In punten waar de raaklijn horizontaal loopt geldt $\frac{dy}{dt} = 0$ en $\frac{dx}{dt} \neq 0$.

$\frac{dy}{dt} = \cos t - \cos^2 t + \sin^2 t = 0$ berekenen met CALC Zero of G-solve Root geeft $t = 0$, $t = 2\pi$, $t \approx 2,09$, $t \approx 4,19$, ….

$\frac{dx}{dt} = -\sin t + 2\cos t \sin t = 0$ geeft $t = 0$, $t = \pi$, $t \approx 1,05$, $t \approx 5,24$, ….

Er is een horizontale raaklijn in $(-0,75;1,30)$ voor $t \approx 2,09$ en in $(-0,75;-1,30)$ voor $t \approx 4,19$.

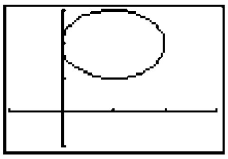
Er is een verticale raaklijn in $(0,25;0,43)$ voor $t \approx 1,05$, in $(0,25;-0,43)$ voor $t \approx 5,24$ en in $(-2,0)$ voor $t = \pi$.

c $t=0$ geeft $(0,0)$ en $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$ dus $(0,0)$ is een keerpunt
Voor $t=0{,}001$ is $\frac{dy}{dx}\approx\frac{0{,}0000015}{0{,}001}\approx 0$.
De helling in het keerpunt zal nul zijn.

2.3 Lissajousfiguren

bladzijde 42

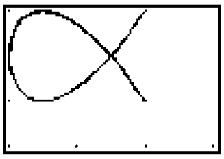
11a



$1-\cos t$ is minimaal $1-1=0$ en maximaal $1--1=2$ dus $0\le x\le 2$
$2+\sin t$ is minimaal $2+-1=1$ en maximaal $2+1=3$ dus $1\le y\le 3$

b De kromme is dan een cirkel met straal 1 en middelpunt $(2,2)$.

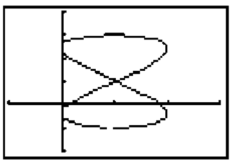
c



In de plot loopt x van 2 tot 5 en y van 3 tot 6.

d De periode van $x=3-\cos 2t$ is $\frac{2\pi}{2}=\pi$ en de periode van $y=5+\sin 3t$ is $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}$.
De gemeenschappelijke periode is 2π want $2\times\pi=3\times\frac{2}{3}\pi=2\pi$. De periode van de kromme is dus 2π.

12a



De periode van x is $\frac{2\pi}{2}=\pi$ en de periode van y is $\frac{2\pi}{1}=2\pi$. De gemeenschappelijke periode is 2π en is dus de periode van de kromme.

b Snijpunt met de x-as als $y=0$ dus $1-2\cos t=0$.
$\cos t=\frac{1}{2}$ geeft $t=\frac{1}{3}\pi\approx 1{,}047$ of $t=1\frac{2}{3}\pi\approx 5{,}236$ (in één periode).

$t=\frac{1}{3}$ geeft $x=1+\sin\frac{2}{3}\pi=1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus $\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3},0\right)\approx(1{,}87;0)$

$t=1\frac{2}{3}\pi$ geeft $x=1+\sin 3\frac{1}{3}\pi=1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dus $\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3},0\right)\approx(0{,}13;0)$

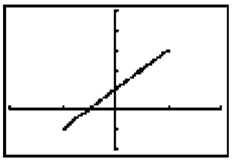
Snijpunt met de y-as als $x=0$ dus $1+\sin 2t=0$.
$\sin 2t=-1$ geeft $t=\frac{3}{4}\pi\approx 2{,}356$ en $t=1\frac{3}{4}\pi\approx 5{,}498$ (in één periode).

$t=\frac{3}{4}\pi$ geeft $y=1-2\cos\frac{3}{4}\pi=1+\sqrt{2}$ dus $\left(0,1+\sqrt{2}\right)\approx(0;2{,}41)$

$t=1\frac{3}{4}\pi$ geeft $y=1-2\cos 1\frac{3}{4}\pi=1-\sqrt{2}$ dus $\left(0,1-\sqrt{2}\right)\approx(0;-0{,}41)$

c Uit de plot is af te lezen dat de kromme zichzelf snijdt in $(1,1)$.

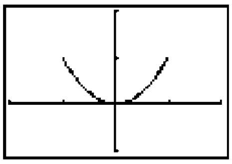
13a



De kromme ligt op lijn $y=1+2x$.

b $x=\cos 2t$ kun je substitueren in $y=1+2\cos 2t$
Je krijgt dan $y=1+2x$.
Omdat $-1\le\cos 2t\le 1$ geldt $-1\le x\le 1$ dus is het een deel van een lijn.

c



De kromme ligt op de parabool met functievoorschrift $f(x)=x^2$.

d Uit de plot lees je af dat $-1\le x\le 1$.
Dit komt omdat $-1\le\sin x\le 1$.

bladzijde 43

14a $x=0$ dus $3\sin 2t=0$
$\sin 2t=0$ geeft $t=0+k\cdot\frac{1}{2}\pi$
$t=0$ geeft $y=2\cos 0=2$ dus $(0,2)$
$t=\frac{1}{2}\pi$ geeft $y=2\cos 1\frac{1}{2}\pi=0$ dus $(0,0)$ (ook bij $t=1\frac{1}{2}\pi$)
$t=\pi$ geeft $y=2\cos 3\pi=-2$ dus $(0,-2)$

b $2\times\pi=3\times\frac{2}{3}\pi=2\pi$ is de periode van de kromme

c $y=0$ dus $2\cos 3t=0$
$\cos 3t=0$ geeft $3t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$ of $3t=1\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$
dus $t=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$ of $t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$
Op $[0,2\pi]$ geldt $t=\frac{1}{2}\pi$, $t=\frac{5}{6}\pi$, $t=\frac{7}{6}\pi$, $t=1\frac{1}{2}\pi$ of $t=\frac{11}{6}\pi$.
Voor $t=\frac{5}{6}\pi$ en $t=\frac{11}{6}\pi$ geldt $(-2{,}60;0)$.
Voor $t=\frac{1}{2}\pi$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$ geldt $(0,0)$.
Voor $t=\frac{1}{6}\pi$ en $t=\frac{7}{6}\pi$ geldt $(2{,}60;0)$.

15a $1\times 2\pi=2\times\pi=2\pi$ is de periode van de kromme

b Er is een verticale raaklijn in $x=-5$ of $x=5$.
$-5\cos t=5$ geeft $t=\pi$ en $-5\cos t=-5$ geeft $t=0$ of $t=2\pi$
Voor $t=0$ en $t=2\pi$ geldt $(-5,0)$ en $t=\pi$ geeft $(5,0)$.
Er is een horizontale raaklijn als $y=-2$ of $y=2$.
$2\sin 2t=-2$ dus $\sin 2t=-1$ voor $t=\frac{3}{4}\pi$ of $t=1\frac{3}{4}\pi$
$2\sin 2t=1$ dus $\sin 2t=1$ voor $t=\frac{1}{4}\pi$ of $t=1\frac{1}{4}\pi$
$t=\frac{1}{4}\pi$ geeft $(-3{,}54;2)$; $t=\frac{3}{4}\pi$ geeft $(3{,}54;-2)$;
$t=1\frac{1}{4}\pi$ geeft $(3{,}54;2)$; $t=1\frac{3}{4}\pi$ geeft $(-3{,}54;-2)$

c $t=\frac{1}{2}\pi$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$ geven $(0,0)$

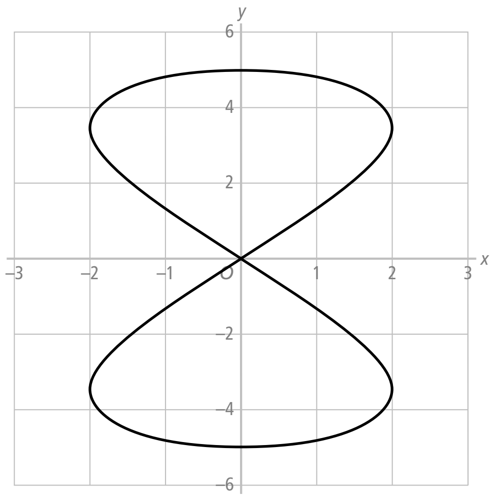
$\frac{dx}{dt}=5\sin t$ en $\frac{dy}{dt}=4\cos 2t$ (met de kettingregel)

Voor $t=\frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt}=5$ en $\frac{dy}{dt}=-4$ dus $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{5}$.

Voor $t=1\frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt}=-5$ en $\frac{dy}{dt}=-4$ dus $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{5}$.

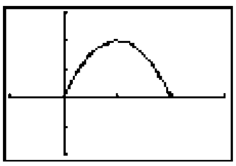
De vergelijkingen van de raaklijnen zijn dus $y=-\frac{4}{5}x$ en $y=\frac{4}{5}x$.

d x en y zijn verwisseld dus spiegeling in de lijn $y=x$



16a $1\times 2\pi = 2\times\pi = 2\pi$ is de periode van de kromme.

b



$y=1-\cos 2t$ is maximaal 2 als $\cos 2t=-1$ dus als $t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$

c $(0,0)$ en $(2,0)$ zijn de keerpunten

d $t=\pi$ geeft $(0,0)$

$\frac{dx}{dt}=-\sin t$ en $\frac{dy}{dt}=2\sin 2t$

Voor $t=\pi+0{,}001$ geldt $\frac{dx}{dt}\approx 0{,}001$ en $\frac{dy}{dt}\approx 0{,}004$ dus $\frac{dy}{dx}\approx 4$.

De helling in $(0,0)$ is 4.

Uit de symmetrie volgt dat de helling in $(2,0)$ –4 is.

17a $1\times 8\pi = 4\times 2\pi = 8\pi$ is de periode dus elk domein met lengte 8π plot precies één periode.

b $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}\cos\frac{1}{4}t$ en $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$

Voor $t=\pi$ geldt $\frac{dx}{dt}\approx 0{,}177$ en $\frac{dy}{dt}=0$ dus $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0{,}177}=0$.

c Er is een horizontale raaklijn als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ en $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\neq 0$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2\sin t=0$ als $\sin t=0$ dus $t=0+k\cdot\pi$

$t=0$ (of 4π of 8π) geeft $(0,2)$

$t=\pi$ (of 3π) geeft $(0,71;-2)$

$t=5\pi$ (of 7π) geeft $(-0,71;-2)$

d Voor $t=2\pi$ of $t=6\pi$ geldt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ dus de keerpunten zijn $(1,2)$ voor $t=2\pi$ en $(-1,2)$ voor $t=6\pi$.

2.4 Vervormen

bladzijde 44

18a $y=0$ dus $2\cos 6t=0$

$\cos 6t=0$ geeft $6t=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$ ofwel $t=\frac{1}{12}\pi+k\cdot\frac{1}{6}\pi$

De zes nulpunten zijn $(0,78;0)$, $(-0,78;0)$, $(2,12;0)$, $(-2,12;0)$, $(2,90;0)$ en $(-2,90;0)$.

$x=0$ dus $3\sin t=0$

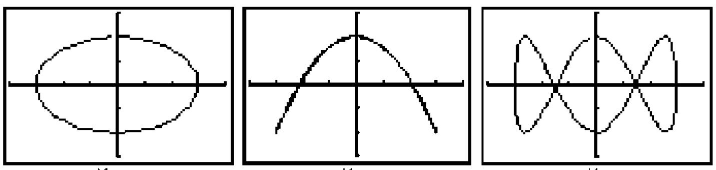
$\sin t=0$ dus $t=0+k\cdot\pi$

Voor elk van deze t-waarden hoort $(0,2)$.

b $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$ voor $t=\frac{1}{2}\pi$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$

$t=\frac{1}{2}\pi$ geeft keerpunt $(3,-2)$

$t=1\frac{1}{2}\pi$ geeft keerpunt $(-3,-2)$



K_1 K_2 K_3

c De periode van $K1$, $K2$ en $K3$ is 2π.

d Als b is even hebben de krommen keerpunten.

e Er geldt voor elke b dat $-3\leq x\leq 3$ en $-2\leq y\leq 2$ dus de afmeting van de rechthoek is 6 bij 4.

19a $2\times\pi=3\times\frac{2}{3}\pi=2\pi$ is de periode voor elke waarde van a.

b De krommen vallen samen maar bij dezelfde waarde voor t horen verschillende punten op de krommen.

c De krommen zijn elkaars spiegelbeeld in de y-as omdat $\cos 2t=-\cos 2\left(t+\frac{1}{2}\pi\right)$.

d De vorm is hetzelfde alleen de x-coördinaten verschillen steeds een fractie van elkaar omdat $\frac{1}{2}\pi\approx 1,57$.

bladzijde 45

20a De periode van $x = 3\sin\frac{1}{3}t$ is $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ en van $y = 2\cos 3t$ is de periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.
$1 \times 6\pi = 9 \times \frac{2}{3}\pi = 6\pi$ is de periode van de kromme

b $y = 2$ is de maximale waarde van y dus krijg je raakpunten met de lijn $y = 2$.
$y = 2$ geeft $2\cos 3t = 2$ dus $\cos 3t = 1$
Hieruit volgt $3t = 0 + k \cdot 2\pi$ ofwel $t = 0 + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ dus $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi$, $t = 2\pi$, $t = 2\frac{2}{3}\pi$, $t = 3\frac{1}{3}\pi$, $t = 4\pi$, $t = 4\frac{2}{3}\pi$, $t = 5\frac{1}{3}\pi$ of $t = 6\pi$.
Invullen in $x = 3\sin\frac{1}{3}t$ geeft voor $t = 0$ en $t = 6\pi$ dezelfde uitkomst terwijl de overige t-waarden verschillende uitkomsten geven. Er zijn dus negen punten op de kromme waar $y = 2$ geraakt wordt.
Voor $b = 2$ volgt uit $2\cos 2t = 2$ dat $2t = 0 + k \cdot 2\pi$ dus $t = 0 + k \cdot \pi$ ofwel $t = 0$, $t = \pi$, $t = 2\pi$, $t = 3\pi$, $t = 4\pi$, $t = 5\pi$ of $t = 6\pi$.
$t = 0$, $t = 3\pi$ en $t = 6\pi$ geven dezelfde x-waarde, ook $t = \pi$ en $t = 2\pi$ geven dezelfde x-waarde en dat geldt ook voor $t = 4\pi$ en $t = 5\pi$. Er zijn dus drie raakpunten met $y = 2$

c De linker figuur lijkt op de kromme voor $b = 3$ en de rechter figuur op de kromme voor $b = 2$.
Door te plotten vind je $b = 5$ voor de linker figuur en $b = 4$ voor de rechter figuur.

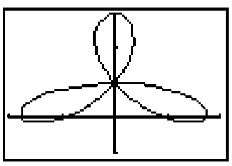
21a De periode van $x = \sin(t + a)$ is 2π en van $y = \cos\frac{1}{2}t$ is de periode 4π. De periode van de kromme is dus 4π.

b Uit een plot volgt dat de kromme zichzelf snijdt op de x-as dus als $y = 0$.
$\cos\frac{1}{2}t = 0$ geeft $t = \pi$ en $t = 3\pi$.
Invullen in $x = \sin(t + 1)$ geeft in beide gevallen $(-0{,}84; 0)$.

c $\dfrac{dx}{dt} = \cos(t + a)$ en $\dfrac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ voor $\frac{1}{2}t = 0 + k \cdot \pi$ geeft $t = 0 + k \cdot 2\pi$ dus $t = 0$, $t = 2\pi$ of $t = 4\pi$
In een keerpunt geldt $\dfrac{dx}{dt} = 0$ én $\dfrac{dy}{dt} = 0$.
$t = 0$ geeft $\dfrac{dx}{dt} = \cos(0 + a) = \cos a = 0$ dus $a = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$t = 2\pi$ geeft $\dfrac{dx}{dt} = \cos(2\pi + a) = 0$ dus $a = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$t = 4\pi$ geeft $\dfrac{dx}{dt} = \cos(4\pi + a) = 0$ dus $a = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
Voor $a = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ zijn er twee keerpunten.

22a



De kromme snijdt zichzelf in $(0,1)$.
$x = 0$ geeft $(1 - 2\cos t)\sin t = 0$ dus $1 - 2\cos t = 0$ of $\sin t = 0$
$\cos t = \frac{1}{2}$ geeft $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = 1\frac{2}{3}\pi$
$\sin t = 0$ geeft $t = 0$, $t = \pi$ of $t = 2\pi$
Invullen in $y = (1 + 2\cos t)\cos t$ geeft voor $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = 1\frac{2}{3}\pi$ of $t = \pi$ steeds $y = 1$.

b $\dfrac{dx}{dt} = 2\sin t \cdot \sin t + (2 - 2\cos t) \cdot \cos t = 2\sin^2 t + 2\cos t - 2\cos^2 t$

$\dfrac{dy}{dt} = -2\sin t \cdot \cos t + (2 + 2\cos t) \cdot -\sin t = -4\sin t \cos t - 2\sin t$

Kies $t = \frac{2}{3}\pi + 0{,}001 \approx 2{,}095$.

$\dfrac{dx}{dt} \approx -0{,}00314$ en $\dfrac{dy}{dt} \approx 0{,}00181$

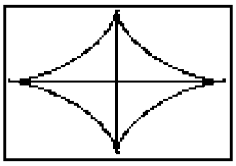
De helling voor $t = \frac{2}{3}\pi$ is $\dfrac{dy}{dx} \approx \dfrac{0{,}00181}{-0{,}00314} \approx -0{,}58$.

c Voor grote waarden van a is $2\cos t$ te verwaarlozen dus $x \approx a\sin t$ en $y \approx a\cos t$.

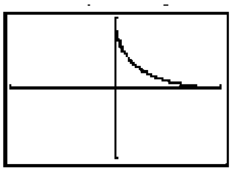
De krommen zijn dus vrijwel cirkels met straal a en middelpunt $(0,0)$.

23a Voor n is even geldt $x \geq 0$ en $y \geq 0$. Voor n is oneven kunnen x en y ook negatieve waarden aannemen.

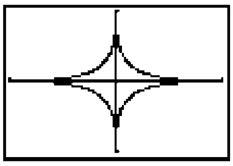
b



K3

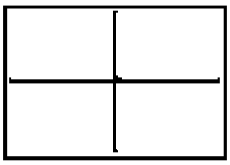


K4



K5

Hoe groter n des te dichter de kromme bij de oorsprong komt te liggen maar elke kromme gaat wel door $(0,1)$ en $(1,0)$. Een waarde tussen –1 en 1 tot een hogere macht ligt dichter bij nul.



K10

2.5 Baansnelheid

bladzijde 46

24a $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t = 0$ als $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

De kromme heeft dan een verticale raaklijn als $\dfrac{dy}{dt} \neq 0$ of een keerpunt als ook geldt $\dfrac{dy}{dt} = 0$

b $\dfrac{dy}{dt} = -3\sin 3t = 0$ als $3t = 0 + k \cdot \pi$ dus $t = 0 + k \cdot \frac{1}{3}\pi$, dus in de punten

$(0,1), (0,-1), (\sqrt{3},1), (\sqrt{3},-1), (-\sqrt{3},1), (-\sqrt{3},-1)$.

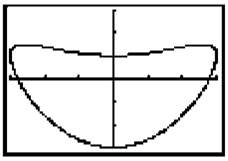
c De snelheid is de lengte van pijl v en die is te berekenen met de stelling van Pythagoras.

d $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos\frac{1}{3}\pi = 1$ en $\dfrac{dy}{dt} = -3\sin\pi = 0$

$v\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

e In een keerpunt geldt $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$ dus $v = 0$.

25a



$v_x = \frac{dx}{dt} = 3\cos\pi = -3$ is de snelheid in horizontale richting en
$v_y = \frac{dy}{dt} = -2\sin\pi + 2\sin 2\pi = 0$ is de snelheid in verticale richting.

b $\frac{dx}{dt} = 3\cos\frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{dt} = -2\sin\frac{1}{3}\pi + 2\sin\frac{2}{3}\pi = 0$ dus $v(\frac{1}{3}\pi) = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + 0^2} = 1\frac{1}{2}$

bladzijde 47

26a $\frac{dx}{dt} = 2\cos t + 2\cos 2t = 0$ geeft met de grafische rekenmachine $t \approx 1{,}05$, $t = \pi$ en $t \approx 5{,}24$

$\frac{dy}{dt} = -2\sin t + 2\sin 2t = 0$ geeft met de grafische rekenmachine $t = 0$, $t \approx 1{,}05$, $t = \pi$, $t \approx 5{,}24$ en $t = 2\pi$

De keerpunten zijn bij $t \approx 1{,}05$ $(2{,}60;1{,}50)$, bij $t = \pi$ $(0,-3)$ en bij $t \approx 5{,}24$ $(-2{,}60;1{,}50)$.
Punt P is dus $(2{,}60;1{,}50)$.

b Zie onderdeel a.

c Voor $t = 1{,}051$ geldt

$\frac{dx}{dt} \approx -0{,}01974$ en $\frac{dy}{dt} \approx -0{,}01144$

De helling in P is $\frac{dy}{dx} \approx \frac{-0{,}01144}{-0{,}01974} \approx 0{,}58$.

d Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = -2$ en $\frac{dy}{dt} = -2$ dus de baansnelheid is $v(\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$

27a $x = 0$ geeft $\sin t = 0$ dus $t = 0$, $t = \pi$ of $t = 2\pi$

$t = 0$ en $t = 2\pi$ geven $(0,\sqrt{2}) \approx (0;1{,}41)$ en $t = \pi$ geeft $(0,-\sqrt{2}) \approx (0;\ -1{,}41)$

$y = 0$ geeft $\cos(t - \frac{\pi}{4}) = 0$ dus $t = \frac{3}{4}\pi$ of $t = 1\frac{3}{4}\pi$

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft $(1\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0) \approx (2{,}12;\ 0)$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$ geeft $(-1\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0) \approx (-2{,}12;\ 0)$

b $\frac{dx}{dt} = 3\cos t = 0$ voor $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$

Verticale raaklijn in $(3,\sqrt{2}) \approx (3;\ 1{,}41)$ en $(-3,-\sqrt{2}) \approx (-3;\ -1{,}41)$.

$\frac{dy}{dt} = -2\sin(t - \frac{\pi}{4}) = 0$ voor $t = \frac{1}{4}\pi$ of $t = 1\frac{1}{4}\pi$

Horizontale raaklijn in $(1\frac{1}{2}\sqrt{2}, 2)$ en $(-1\frac{1}{2}\sqrt{2}, -2)$.

c Je kunt de kromme in omgekeerde richting laten lopen door t te vervangen door $2\pi - t$.
Je krijgt dan $x = 3\sin(2\pi - t)$ en $y = 2\cos((2\pi - t) - \frac{\pi}{t})$.

d Voor $t = 2$ geldt $\frac{dx}{dt} \approx -1{,}2484$ en $\frac{dy}{dt} \approx -1{,}8745$ dus de baansnelheid is $v \approx \sqrt{(-1{,}2484)^2 + (-1{,}8745)^2} \approx 2{,}25$.

28a Er zijn vier punten met een horizontale raaklijn en twee punten met een verticale raaklijn.

b $\frac{dy}{dt} = -\sin t(2\cos t + 1) + (\cos t - 1) \cdot -2\sin t = -4\sin t\cos t + \sin t = \sin t(-4\cos t + 1) = 0$ als

$\sin t = 0$ of $\cos t = \frac{1}{4}$ dus $t = 0$ of $t = \pi$ of $t = 2\pi$ of $t \approx 1{,}32$ of $t \approx 4{,}97$

$t = 0$ en $t = 2\pi$ geeft $(0,0)$

$t = \pi$ geeft $(0,2)$

$t \approx 1{,}32$ geeft $(2{,}90; -1{,}125)$

$t \approx 4{,}97$ geeft $(-2{,}90; -1{,}125)$

c $\frac{dx}{dt} = 3\cos t = 0$ voor $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ geldt $v = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ en

voor $t = 1\frac{1}{2}\pi$ geldt $v = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$.

d $y = (\cos t - 1)(2\cos t + 1) = 0$ als $\cos t = 1$ of $\cos t = -\frac{1}{2}$ dus $t = 0$ of $t = 2\pi$ of $t = \frac{2}{3}\pi$ of

$t = 1\frac{1}{3}\pi$

Voor $t = 0$ of $t = 2\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = 3$ en $\frac{dy}{dt} = 0$ dus $v = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$.

Voor $t = \frac{2}{3}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = -1\frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{dt} \approx 2{,}60$ dus $v \approx \sqrt{(-1\frac{1}{2})^2 + (2{,}60)^2} \approx 3{,}00$.

Voor $t = 1\frac{1}{3}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = -1\frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{dt} \approx -2{,}60$ dus $v \approx \sqrt{(-1\frac{1}{2})^2 + (-2{,}60)^2} \approx 3{,}00$.

2.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 48

29a $-2 \le x \le 2$ en $-1 \le y \le 1$

b De periode is 2π want $1 \times 2\pi = 2 \times \pi$.

c $\frac{dx}{dt} = -2\sin t = 0$ voor $t = 0$, $t = \pi$ of $t = 2\pi$

Verticale raaklijn voor $t = 0$ en $t = 2\pi$ in $(2,0)$ en voor $t = \pi$ in $(-2,0)$.

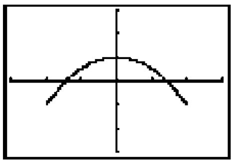
$\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t = 0$ voor $t = \frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$, $t = 1\frac{1}{4}\pi$ of $t = 1\frac{3}{4}\pi$

Horizontale raaklijn voor $t = \frac{1}{4}\pi$ in $\left(\sqrt{2},1\right)$, voor $t = \frac{3}{4}\pi$ in $\left(-\sqrt{2},-1\right)$, voor $t = 1\frac{1}{4}\pi$ in $\left(-\sqrt{2},1\right)$ en voor $t = 1\frac{3}{4}\pi$ in $\left(\sqrt{2},-1\right)$.

d Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ geldt $(0,0)$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft $\frac{dx}{dt} = -2$ en $\frac{dy}{dt} = -2$ dus $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{-2} = 1$ waaruit volgt dat $y = x$ de vergelijking van de raaklijn is.

$t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $\frac{dx}{dt} = 2$ en $\frac{dy}{dt} = -2$ dus $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{2} = -1$ waaruit volgt dat $y = -x$ de vergelijking van de raaklijn is.

e 

Voor $t = \frac{3}{4}\pi$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = -2\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = 0$ en $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t = 0$.

$t = \frac{3}{4}\pi$ geeft keerpunt $(-2,-1)$ en $t = 1\frac{3}{4}\pi$ geeft keerpunt $(2,-1)$

30a $x = 2\cos\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$ voor $t = \frac{1}{6}\pi$ of $t = 1\frac{1}{6}\pi$

Beide waarden geven $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ ofwel $(0;0,87)$.

b $y = \sin 2t = 0$ geeft $t = 0$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = 2\pi$

$t = 0$ en $t = 2\pi$ geven $(1,0)$

$t = \frac{1}{2}\pi$ geeft $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ ofwel $(-1,73;0)$

$t = \pi$ geeft $(-1,0)$

$t = 1\frac{1}{2}\pi$ geeft $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ ofwel $(1,73;0)$

c Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = -2\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = -1$ en $\frac{dy}{dt} = 2\cos\left(2 \times \frac{1}{2}\pi\right) = -2$ dus

$v = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

bladzijde 49

31a $x = 10\cos t$ en $y = 10\sin t$ is een cirkel met middelpunt $(0,0)$ en straal 10.
Om middelpunt $(0,14)$ te krijgen geldt dus $y = 10\sin t + 14$. Op $t = 0$ start de kromme in $(10,14)$. Om de kromme in $P(-8,8)$ te laten starten moet gelden $x(0) = 10\cos(0 + a) = -8$ waaruit volgt dat $a \approx 3,785$.

b De bewegingsrichting van A is linksom dus B draait met de klok mee.
De omtrek van de kleine cirkel is 10π en de periode is π dus de baansnelheid is $\frac{10\pi}{\pi} = 10$ m/s.

c $x = -12 + 5\cos(2t + a)$ en $y = 5 - 5\sin(2t + a)$

$x(0) = -8$ geeft $\cos a = 0,8$ dus $a \approx -0,644$

$y(0) = 8$ geeft $\sin a = -0,6$

dus $a \approx -0,644$ of $a \approx 3,785$

Als $a \approx -0,644$ start c_2 in $P(-8,8)$ en geldt $x = -12 + 5\cos(2t - 0,644)$ en $y = 5 - 5\sin(2t - 0,644)$.

d $y = 5 - 5\sin(2t - 0,644) = 0$ geeft $\sin(2t - 0,644) = 1$ dus $2t - 0,644 = \frac{1}{2}\pi$ ofwel $t \approx 1,107$

$\frac{dx}{dt} = -10\sin(2 \times 1,107 - 0,644) = -10$. Zie ook opdracht b.

e De snelheid waarmee C over de x-as beweegt is gelijk aan de snelheid van c_2 in punt Q dus 10 m/s.

ICT Families van Lissajousfiguren

bladzijde 50

I-1a L is een deel van een parabool en K is een cirkel als de schaalverdeling op beide assen hetzelfde is.

b -

c K: de periode van zowel x als y is π dus de gemeenschappelijke periode is π.
L: de periode van x is π en van y is de periode 2π dus de gemeenschappelijke periode is 2π.

I-2a De periode van x is $\frac{2\pi}{2}=\pi$ en van y is $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ de periode. De periode van K is 2π want $2\times\pi=3\times\frac{2}{3}\pi=2\pi$.

b $x=3\cos 2t=0$ voor $t=\frac{1}{4}\pi$, $t=\frac{3}{4}\pi$, $t=1\frac{1}{4}\pi$ en $t=1\frac{3}{4}\pi$
De snijpunten met de y-as zijn $\left(0,\sqrt{2}\right)$ ofwel $(0;1,41)$ voor $t=\frac{1}{4}\pi$ en $t=\frac{3}{4}\pi$ en $\left(0,-\sqrt{2}\right)$ ofwel $(0;-1,41)$ voor $t=1\frac{1}{4}\pi$ en $t=1\frac{3}{4}\pi$
$y=2\sin 3t=0$ voor $t=0$, $t=\frac{1}{3}\pi$, $t=\frac{2}{3}\pi$, $t=\pi$, $t=1\frac{1}{3}\pi$, $t=1\frac{2}{3}\pi$ en $t=2\pi$
De snijpunten met de x-as zijn $(3,0)$ voor $t=0$, $t=\pi$ en $t=2\pi$ en $(-1\frac{1}{2},0)$ voor $t=\frac{1}{3}\pi$, $t=\frac{2}{3}\pi$, $t=1\frac{1}{3}\pi$ en $t=1\frac{2}{3}\pi$.

c $S(-1\frac{1}{2},0)$

I-3a $x=3-\cos 2t$ dus $\cos 2t=3-x$
Substitutie in $y=1+2\cos 2t$ geeft $y=1+2(3-x)$ dus $y=-2x+7$.

b De x-waarden lopen van $3-1=2$ tot en met $3+1=4$.

c $x=2\sin t-1$ dus $\sin t=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
Substitutie in $y=\sin^2 t$ geeft $y=(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

d De x-waarden lopen van $-2-1=-3$ tot en met $2-1=1$ dus domein $[-3,1]$.

e Een mogelijk domein is $[\frac{1}{2}\pi,1\frac{1}{2}\pi]$.

bladzijde 51

I-4a $\frac{dx}{dt}=6\cos 2t=0$ voor $t=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{1}{2}\pi$
Verticale raaklijn voor $t=\frac{1}{4}\pi$ in $(3;-1,41)$, voor $t=\frac{3}{4}\pi$ in $(-3;1,41)$, voor $t=1\frac{1}{4}\pi$ in $(3;1,41)$ en voor $t=1\frac{3}{4}\pi$ in $(-3;-1,41)$.
$\frac{dy}{dt}=-6\sin 3t=0$ voor $t=0+k\cdot\frac{1}{3}\pi$
Horizontale raaklijn voor $t=0$ en $t=2\pi$ in $(0,2)$, voor $t=\frac{1}{3}\pi$ in $(2,60;-2)$, voor $t=\frac{2}{3}\pi$ in $(-2,60;2)$, voor $t=\pi$ in $(0,-2)$, voor $t=1\frac{1}{3}\pi$ in $(2,60;2)$ en voor $t=1\frac{2}{3}\pi$ in $(-2,60;-2)$.

b $y = 0$ dus $2\cos 3t = 0$
$\cos 3t = 0$ geeft $3t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
dus $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
Op $[0, 2\pi]$ geldt $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{5}{6}\pi$, $t = \frac{7}{6}\pi$, $t = 1\frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{11}{6}\pi$.
Voor $t = \frac{5}{6}\pi$ en $t = \frac{11}{6}\pi$ geldt $(-2,60; 0)$.
Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ geldt $(0, 0)$.
Voor $t = \frac{1}{6}\pi$ en $t = \frac{7}{6}\pi$ geldt $(2,60; 0)$.

c Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = -6$ en $\frac{dy}{dt} = 6$ dus helling $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{-6} = -1$.
Voor $t = 1\frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt} = -6$ en $\frac{dy}{dt} = -6$ dus helling $\frac{dy}{dx} = \frac{-6}{-6} = 1$.

I-5a Snijpunten met x-as als $y = 2\cos 6t = 0$ dus $6t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ waaruit volgt
$t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{6}\pi$.
$t = \frac{1}{12}\pi$ geeft $(0,78; 0)$, $t = -\frac{1}{12}\pi$ geeft $(-0,78; 0)$, $t = \frac{1}{4}\pi$ geeft $(2,12; 0)$, $t = -\frac{1}{4}\pi$ geeft $(-2,12; 0)$, $t = \frac{5}{12}\pi$ geeft $(2,90; 0)$ en $t = -\frac{5}{12}\pi$ geeft $(-2,90; 0)$.
Snijpunt met y-as als $x = 3\sin t = 0$ dus $t = 0 + k \cdot \pi$.
Elk van deze t-waarden geeft $(0, 2)$.

b $\frac{dx}{dt} = 3\cos t = 0$ en $\frac{dy}{dt} = -12\sin 6t = 0$ voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ die de keerpunten $(3, -2)$ en $(-3, -2)$ opleveren.

c K_1: Periode x is 2π, periode y is 2π, periode K_1 is 2π.
K_2: Periode x is 2π, periode y is π, periode K_2 is 2π.
K_3: Periode x is 2π, periode y is $\frac{2}{3}\pi$, periode K_3 is 2π.

d x loopt van –3 tot en met 3 en y van –2 tot en met 2 dus de rechthoek is 6 bij 4.

e Als a is even dan heeft de kromme keerpunten, als a oneven is is de kromme gesloten.

f Als a is even zijn er $a - 1$ toppen.
K_{100} heeft dus $100 - 1 = 99$ toppen.

I-6a De kromme heeft periode 2π want $2 \times \pi = 3 \times \frac{2}{3}\pi = 2\pi$.

b De krommen vallen samen maar bij dezelfde t-waarden horen verschillende punten op de krommen.

c De krommen zijn elkaars spiegelbeeld in de y-as.

d De vorm is hetzelfde alleen de x-coördinaten verschillen steeds een fractie van elkaar omdat $\frac{1}{2}\pi \approx 1,57$.

I-7a Hoe groter a des te meer golven.

b Keerpunten krijg je als $\frac{dx}{dt} = 0$ en $\frac{dy}{dt} = 0$. Voor K_{345} geldt:
$\frac{dx}{dt} = \cos\frac{1}{3}t = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}t = \frac{1}{2}\pi + k\pi \Rightarrow t = 1\frac{1}{2}\pi + 3k\pi$
$\frac{dy}{dt} = -690\sin 345t$, vul $t = 1\frac{1}{2}\pi + 3k\pi$ in, geeft:
$\frac{dy}{dt} = -690\sin 345 \cdot (1\frac{1}{2}\pi + 3k\pi) = -690\sin(517\frac{1}{2}\pi + 1035k\pi) \neq 0$, dus geen keerpunten.
Alleen als a is even zijn er keerpunten .

c $y=2$ geeft $2\cos 3t=2$ dus $\cos 3t=1$ waaruit volgt $t=0+k\cdot\frac{2}{3}\pi$
$t=0$ en $t=6\pi$ geven dezelfde uitkomst voor x en $t=\frac{2}{3}\pi$, $t=1\frac{1}{3}\pi$, $t=2\pi$, $t=2\frac{2}{3}\pi$,
$t=3\frac{1}{3}\pi$, $t=4\pi$, $t=4\frac{2}{3}\pi$ en $t=5\frac{1}{3}\pi$ geven nog acht andere uitkomsten voor x

d Er zijn geen keerpunten dus a is oneven.
Voor $a=5$ krijg je dezelfde kromme.

Test jezelf

bladzijde 54

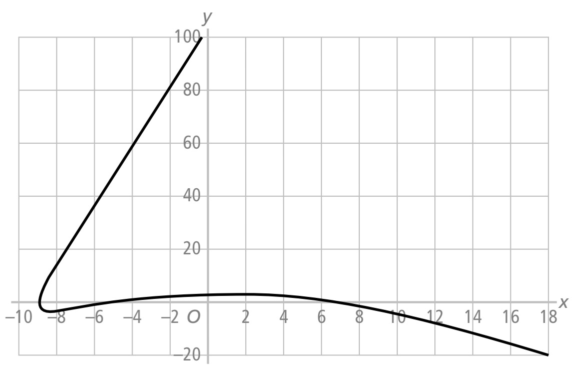
T-1a $y=t^3-4t=t\left(t^2-4\right)=0$ als $t=0$ of $t=2$ of $t=-2$
$x(0)=-5$, $x(2)=-9$ en $x(-2)=7$ dus de snijpunten met de x-as zijn $(-5,0)$, $(-9,0)$ en $(7,0)$.

b $x=t^2-4t-5=(t-5)(t+1)=0$ als $t=5$ of $t=-1$
$y(5)=105$ en $y(-1)=3$ dus de snijpunten met de y-as zijn $(0,3)$ en $(0,105)$

c Het minimum van x is -9 dus $x\geq -9$.

d Uit de plot van $y=t^3-4t$ volgt dat y alle waarden uit $\mathbb{R}$ kan aannemen.

e



T-2a $\frac{dx}{dt}=-32\sin 4t=0$ én $\frac{dy}{dt}=15\cos 3t=0$ als $t=\frac{1}{2}\pi$ of $t=1\frac{1}{2}\pi$. De keerpunten zijn $(8,-5)$ voor $t=\frac{1}{2}\pi$ en $(8,5)$ voor $t=1\frac{1}{2}\pi$.

b De bewering is niet volledig want er moet ook gelden dat $\frac{dx}{dt}\neq 0$.

c In dit keerpunt is $t=1\frac{1}{2}\pi\approx 4{,}7124$.
Voor $t=4{,}712$ geldt $\frac{dx}{dt}\approx 0{,}049789$ en $\frac{dy}{dt}\approx 0{,}01750$.
De helling in $(8,5)$ is $\frac{dy}{dx}\approx\frac{0{,}017504}{0{,}049789}\approx 0{,}352$.

T-3a $x\left(\frac{1}{2}\pi\right)=y\left(\frac{1}{2}\pi\right)=1$, dus $(1,1)$ op de kromme voor $t=\frac{1}{2}\pi$.
$\frac{dx}{dt}=\cos t-2\cos 2t$ en $\frac{dy}{dt}=-\sin t+2\sin 2t$
Voor $t=\frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt}=2$ en $\frac{dy}{dt}=-1$ dus $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$.

b $x=\sin t-\sin 2t=0$ levert met de rekenmachine $t=0$ of $t\approx 1{,}05$ of $t=\pi$ of $t\approx 5{,}24$ of $t=2\pi$.
$t\approx 1{,}05$ en $t\approx 5{,}24$ geven allebei punt $(0,1)$

c Snijpunten met de y-as voor $t=0$ of $t \approx 1{,}05$ of $t=\pi$ of $t \approx 5{,}24$ of $t=2\pi$. De bijbehorende punten zijn $(0,0)$, $(0,1)$ en $(0,-2)$.
Snijpunten met de x-as als $y=\cos t-\cos 2t=0$.
Met de rekenmachine vind je $t=0$ of $t \approx 2{,}09$ of $t \approx 4{,}19$ of $t=2\pi$. De bijbehorende punten zijn $(0,0)$, $(1{,}73;0)$ en $(-1{,}73;0)$.

d Horizontale snelheid $=\frac{dx}{dt}=\cos t-2\cos 2t$.
Verticale snelheid $=\frac{dy}{dt}=-\sin t+2\sin 2t$.

e Voor $t=1\frac{1}{2}\pi$ geldt $\frac{dx}{dt}=2$ en $\frac{dy}{dt}=1$ dus de baansnelheid is $v=\sqrt{2^2+(1)^2}=\sqrt{5}$.

bladzijde 55

T-4a Voor $a=0$ geldt $x=\cos t$ en $y=\cos t$ dus $y=x$.
b Voor $a=\pi$ geldt $x=\cos t$ en $y=\cos(t-\pi)=-\cos t$ dus $y=-x$.
c Voor $a=\frac{1}{2}\pi$ geldt $x=\cos t$ en $y=\cos(t-\frac{1}{2}\pi)=\sin t$ dus is de kromme een cirkel.

T-5a $-4 \le x \le 4$ en $-2 \le y \le 2$ dus de kromme past in een rechthoek van 8 bij 4.

b $\frac{dx}{dt}=-4\sin t=0$ voor $t=0+k\cdot\pi$
$\frac{dy}{dt}=6\cos 3(t-a)$ moet ook nul zijn voor $t=0$ dus $6\cos 3(t-a)=0$. Hieruit volgt
$-3a=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$ ofwel $a=-\frac{1}{6}\pi+k\cdot\frac{1}{3}\pi$.
Er moet gelden dat a tussen 0 en π ligt dus $a=\frac{1}{6}\pi$, $a=\frac{1}{2}\pi$ of $a=\frac{5}{6}\pi$.

c $\frac{dx}{dt}=-4\sin t$ en $\frac{dy}{dt}=6\cos 3(t-0{,}7)$
Voor $t=5$ geldt $\frac{dx}{dt} \approx 3{,}835697$ en $\frac{dy}{dt} \approx 5{,}669160$.
De baansnelheid is $v=\sqrt{(3{,}835697)^2+(5{,}669160)^2} \approx 6{,}845$.

d Voor $t=0$ en $t=\pi$ geldt $\frac{dx}{dt}=-4\sin t$ en $\frac{dy}{dt}=6\cos 3(t-\frac{1}{2}\pi)$.
Voor $t=0{,}001$ geldt $\frac{dy}{dx} \approx \frac{-0{,}018}{-0{,}004} \approx 4{,}50$.
Voor $t=\pi+0{,}001$ geldt $\frac{dy}{dx} \approx \frac{0{,}018}{0{,}004} \approx 4{,}50$.
De helling in de keerpunten is dus 4,50.

T-6a Snijpunten met y-as als $x=2\cos t=0$ dus als $t=\frac{1}{2}\pi$ of $t=1\frac{1}{2}\pi$.
$t=\frac{1}{2}\pi$ geeft $(0,3)$ en $t=1\frac{1}{2}\pi$ geeft $(0,-3)$.
Snijpunten met x-as als $y=4\sin^3 t-\sin t=0$.
Met de rekenmachine vind je $t=0$, $t \approx 0{,}52$, $t \approx 2{,}62$, $t=\pi$, $t \approx 3{,}67$, $t \approx 5{,}76$ of $t=\pi$.
Dit geeft als snijpunten met de x-as: $(2,0)$, $(1{,}73;0)$, $(-1{,}73;0)$ en $(-2,0)$.

b $x=1$ geeft $2\cos t=1$ dus $t=\frac{1}{3}\pi$ of $t=1\frac{2}{3}\pi$
De y-waarde moet nul zijn:
$4\sin^3\left(\frac{1}{3}\pi\right)-a\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=0$ waaruit volgt dat $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\left(4\sin^2\left(\frac{1}{3}\pi\right)-a\right)=0$ geeft
$4\cdot\frac{3}{4}-a=0$ dus $a=3$.
$x=-1$ geeft $2\cos t=-1$ dus $t=\frac{2}{3}\pi$ of $t=1\frac{1}{3}\pi$
De y-waarde moet nul zijn:
$4\sin^3\left(\frac{2}{3}\pi\right)-a\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$ waaruit volgt dat $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\left(4\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)-a\right)=0$ geeft
$4\cdot\frac{3}{4}-a=0$ dus $a=3$.
Dus voor $a=3$ gaat de kromme door $(1,0)$ en door $(-1,0)$.

c $x=0$ geeft $t=\frac{1}{2}\pi$ of $t=1\frac{1}{2}\pi$ (zie onderdeel a)
$y=0$ betekent $4\sin^3\left(\frac{1}{2}\pi\right)-a\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)=0$ geeft $a=4$ en $4\sin^3\left(1\frac{1}{2}\pi\right)-a\sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)=0$
geeft $a=4$. Uit een plot blijkt dat voor $a=4$ de kromme raakt in de oorsprong.

d $y=0$: $4\sin^3 t-a\sin t=0$
$\sin t\left(4\sin^2 t-a\right)=0$
$\sin t=0$ of $\sin^2 t=\frac{1}{4}a$
$\sin t=0$ geeft $t=0$, $t=\pi$ of $t=2\pi$ dus $(2,0)$ en $(-2,0)$
$\sin^2 t=\frac{1}{4}a$ heeft geen oplossingen voor $a>4$.
Dus als $a>4$ zijn er twee snijpunten met de x-as.

e Als $a=4$ geldt $\sin^2 t=1$ dus $t=\frac{1}{2}\pi$ of $t=1\frac{1}{2}\pi$.
Deze t-waarden geven allebei punt $(0,0)$.
Er zijn dus drie snijpunten met de x-as als $a=4$.
Voor $0<a<4$ heeft $\sin^2 t=\frac{1}{4}a$ vier oplossingen die twee verschillende snijpunten met de x-as geven anders dan $(2,0)$ en $(-2,0)$.
Dus als $0<a<4$ zijn er vier snijpunten met de x-as.