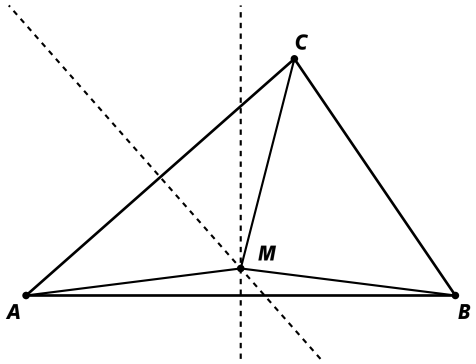
Hoofdstuk 3 - Conflictlijnen

Voorkennis: Meetkundige plaatsen

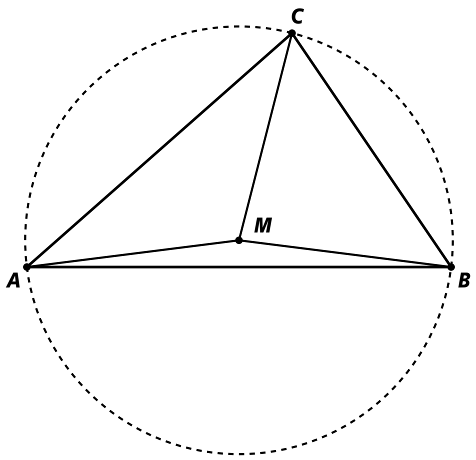
bladzijde 78

V-1a



b M ligt op middelloodlijn van AB, dus $|BM| = |AM|$. Verder ligt M op middelloodlijn van AC, dus is ook $|AM| = |CM|$. Hieruit volgt dat $|BM| = |CM|$ en M ligt dus ook op de middelloodlijn van BC.

c



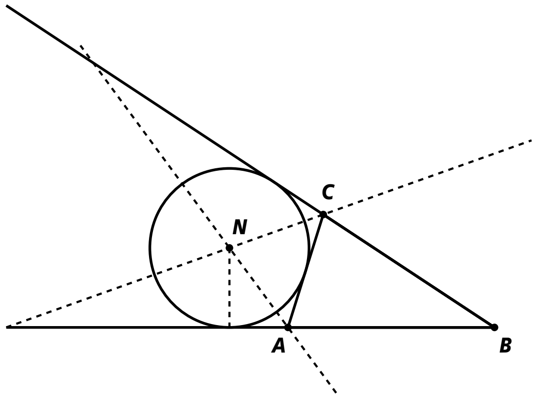
V-2a De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. Dit betekent dat bijvoorbeeld $NR \perp AC$ en $NP \perp AB$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle ARN = \angle APN = 90^0 \\ |RN| = |PN| \\ |AN| = |AN| \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ANR \cong \triangle ANP \ (ZZR) \ \Rightarrow \angle NAR = \angle NAP \text{ en ligt } N \text{ op de}$$

bissectrice van $\angle A$.
Op vergelijkbare wijze is in te zien dat $\triangle BNQ \cong \triangle BNP$ (ZZR) en dus ligt N ook op de bissectrice van $\angle B$.

b Bij het bewijs dat $\triangle ANR \cong \triangle ANP$ (ZZR) en $\triangle BNQ \cong \triangle BNP$ (ZZR).

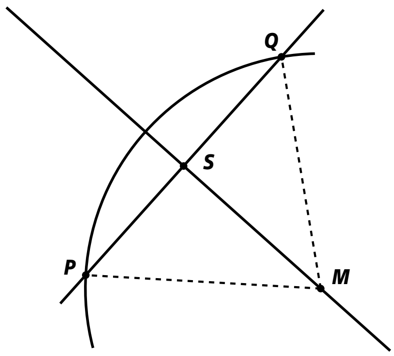
c Teken de bissectrices van de buitenhoeken van $\angle A$ en $\angle C$. Deze snijden in punt N, het middelpunt van de gevraagde cirkel. d (N, AB) is de straal.



V-3a

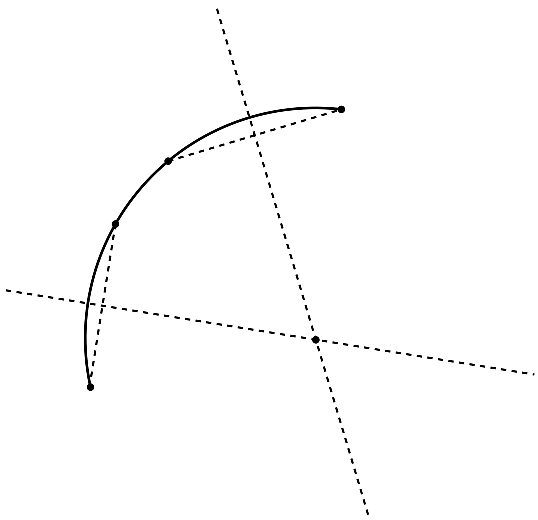
$$\left.\begin{array}{l}\angle MSP = \angle MSQ = 90^0 \\ |MP| = |MQ| \\ |MS| = |MS|\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MSP \cong \triangle\text{n}MSQ\ (ZZR).$$

Daaruit volgt dat $|PS| = |QS|$.



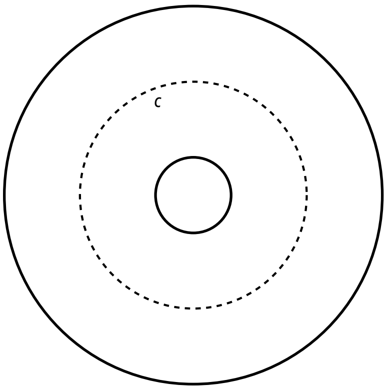
b Een loodlijn door het midden van een koorde is niets anders dan de middelloodlijn van die koorde. Omdat de uiteinden van de koorden op de cirkelboog liggen zijn ze even ver van het middelpunt verwijderd (namelijk afstand straal) en ligt het middelpunt dus op de middelloodlijn van de koorde.

c



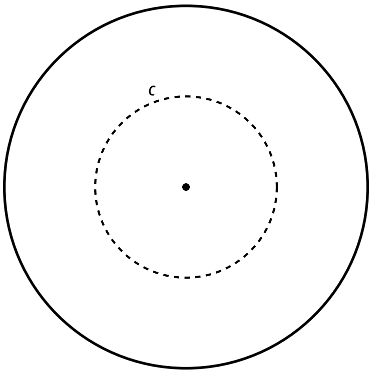
Kies twee koorden op de cirkelboog, construeer bijhorende middelloodlijnen. Het snijpunt van deze middelloodlijnen is het gezochte middelpunt.

V-4a



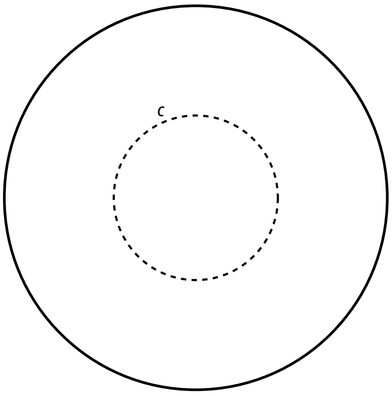
De gevraagde meetkundige plaats bestaat uit twee cirkels met hetzelfde middelpunt als c, één met straal 1 en één met straal 5.

b



De meetkundige plaats bestaat uit een cirkel met straal 6 en hetzelfde middelpunt als c, samen met het middelpunt van c zelf.

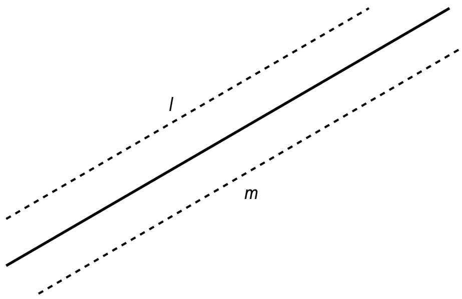
c



De meetkundige plaats bestaat uit een cirkel met straal 7 en hetzelfde middelpunt als c.

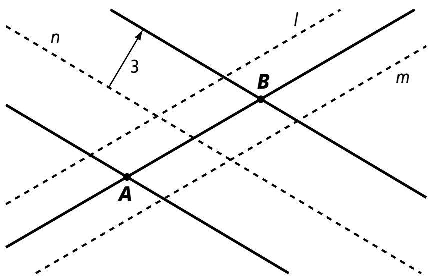
bladzijde 79

V-5ab



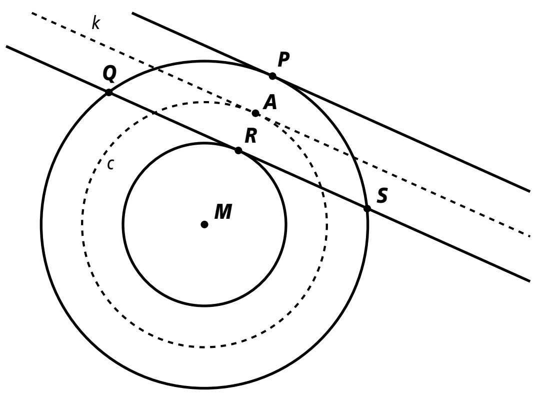
De ononderbroken lijn is de middenparallel, de meetkundige plaats van alle punten op gelijke afstand van l en m.

cd



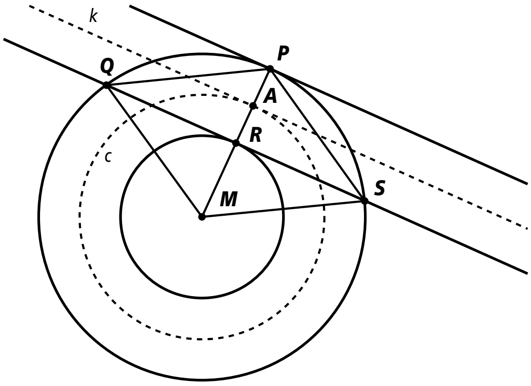
De gevraagde verzameling bestaat nu uit twee punten A en B.

V-6a



De doorsnede van de ononderbroken cirkels en de twee evenwijdige ononderbroken lijnen is de verzameling van de aangegeven vier punten P, Q, R en S .

b



$$\left.\begin{array}{l} MQ = MS = 3 \\ MR = MR \\ \angle MRQ = \angle MRS = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MRQ \cong \triangle MRS \Rightarrow QR = SR$$

$$\left.\begin{array}{l} MR = RP = 2 \\ SR = SR \\ \angle MRS = \angle PRS = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MRS \cong \triangle PRS \Rightarrow MR = PR$$

De diagonalen delen elkaar loodrecht middendoor, dus $MSPQ$ is een ruit.

V-7a Als $\angle ASE = \angle ASB + \angle BSE = 180^\circ$ dan liggen A, S en E op één lijn.
Volgens de koordenvierhoekstelling is $\angle BSE + \angle BDE = 180^\circ$. Verder is $\angle ASB = \angle ACB = \angle BDE = \frac{1}{2}\,\text{bg}AB$, dus is inderdaad $\angle ASE = \angle ASB + \angle BSE = 180^\circ$ en liggen A, S en E op één lijn.

b 180°

c $\angle ACB = \angle ASB$

d $\angle BSE + \angle BDE = 180^\circ$ en het bewijs verloopt verder zoals bij onderdeel a.

3.1 Afstand tot een gebied

bladzijde 80

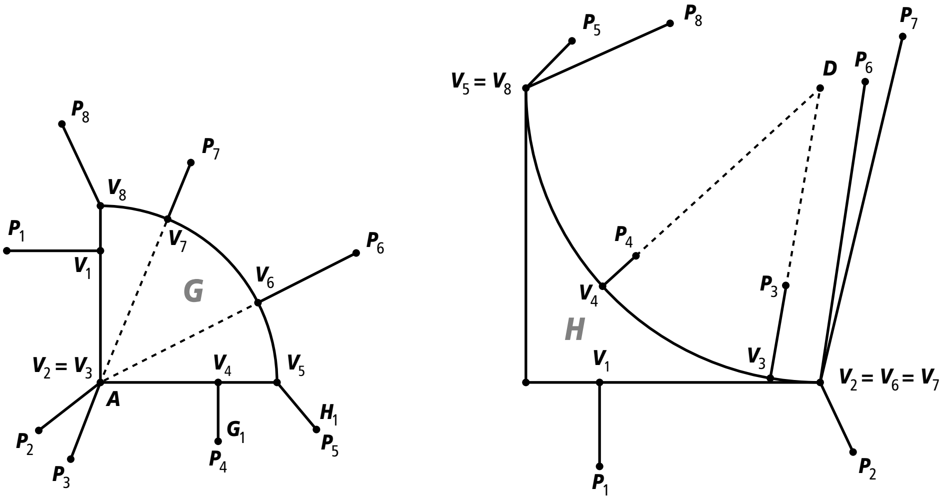
1a Bedoeld wordt de stelling: De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

b De raaklijn in R aan het golffront is ook de raaklijn aan het cirkelvormige eiland. Het lijnstuk PR staat loodrecht op die raaklijn, evenals het lijnstuk RM (zie stelling bij onderdeel a), dus $\angle PRM = 90^0 + 90^0 = 180^0$ en P, R en M moeten op één lijn liggen.

2 Ze zijn loodrecht getekend op de randen van het gebied die aan V_3 grenzen.

bladzijde 81

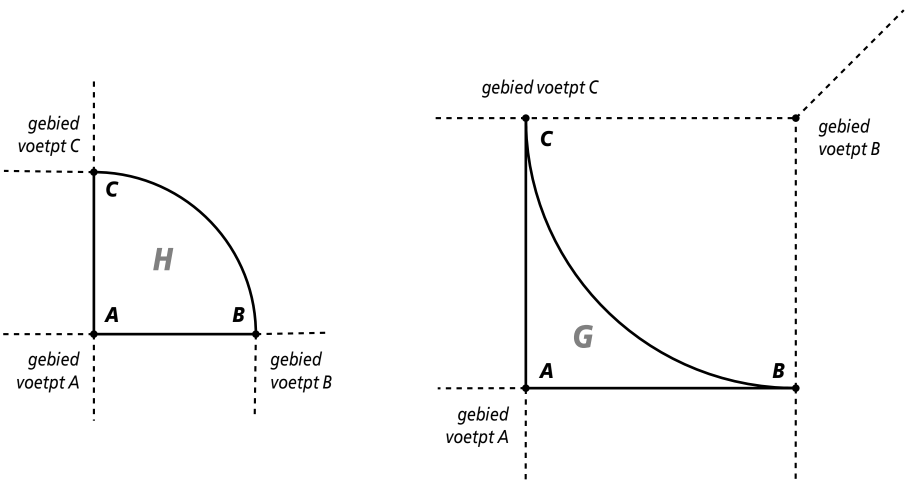
3a



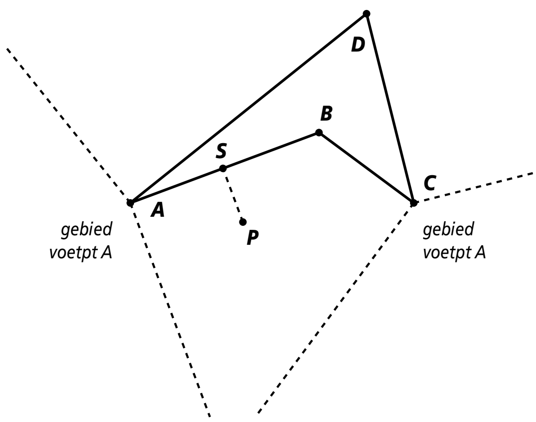
b Voor die punten geldt $d(P,G) = |PA| - (\text{straal kwartcirkel})$.

c Als D het middelpunt is van de kwartcirkel, dan is voor de punten in de gele sector $d(P,H) = (\text{straal kwartcirkel}) - |PD|$.

4abc

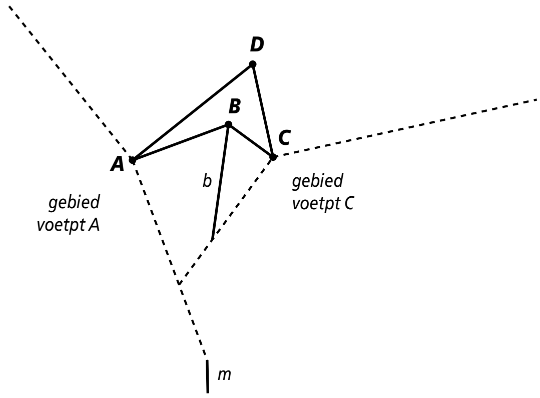


5a Punt B kan geen voetpunt zijn. De gebieden met A en C als voetpunt, zijn in de figuur hiernaast aangegeven. De punten die eventueel nog B als voetpunt zouden kunnen hebben, liggen in het gebied onder B. Voor elk punt P in dat gebied geldt echter dat de afstand tot AB of BC kleiner is dan de afstand tot B, en dus kan B geen voetpunt zijn.



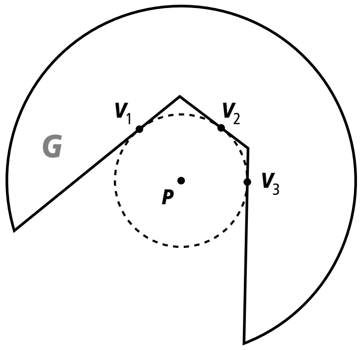
b Er zijn twee mogelijkheden: Of dergelijke punten liggen even ver van A en C en dus op bijbehorende middelloodlijn m, of even ver van de lijnstukken AB en BC en dus op de bissectrice b van $\angle ABC$.

c



Het lijnstuk b , de deellijn van $\angle ABC$ en de halflijn m , de middelloodlijn van AC, vormen samen niet alle punten met precies twee voetpunten. Tussen het eindpunt van lijnstuk b en het begin van de halflijn m zitten ook nog punten met twee voetpunten, namelijk punten met gelijke afstand tot punt C en lijnstuk AB . Verderop in het hoofdstuk ga je ook die punten tekenen.

6 Drie randen van het gebied raken aan een cirkel met middelpunt P .

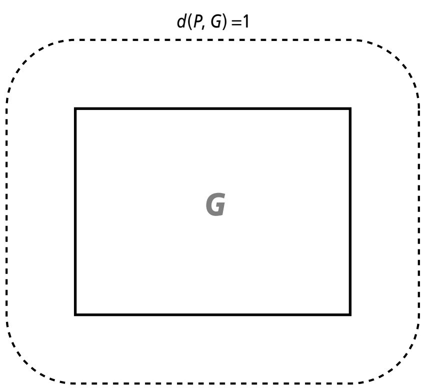


7 De meetkundige plaats van alle punten P met $d(P, G) = 3$ wordt gevormd door een cirkel met M als middelpunt en straal 4.

3.2 Iso-afstandslijnen

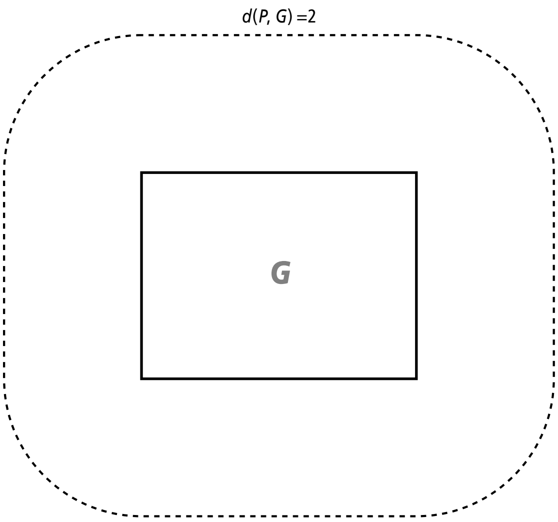
bladzijde 82

8a



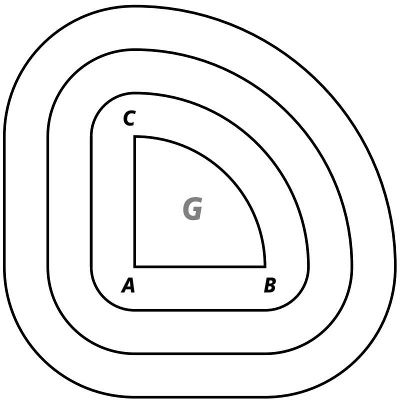
b Deze meetkundige plaats bestaat uit vier lijnstukken en vier kwartcirkels.

c



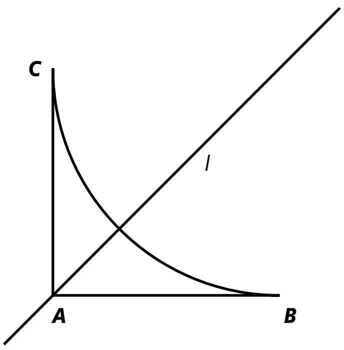
9a gebied 1: kwartcirkels met middelpunt C
gebied 2: lijnstukken evenwijdig aan AC
gebied 3: kwartcirkels met middelpunt A
gebied 4: lijnstukken evenwijdig aan AB
gebied 5: kwartcirkels met middelpunt B
gebied 6: kwartcirkels met middelpunt A maar dan met een straal die 3 langer is dan die van de andere kwartcirkels.

b



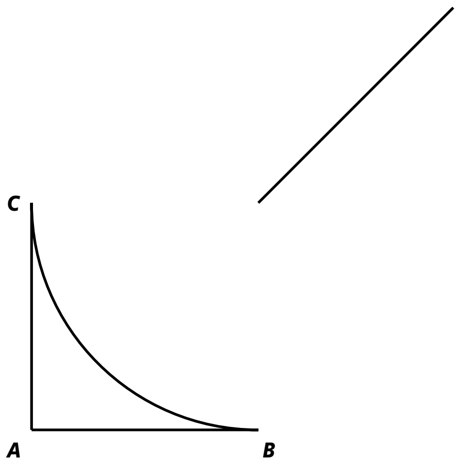
c Als je de achtereenvolgende gebieden langs gaat krijg je
$\frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 2+3+\frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 2+3+\frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 5=6+5\frac{1}{2}\pi$.

10a



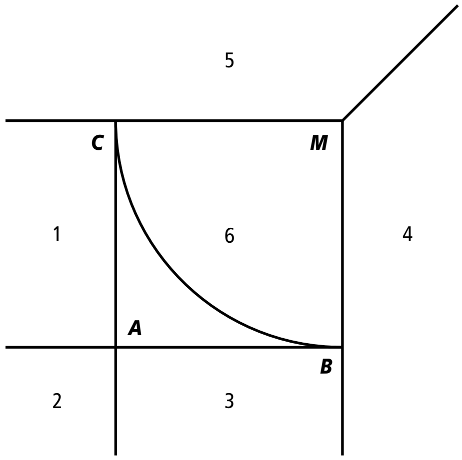
Het gaat hier om de middelloodlijn van BC.

b



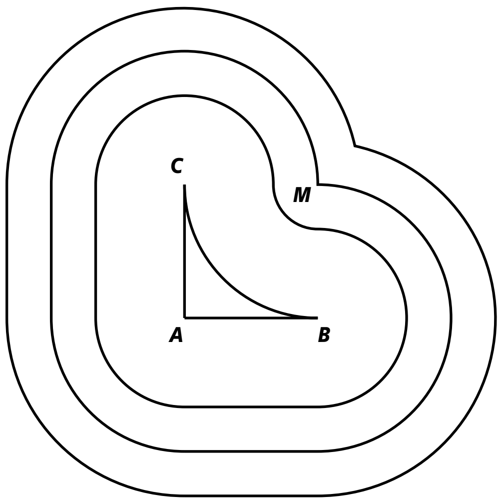
Alleen de punten op de aangegeven halfrechte hebben B en C als voetpunten.

c



gebied 1: lijnstukken evenwijdig aan AC
gebied 2: kwartcirkels met middelpunt A en straal 2.
gebied 3: lijnstukken evenwijdig aan AB
gebied 4: cirkelbogen met middelpunt B en straal 2.
gebied 5: cirkelbogen met middelpunt C en straal 2.
gebied 6: kwartcirkels met middelpunt M en straal 1.

d

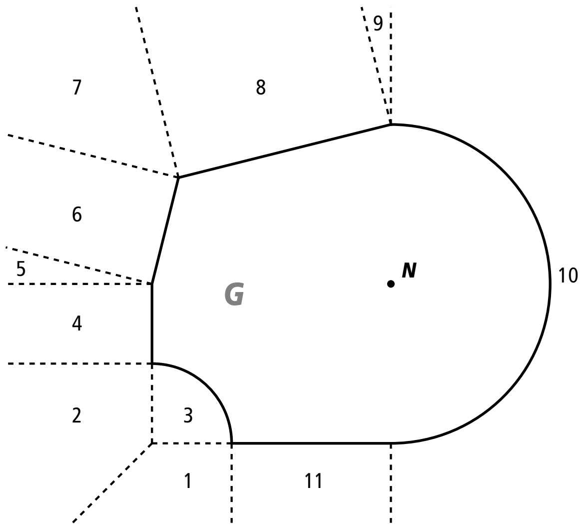


e Als je de achtereenvolgende gebieden langs gaat krijg je

$3+\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 2+3+\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1=6+5\frac{1}{2}\pi$.

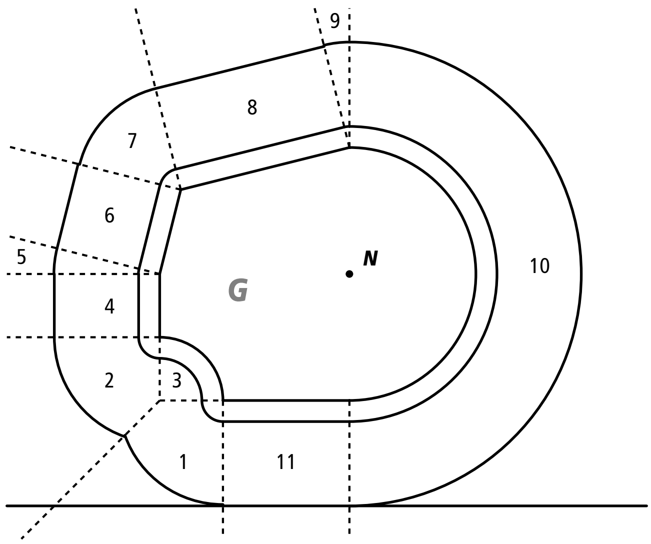
bladzijde 83

11a



Er zijn dus elf sectoren.

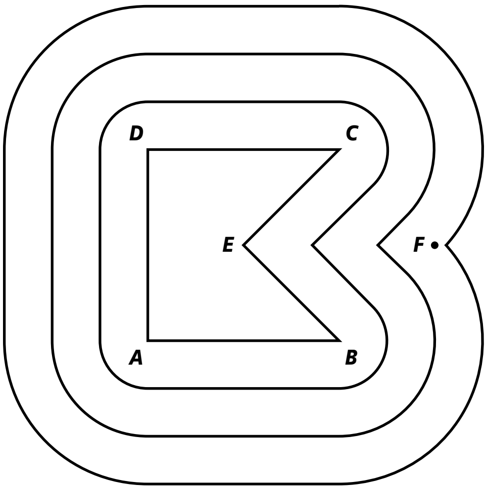
b



c De lengte van de iso-2-lijn bestaat uit de onderdelen behorend bij de gebieden 1 t/m 11.
De cirkelbogen behorend bij gebieden 1, 2, 5, 7 en 9 vormen samen driekwart cirkel met straal 2, de totale lengte voor die gebieden is dus $\frac{3}{4}\cdot 2\pi\cdot 2 = 3\pi$. De cirkelboog bij gebied 3 is een kwartcirkel met straal 1. Bijbehorende lengte is dus $\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 1 = \frac{1}{2}\pi$. Bij gebied 10 hoort een halfcirkel met straal 8, met lengte $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 8 = 8\pi$. De lengte van de rechte stukken bij de gebieden 4, 6, 8 en 11 zijn resp. 3, $\sqrt{17}$, $2\sqrt{17}$ en 6, dus totaal $9+3\sqrt{17}$. De lengte van de iso-2-lijn is dan $3\pi+\frac{1}{2}\pi+8\pi+9+3\sqrt{17} = 9+3\sqrt{17}+11\frac{1}{2}\pi \approx 57{,}50$.

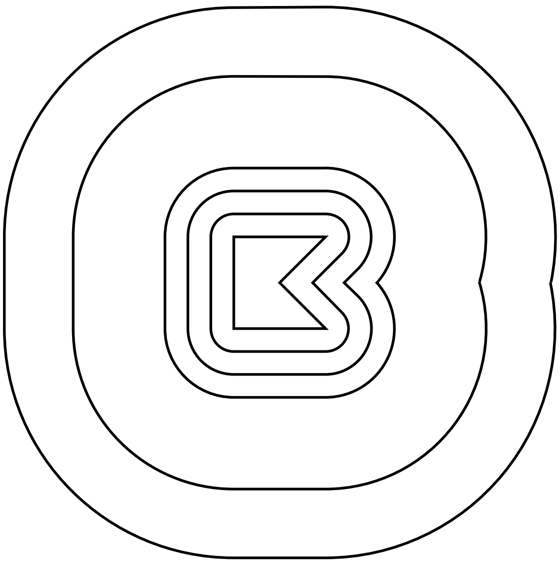
d Voor $0 < a < 3$ bestaat de iso-a-lijn uit zeven cirkelbogen en vier lijnstukken. Voor $a \geq 3$ is er één cirkelboog minder omdat de isolijn dan niet door gebied 3 gaat. Het antwoord is dus $a \geq 3$.

12a



b Aan de figuur hierboven zie je dat de gevraagde waarde van a tussen 2 en 3 moet liggen. De gevraagde waarde van a hoort bij het snijpunt F van de lijn door C loodrecht op EC en de lijn door B loodrecht op EB (zie boven). En dus is de kleinste waarde van a: $a = 2\sqrt{2}$ $(\approx 2{,}83)$.

c



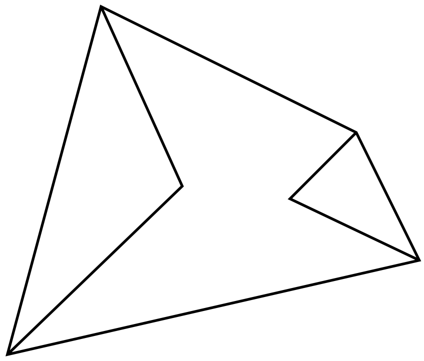
Naast de iso-a- lijnen met $a = 1$, 2, 3 zijn nu ook de iso-7-lijn en de iso-10-lijn getekend. Je ziet dat de bewering in de opgave redelijk klopt.

3.3 Afstanden tot de rand

bladzijde 84

13a Het snijpunt van de drie bissectrices van een driehoek (of driehoekig gat) is even ver van de drie zijden verwijderd.

b



Je kunt deellijnen trekken vanuit de hoeken, maar zoals je hierboven ziet is er geen gemeenschappelijk snijpunt van de vier bissectrices.

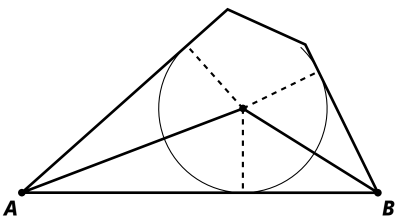
14a Bij een vierkant kun je zo'n punt wel vinden, namelijk het snijpunt van de diagonalen. Een diagonaal is in dit geval namelijk ook tegelijkertijd bissectrice van beide elkaar verbindende hoeken en dus is er inderdaad een gemeenschappelijk snijpunt van de vier bissectrices.

b Bij een rechthoek kan dat in het algemeen niet omdat de vier bissectrices meestal niet door één punt gaan (tenzij het een vierkant is natuurlijk).

c Bij een ruit kun je zo'n M wel vinden, dit is opnieuw het snijpunt van de diagonalen. Een diagonaal is namelijk ook hier tegelijkertijd bissectrice van beide elkaar verbindende hoeken en dus is M het gemeenschappelijke snijpunt van de vier bissectrices.

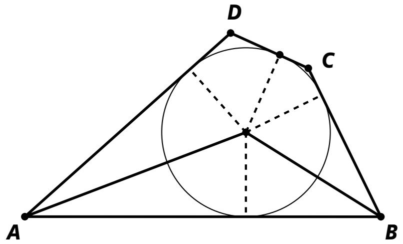
d Bij een parallellogram kan dat in het algemeen niet omdat de vier bissectrices meestal niet door één punt gaan (behalve in het geval van een ruit of vierkant natuurlijk).

15a



De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in een punt dat even ver verwijderd is van drie van de vier zijden van de vierhoek. Dus kan er een cirkel worden getekend die aan deze drie zijden raakt.

b

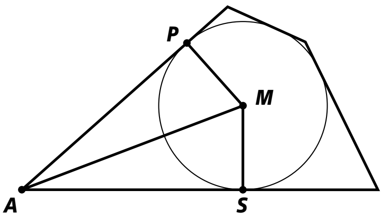


Het lijkt te lukken om hier een cirkel te tekenen die aan alle zijden raakt.

c Het blijkt dat $|AB|+|CD| \approx |AD|+|BC|$.

bladzijde 85

16a Analysefiguur:

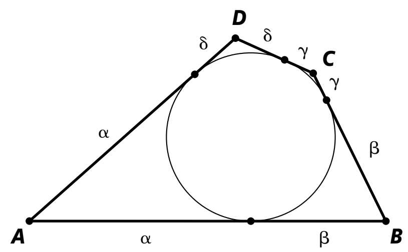


b Dit zijn rechte hoeken. Een raaklijn staat loodrecht op bijbehorende straal.

c $\triangle ASM \cong \triangle APM$ want:

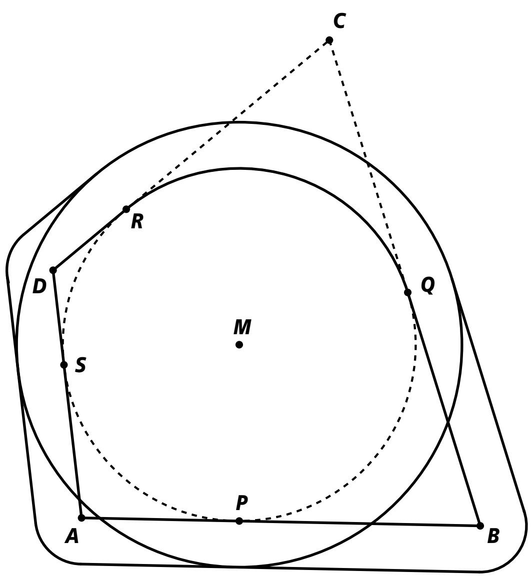
$$\left.\begin{array}{l} |AM| = |AM| \\ |PM| = |SM| \\ \angle APM = \angle APM = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ASM \cong \triangle APM \text{ (ZZR)} \Rightarrow |AP| = |AS| \text{ ,}$$

d



$|AB| + |CD| = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = |AD| + |BC|$, waarmee de eigenschap is bewezen.

17ab



De niet onderbroken cirkel is de cirkel die in onderdeel b wordt gevraagd, de straal van deze cirkel is 1 groter dan de straal van de oorspronkelijke cirkel en heeft middelpunt M.

c Verplaats de vier rechte lijnstukken van de buitenkant van gebied G over een afstand a van M af . Je krijgt dan precies de rechte lijnstukken van de iso $- a -$ lijn en verder onderling een even grote afstand hebben tot M. Er is dan dus een cirkel die al deze lijnstukken raakt, met middelpunt M en een straal die a groter is dan de oorspronkelijke cirkel.

d $\angle MRC + \angle MQC = 90^0 + 90^0 = 180^0$, dus vierhoek $MQCR$ is koordenvierhoek.

e Stel $|RC| = |QC| = x$. Vierhoek $ABCD$ is een raaklijnenvierhoek, dus is

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$. Omdat $|CD| = |DR| + x$ en $|BC| = |BQ| + x$ geldt dus ook

$|AB| + |DR| + x = |AD| + |BQ| + x$. Hieruit volgt $|AB| + |DR| = |AD| + |BQ|$ en dus

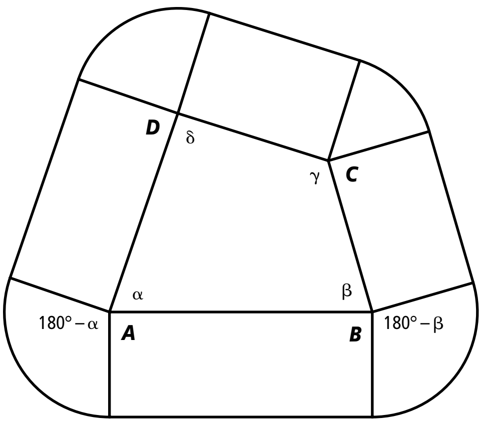
$|AD| - |AB| = |DR| - |BQ|$.

18a Zoals je bij de uitwerkingen van opgaven 9 t/m 12 ook ziet worden de grillige contouren van een gebied bij iso-a-lijnen voor grotere a steeds meer afgerond. Deze afronding heeft te maken met het feit dat de ligging van een isolijn vooral samenhangt met uitsteeksels van een gebied en vrijwel niet met inhammen.

b Deze lijkt in orde.

c Deze lijkt ook in orde.

19ab



De cirkelbogen bij de hoekpunten vormen samen een hele cirkel omdat $(180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta) + (180^0 - \gamma) + (180^0 - \delta) = 720^0 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^0$. De straal is 2 dus de totale lengte van de vier cirkelbogen is $2 \quad \cdot 2 = 4$. De totale lengte van de rechte stukken is $5 + 3 + 3 + 4 = 15$ en de lengte van de iso-2-lijn is dan $15 + 4$.

c Analoog is de exacte lengte van een iso-1000-lijn dan $15 + 2000$.

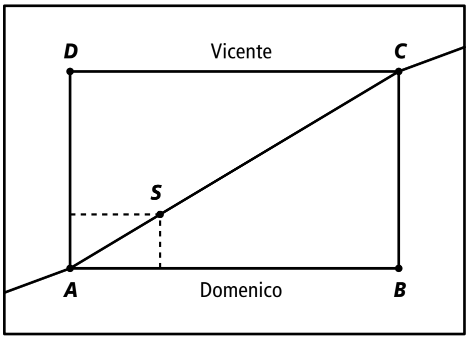
d De exacte lengte van een iso-2000-lijn is $15 + 4000$. De bijdrage 15 in deze uitdrukking legt relatief weinig gewicht in de schaal (iets meer dan 0,1 %), dus is 4000 een redelijke benadering.

e Voor grote a is $\dfrac{\text{lengte iso} - a - \text{lijn}}{a} = \dfrac{15 + 2a}{a} = 2 \quad + \dfrac{15}{a} \approx 2$.

3.4 Conflictlijnen

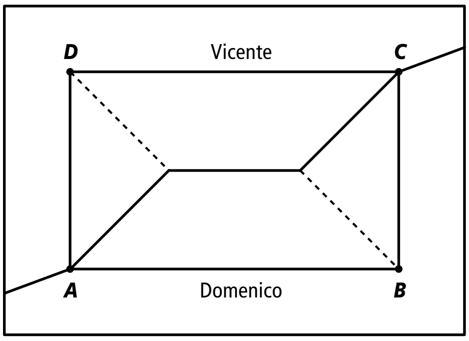
bladzijde 86

20a



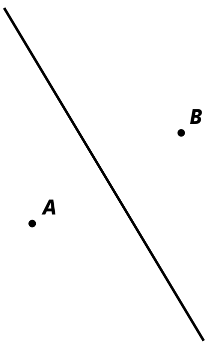
Op deze manier wordt natuurlijk wel evenveel gebied aan Vicente als aan Domenico toegedeeld. Dus aan de voorwaarde van Vicente is voldaan. Aan de voorwaarde van Domenico is niet voldaan omdat bijvoorbeeld punt S dichter bij het gebied van Domenico ligt dan bij het gebied van Vicente.

b

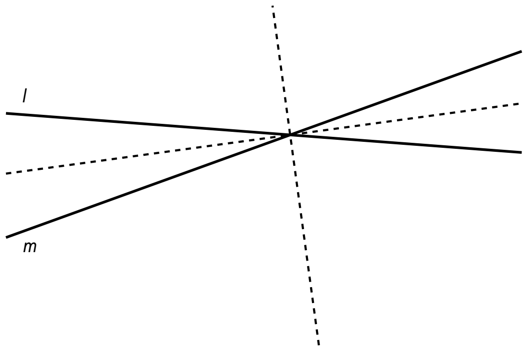


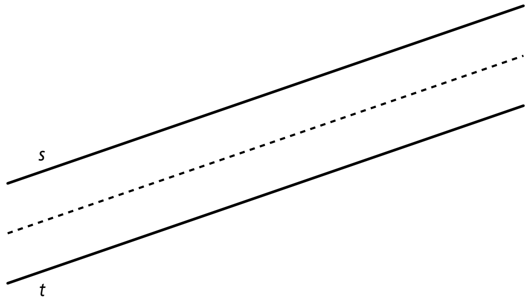
c Vicente kan die grens ook accepteren want de oppervlakten van beide delen zijn gelijk.

21a De middelloodlijn van AB .



b



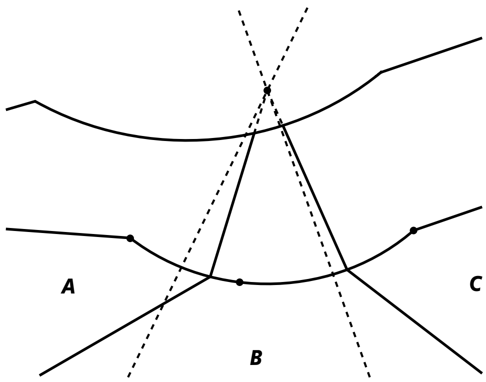


In het geval van twee snijdende lijnen bestaat de conflictlijn uit twee gedeelten, namelijk de bissectrice van de hoek die lijnen maken en die van bijbehorende buitenhoek.
Bij twee evenwijdige lijnen bestaat de conflictlijn maar uit één lijn, namelijk de middenparallel van de twee lijnen.

c Middelloodlijn, twee bissectrices, middenparallel.

bladzijde 87

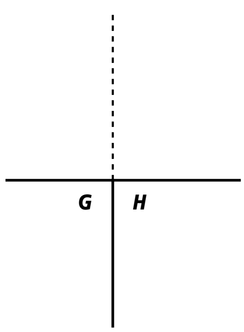
22a



Dat middelpunt vind je bijvoorbeeld door drie punten op de cirkelboog te kiezen en vervolgens daarbij twee middelloodlijnen te tekenen. Het snijpunt van de middelloodlijnen is het gezochte middelpunt.

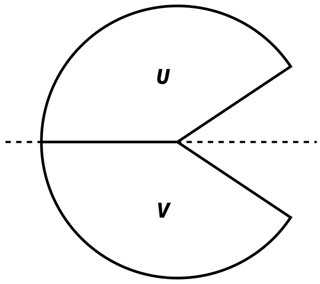
b Vanuit het gevonden middelpunt trek je de conflictlijnen over het aangeslibde land naar de grenspunten tussen de gebieden *A* en *B* en die tussen *B* en *C*.

23a



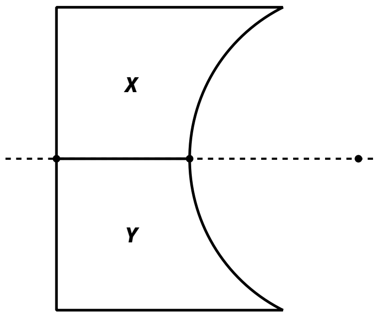
De conflictlijn bestaat hier uit de grenslijn tussen *G* en *H* (ononderbroken halflijn) en de gestippelde halflijn, samen de loodlijn op de horizontale lijn.

b



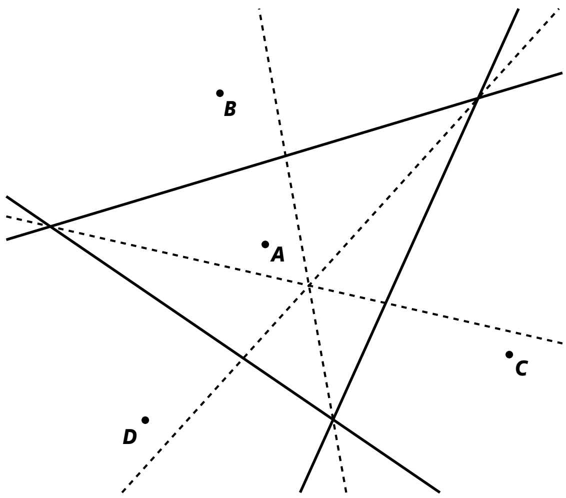
De conflictlijn bestaat hier uit de gestippelde lijn en de grenslijn tussen *U* en *V*, samen de bissectrice van de hoek bij (in dit geval) het middelpunt van de cirkelboog.

c



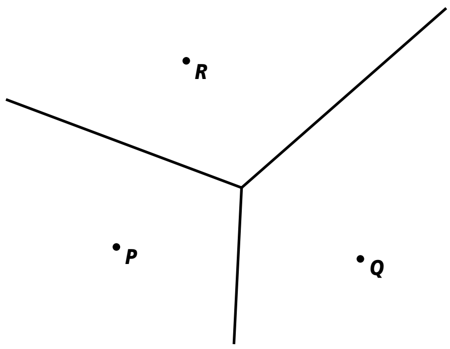
De conflictlijn komt overeen met de getekende straal en het verlengde daarvan.

24abcd



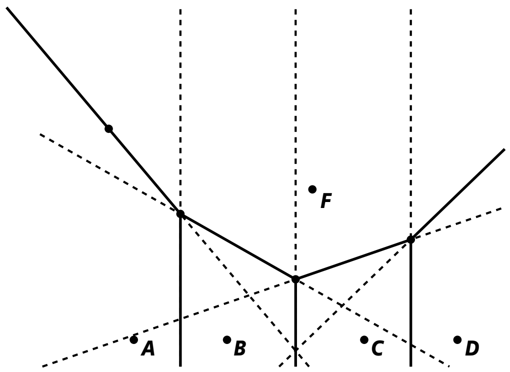
De drie ononderbroken middelloodlijnen sluiten het bij onderdeel c bedoelde driehoekige gebied in.

25a



b Er zijn drie “landen” en er kunnen geen twee punten zijn waar alle drie die landen samenkomen.

26a



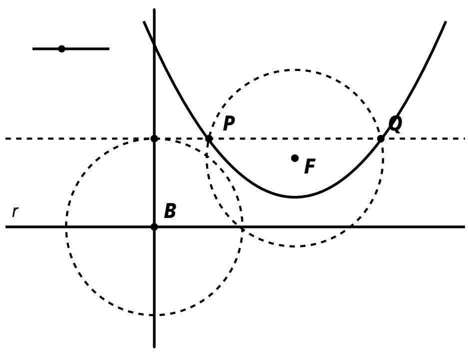
In eerste instantie zijn de relevante middelloodlijnen getekend. Het Voronoi-diagram omvat nu een veelhoekig gebied om F en min of meer evenwijdige stroken om de op één lijn liggende punten. Er zijn hier drie drielandenpunten.

b De conflictlijnen tussen n op een lijn k liggende punten vormen een $(n-1)$-tal evenwijdige halflijnen. De Voronoi-cel om het punt dat niet op k ligt heeft veel maar hoogstens $(n-1)$ hoekpunten.

3.5 Conflictlijnen met GeoGebra

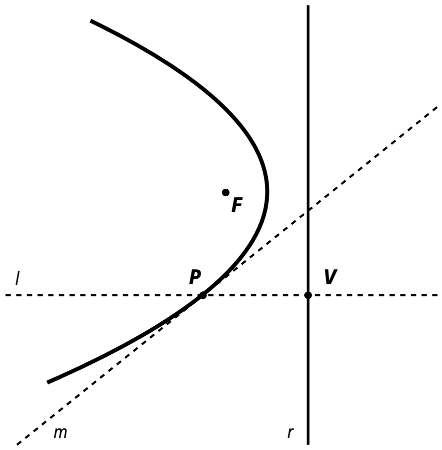
bladzijde 88

27abcd



Als je alle stappen hebt gedaan zie je een plaatje als hierboven.

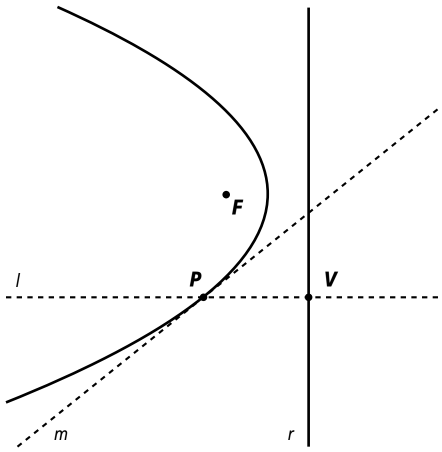
28abcd



Als je alle stappen hebt gedaan zie je een plaatje als hierboven, de conflictlijn lijkt een parabool.

bladzijde 89

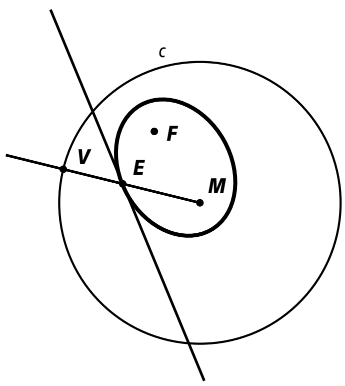
29a



b Als F dichter naar lijn r wordt gewogen dan wordt de parabool spitser.

c Als F aan de aan andere kant van lijn r komt te liggen dan komt wisselt de parabool ook van kant.

30a



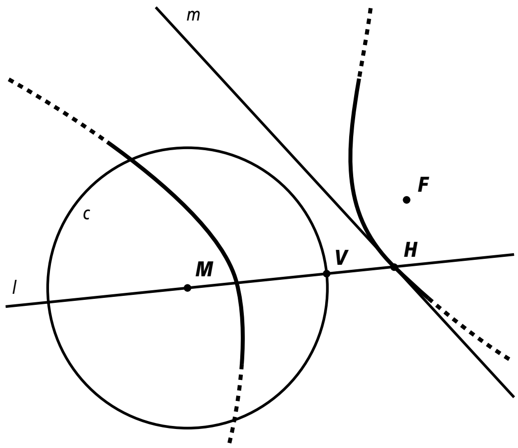
b Zet optie spoor voor punt P uit. Kies meetkundige plaats en klik eerst punt E aan en daarna punt V. Je krijgt dan ongeveer hetzelfde plaatje op als hierboven.

c Als je F in de richting van M verschuift dan krijg je een ellips die steeds meer een op een cirkel lijkt. Als je F en M laat samenvallen wordt het een cirkel met middelpunt $F = M$.

d Je krijgt dan één tak van een hyperbool.

e Met alleen de straal MV had je geen punt gevonden dat bij die meetkundige plaats hoort. Als je een lijn door M en V had getrokken, dan zouden beide takken van een hyperbool zijn verschenen.

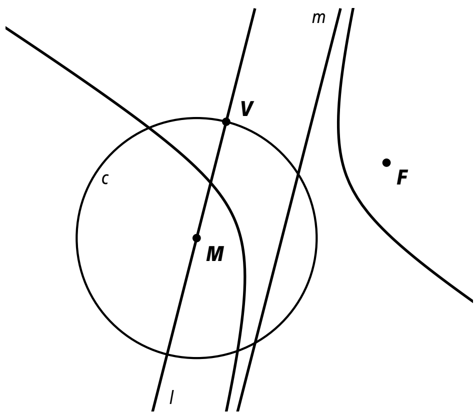
31a



Je krijgt bijvoorbeeld bovenstaande figuur.

b Dit komt omdat er hier een rechte door M en V is getrokken en niet een halfrechte zoals bij opgave 30. Als V en H aan verschillende kanten van M liggen, dan zit je op een punt van de linkertak van de hyperbool.

c



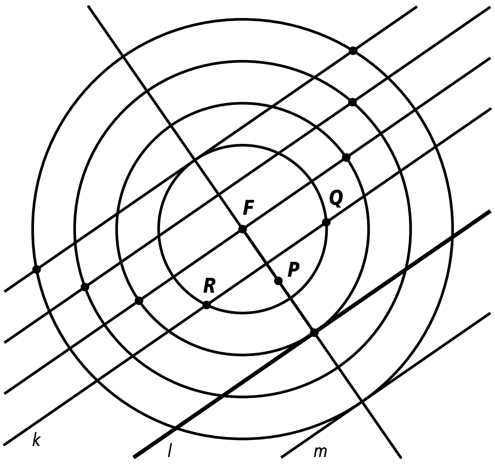
Ze zijn dan evenwijdig.

d Er is een andere positie van V waarbij l en m ook evenwijdig zijn. Dit levert de andere asymptoot op.

3.6 Parabool

bladzijde 90

32a



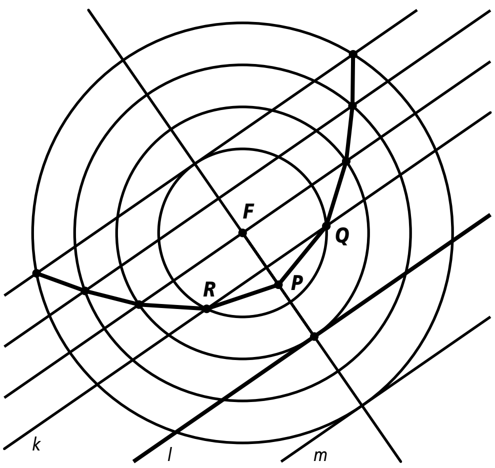
b Dit is punt P, halverwege de loodlijn vanuit F op lijn l.

c De lijnen k en m zijn de iso-2-lijnen van l. Punten die op de conflictlijn van F en l liggen zijn de snijpunten van k met een cirkel met middelpunt F en straal 2, dus de punten Q en R.

d Zie de figuur voor zes nieuwe punten van de conflictlijn.

e De manier van werken om punten van de conflictlijn te vinden is symmetrisch ten opzichte van de loodlijn van F op lijn l.

f

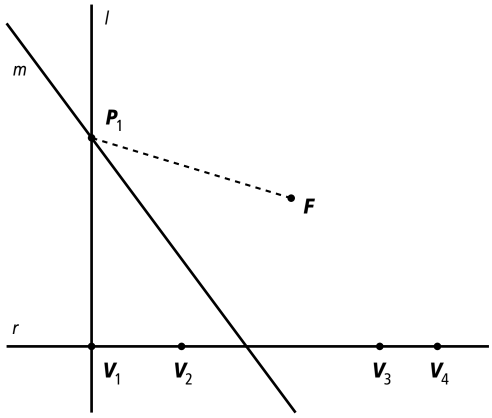


33a Laat een loodlijn neer van F op lijn r. Het snijpunt met r is het voetpunt S. Punt M ligt halverwege tussen F en S.

b De punten L en N vind je door de lijn door F evenwijdig aan r te snijden met de bissectrices van de rechte hoeken bij S, dit zijn tevens de diagonalen van de vierkantjes in de figuur.

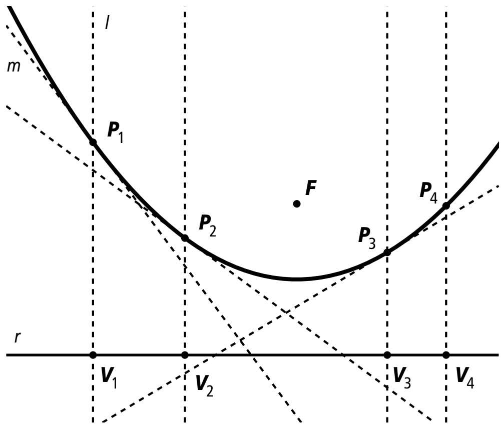
c $|KV| = |KF|$, dus ligt K op de middelloodlijn van V en F.

34a



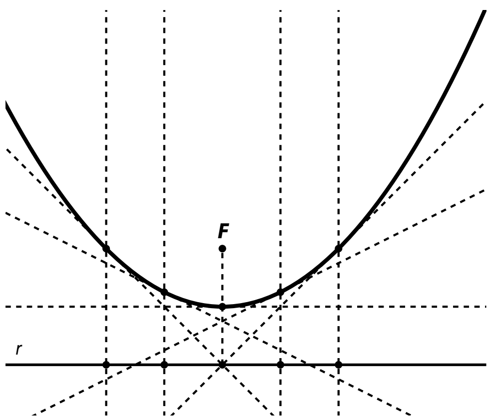
b P_1 ligt op de middelloodlijn van V_1 en F, dus $|P_1F| = |P_1V_1|$.
$|P_1V_1|$ is de loodrechte afstand van P_1 tot r en dus ligt P_1 even ver van F als van r en dus ligt P_1 op de conflictlijn.

cd



bladzijde 91

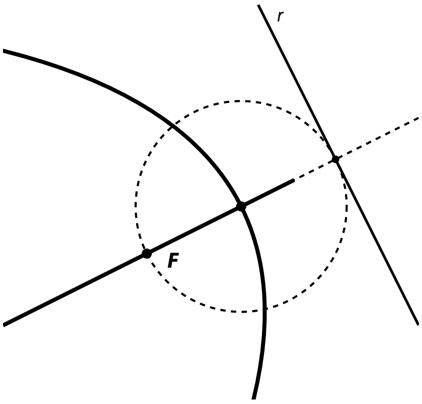
35ab



Kies een punt op *r*, richt in dat punt een loodlijn op *r* op, teken de middelloodlijn van dat punt en punt *F*. Het snijpunt van de loodlijn op *r* en de middelloodlijn is een punt van de parabool.

36a Er is maar één top. Als de top niet op de symmetrie-as zou liggen zouden er twee toppen zijn.

b



Verdubbel de afstand van F tot de top en je krijgt het voetpunt van de richtlijn. Richt de loodlijn in dat voetpunt op de symmetrieas op en je hebt de richtlijn van de parabool.

37a Bekijk de lijnen die geen punt gemeenschappelijk hebben met de getekende parabolen. Kleur dan de tweede van boven rood.

b De afstand tot de rode lijn en tot het punt F zijn voor de rode punten steeds gelijk.

c De richtlijn van de groene parabool ligt in de figuur twee lijnen lager dan de rode richtlijn.

38a $|AF| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-1)^2} = 2$ en $d(A,r) = |1-(-1)| = 2$, dus is $|AF| = d(A,r)$.

$|BF| = \sqrt{(4-0)^2 + (4-1)^2} = 5$ en $d(B,r) = |4-(-1)| = 5$, dus is ook $|BF| = d(B,r)$.

b $|PF| = d(P,r) \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = |y-(-1)| \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow \ y = \frac{1}{4}x^2$

c Ga nu uit van $y = \frac{1}{4}x^2$. Dit betekent $P(x, y) = P(x, \frac{1}{4}x^2)$. Je moet nu laten zien dat $|PF| = d(P,r)$.

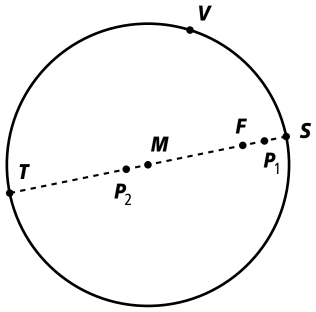
$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (\frac{1}{4}x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} = |\frac{1}{4}x^2 + 1|$. verder is

$d(P,r) = |\frac{1}{4}x^2 - (-1)| = |\frac{1}{4}x^2 + 1|$, dus het klopt.

3.7 Ellips en hyperbool

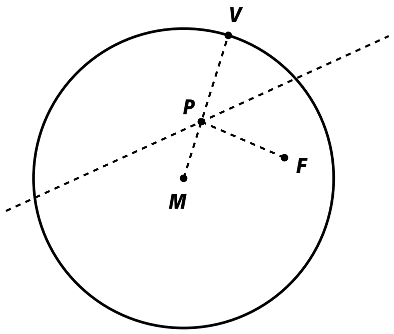
bladzijde 92

39a



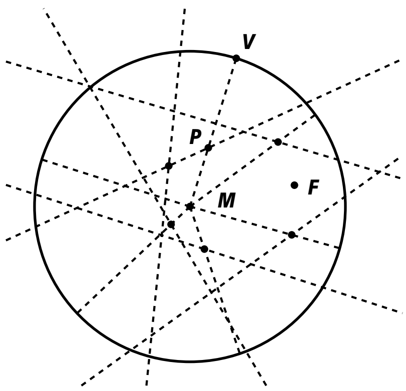
Trek door M en F een rechte lijn. Deze snijdt de cirkel in S en T. De middens van FS (P_1) en FT (P_2) liggen op de conflictlijn.

b



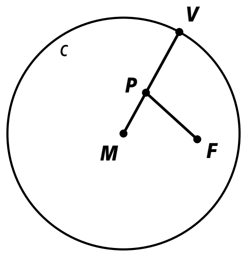
P is het snijpunt van MV en de middelloodlijn van V en F.

c Hieronder op dezelfde manier nog 5 punten van de conflictlijn geconstrueerd.



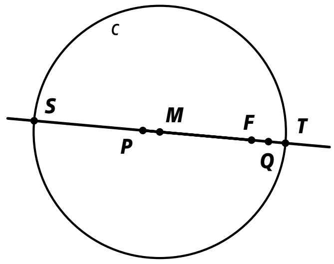
d Er geldt $\mathrm{d}(P,F)=\mathrm{d}(P,c)$, maar steeds is $\mathrm{d}(P,c)=r-\mathrm{d}(P,M)$ (zie bijvoorbeeld de figuur bij onderdeel b). Dus is $\mathrm{d}(P,F)=r-\mathrm{d}(P,M)\Rightarrow \mathrm{d}(P,F)+\mathrm{d}(P,M)=r$.

40a Neem bijvoorbeeld $F_1 = M$ en $F_2 = F$ en bekijk de meetkundige plaats van alle punten P met $d(P,M)+d(P,F)=k$. Punten M en F zijn hieronder getekend samen met cirkel $c(M,k)$. voor een punt P binnen een cirkel geldt ook $d(P,M)=k-d(P,c)$ en dus geldt ook dat $d(P,F)=d(P,c)$. En dat moest worden bewezen.

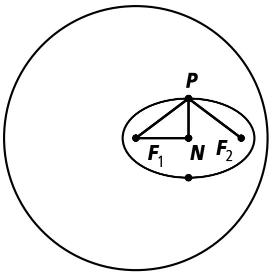


b Punten P en Q hieronder horen bij de conflictlijn en verder vormt PQ de lange as van de ellips. Voor de lengte geldt :

$$\left.\begin{array}{l}|PQ|=|PF|+|FQ| \\ |FQ|=|PM|\end{array}\right\} \Rightarrow |PQ|=|PF|+|PM|=k$$



41a

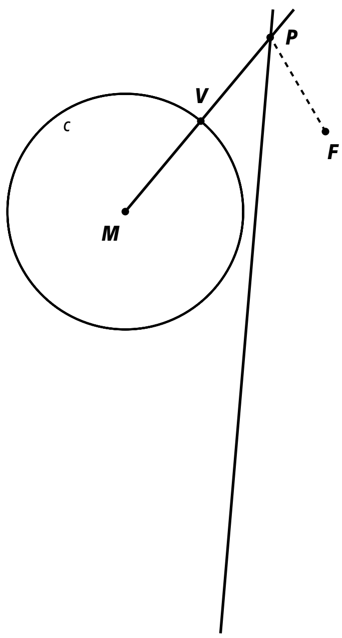


Hier is één van de richtcirkels getekend, de cirkel met middelpunt F_1 en straal 10. Je kunt dan bijvoorbeeld de constructiemethode van opgave 39c gebruiken.

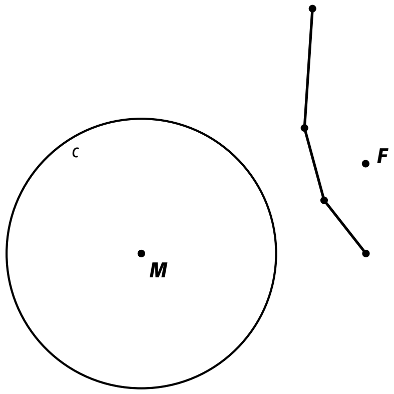
b PN in de figuur hierboven is de helft van de korte as. Omdat $|PF_1|+|PF_2|=10$ en $|PF_1|=|PF_2|$ is $|PF_1|=5$. Verder is $|F_1N|=4$ en dus is $|PN|=\sqrt{5^2-4^2}=3$ en de lengte van de korte as is 6.

bladzijde 93

42ab Punt P vind je door de halfrechte door M en V te snijden met de middelloodlijn van FV.



c



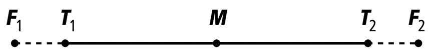
d $\mathrm{d}(P,F)=|PF|$ en voor een punt P buiten cirkel c geldt $\mathrm{d}(P,c)=|PM|-3,$ dus $\mathrm{d}(P,F)=\mathrm{d}(P,c)\Rightarrow|PF|=|PM|-3\Rightarrow|PM|-|PF|=3.$

e Substitueren $(P\to Q,\ M\to F,\ F\to M)$ geeft $|QF|-|QM|=3.$

43a Voor de punten op de rode hyperbooltak geldt $|PF_1|-|PF_2|=6-2=7-3=...=4$, dus $k=4$

b Voor de punten op de groene hyperbooltak geldt $|PF_1|-|PF_2|=2-5=3-6=...=-3$, dus $k=-3$

44a



Noem de toppen T_1 en T_2. $|T_1\,T_2|=|F_1\,T_2|-|F_1\,T_1|$, maar $|F_1\,T_1|=|F_2\,T_2|$ (symmetrie om M), dus $|T_1\,T_2|=|F_1\,T_2|-|F_2\,T_2|$. omdat T_2 hoort bij de rechtertak van de hyperbool, is $|F_1\,T_2|-|F_2\,T_2|=k$ en dus $|T_1\,T_2|=k$.

b De symmetrieassen zijn: de rechte door F_1 en F_2 en de middelloodlijn van $F_1\,F_2$.

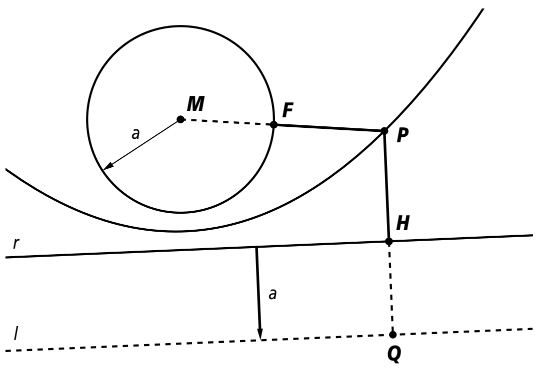
3.8 Gemengde opdrachten

bladzijde 94

45a

Conflictlijn van:	punt	lijn	cirkel
punt	lijn	parabool	ellips of hyperbool
lijn		lijn(en)	?
cirkel			?

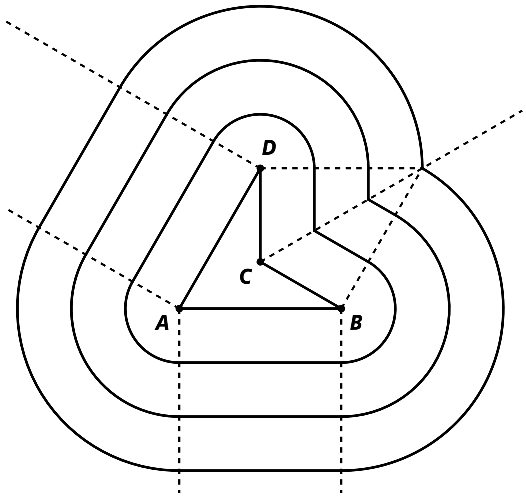
b De conflictlijn van punt M en de lijn l is een parabool. Zoals hieronder getekend.



Voor een punt P op de parabool geldt:
$d(P,M)=d(P,l)\Rightarrow|PM|=|PQ|\Rightarrow|PM|-a=|PQ|-a\Rightarrow|PF|=|PH|$.
Dus ligt P op de conflictlijn van de cirkel en lijn r.

c Teken de cirkels $c_1:(M,a)$ en $c_2:(N,b)$
Voor een punt P op de conflictlijn moet gelden:
$d(P,c_1)=d(P,c_2)\Rightarrow |PF|=|PE|\Rightarrow |PF|+a+b=|PE|+a+b\Rightarrow$
$|PM|+b=|PN|+a\Rightarrow |PM|+b-a=|PN|\Rightarrow |PM|-(a-b)=|PN|\Rightarrow d(P,c_3)=|PN|$
De punten P liggen dus op een hyperbooltak met richtcirkel $c_3=(M,(a-b))$ en brandpunt N

46a



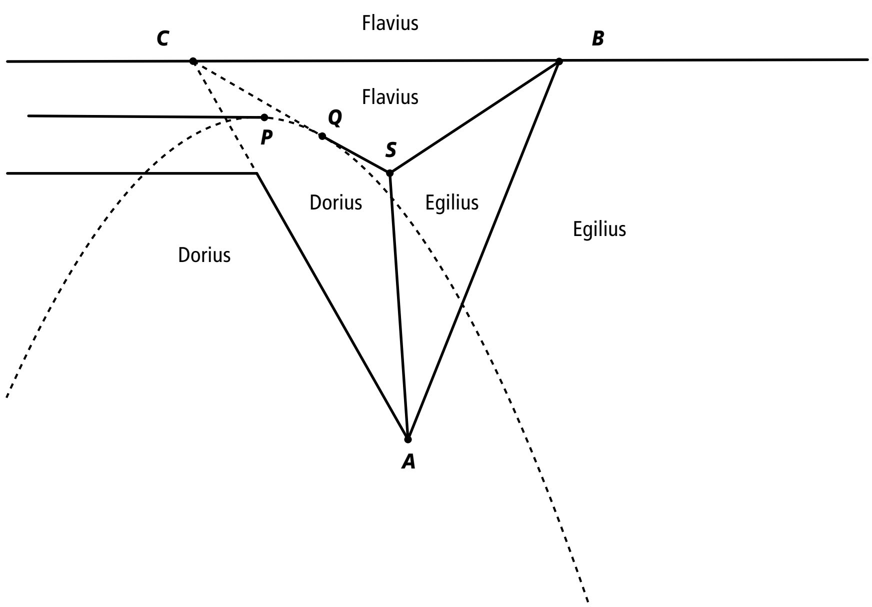
b Alleen de twee rechte stukken hangen niet van a af. Elk zijn ze steeds 3 lang.

c Dat klopt wel. Je ziet het ook al aan het plaatje bij onderdeel a.

d $\dfrac{\text{lengte iso-}a\text{-lijn}}{a}=\dfrac{6+\text{drie cirkelbogen}}{a}=\dfrac{6}{a}+\dfrac{\text{drie cirkelbogen}}{a}\to 0+\dfrac{2a}{a}=2$.

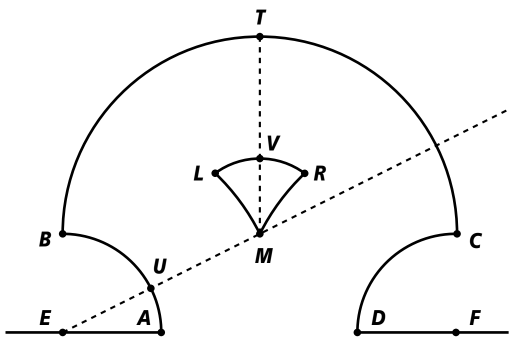
47a De grens tussen Dorius en Flavius bevat een stukje parabool, namelijk de punten op gelijke afstanden van het hoekpunt van Dorius (brandpunt) en de rechte oever van Flavius (richtlijn).

b Hieronder zijn de gebieden schematisch weergegeven. De grens tussen Egilius en Dorius bestaat uit de deellijn van hoek A. De grens tussen Egilius en Flavius uit de deellijn van hoek B.
De grens tussen Dorius en Flavius bestaat uit een rechte lijn tot punt P een stukje deellijn, QS, van hoek C, en een stukje parabool van P tot Q.



bladzijde 95

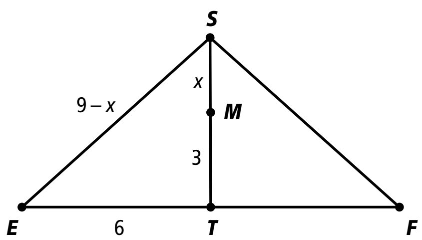
48a



Teken een cirkelboog met middelpunt E door M. Teken ook een cirkelboog door M met middelpunt F. Teken lijnstuk EM dat de cirkelboog bij A en B in U snijdt. De afstand $|UM|$ is bepalend voor de isolijn. Teken vervolgens een cirkelboog met middelpunt M en straal $6-|UM|$ en het figuurtje dat bij M hoort is compleet.

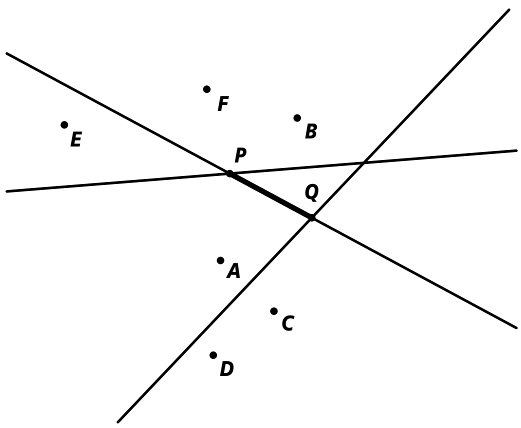
b In het algemeen is $|LE| = 3+a$ en $|LM| = 6-a$, dus $|LM|+|LE| = (6-a)+(3+a) = 9$.

c



Volgens de stelling van Pythagoras is dus
$(9-x)^2+(x+3)^2 = 36 \Rightarrow x^2-24x+36 = 0 \Rightarrow x = 12 \pm 6\sqrt{3}$. De oplossing $x = 12+6\sqrt{3}$ is onbruikbaar, want deze maakt $9-x$ negatief. Blijft over $|MS| = x = 12-6\sqrt{3}$.

49a

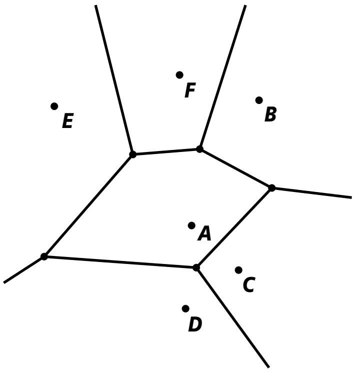


Het voor A relevante gedeelte PQ van de middelloodlijn van AB wordt gemarkeerd door de middelloodlijnen van AF en AC.

b Door drie punten die niet op één lijn liggen gaat precies één cirkel. Het middelpunt van die cirkel, dat dus even ver van de drie punten verwijderd is, is hier het drielandenpunt.

c In ieder geval bij clusters van drie punten die relatief dicht bij elkaar liggen. Dus voor de ‘landen’ A, C en D, maar ook voor A, B en C; A, B en F; A, E en F. Zie ook hieronder.

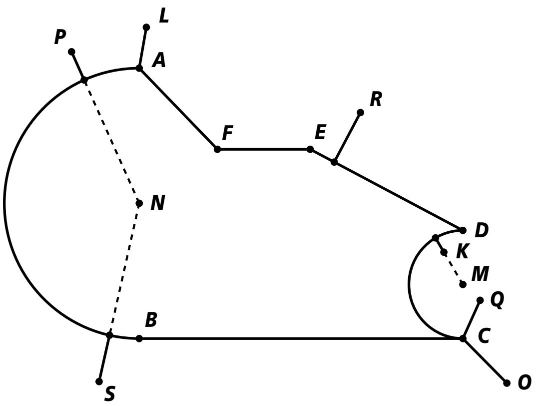
d



Test jezelf

bladzijde 98

T-1a



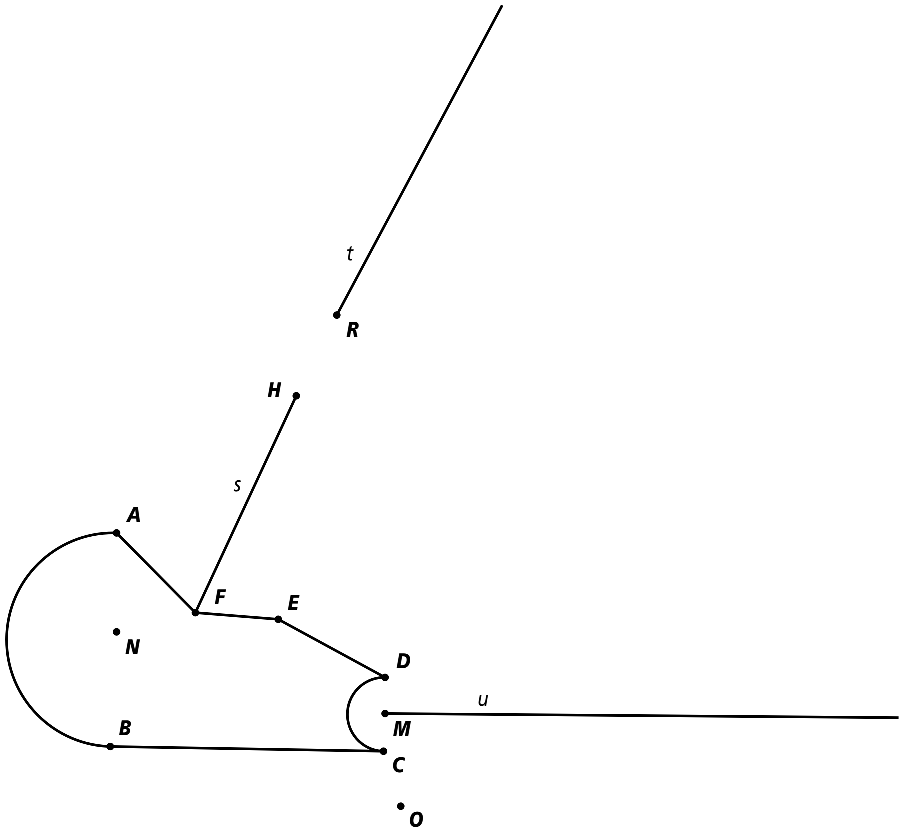
b Punt P

c $\mathrm{d}(K, G) = r - |KM|$

d Punt M, want dat is het middelpunt van de halve cirkel.

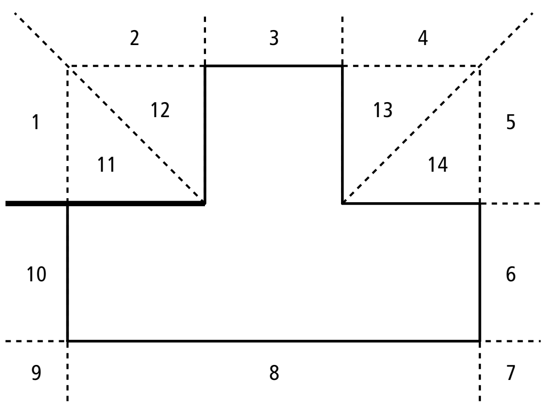
e Punt F, want dat is het hoekpunt van een inham.

f



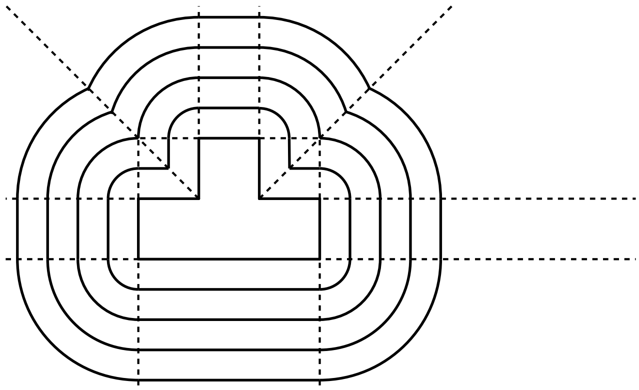
Deze punten X treden op in de buurt van inhammen en inkepingen van het gebied. Bij de inham bij M hoort een gedeelte van de middelloodlijn van CD, de halfrechte (u). Bij de inham bij F horen een gedeelte van de deellijn van $\angle F$ (s) en een gedeelte van de middelloodlijn van AE, ook weer in de vorm van een halfrechte (t). Overigens sluiten s en t niet precies op elkaar aan, er hoort nog een stukje parabool, met richtlijn AF en brandpunt E, bij tussen H en R.

T-2a



Het buitengebied telt 14 sectoren.

b



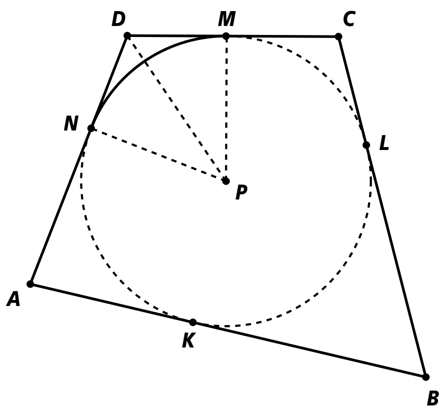
c De iso-$\frac{1}{2}$-lijn heeft in de sectoren 3, 6, 8 en 10 een totale lengte van $4+4+12+4=24$. In elk van de sectoren 1, 2, 4, 5, 7 en 9 is er sprake van een kwartcirkel met straal $\frac{1}{2}$, dus in totaal $6\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\ \cdot\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$. In elk van de sectoren 11 t/m 14 is sprake van een lengte $4-\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$, in totaal dus $4\cdot 3\frac{1}{2}=14$.
De iso-$\frac{1}{2}$-lijn heeft lengte $24+1\frac{1}{2}\pi+14=38+1\frac{1}{2}$.

d Als $a\geq 4$ komt de iso-a-lijn slechts in sectoren 1 t/m 10. Zo'n isolijn heeft in de sectoren 3, 6, 8 en 10 een totale lengte van $4+4+12+4=24$. In de sectoren 7 en 9 is er in beide gevallen sprake van een kwartcirkel met straal a en in sectoren 1, 2, 4 en 5 heb je steeds te maken met een achtste cirkel met straal a. De lengte van de iso-a-lijn is dan $24+(2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8})\cdot 2\ a=24+2\ a$.

En dus $\dfrac{\text{lengte van een iso-}a\text{-lijn}}{a}=\dfrac{24+2\ a}{a}=\dfrac{24}{a}+2\ \rightarrow 2$.

T-3a Het middelpunt kun je construeren door de bissectrices van $\angle A$ en $\angle B$ te tekenen. Het snijpunt is dan het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

b

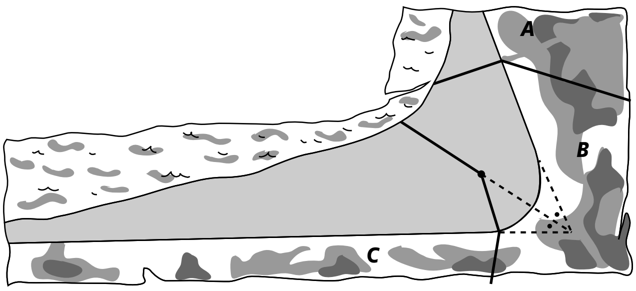


$\triangle PDN\cong\triangle PDM$ omdat $|PD|=|PD|$, $|PN|=|PM|$ en $\angle PND=\angle PMD=90^0$ (ZZR) en dus is $|DM|=|DN|$.

c Voor raaklijnenvierhoek $ABCD$ geldt $|AB|+|CD|=|AD|+|BC|$. Verder is $|AD|=|AN|+|DN|$ en $|CD|=|CM|+|DM|$, dus $|AB|+|CM|+|DM|=|AN|+|DN|+|BC|$.
Omdat $|DM|=|DN|$ geldt nu $|AB|+|CM|=|AN|+|BC|$.

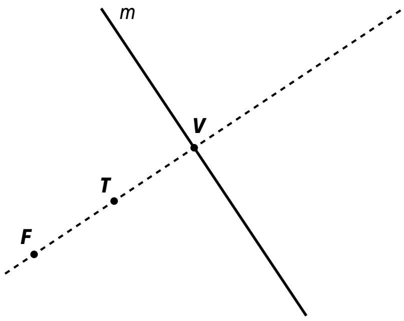
bladzijde 99

T-4a

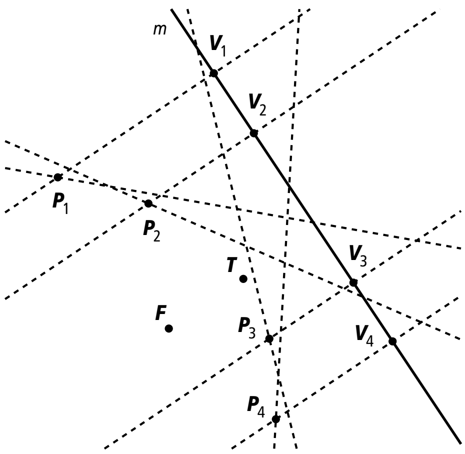


b De conflictlijn van de gebieden A en B is een loodlijn. De conflictlijn van de gebieden B en C is een deel van de deellijn van de "oude" rechte oevers van B en C en een cirkelstraal.

T-5ab

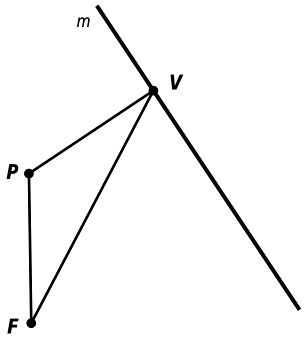


c



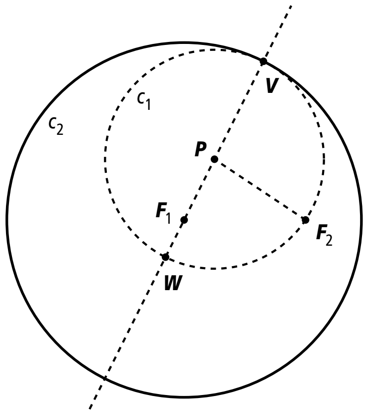
Neem punt V_1 op m, richt in dat een punt een loodlijn op en snijdt deze loodlijn met de middelloodlijn van V_1F en je krijgt punt P_1 van de parabool, enzovoort.

d



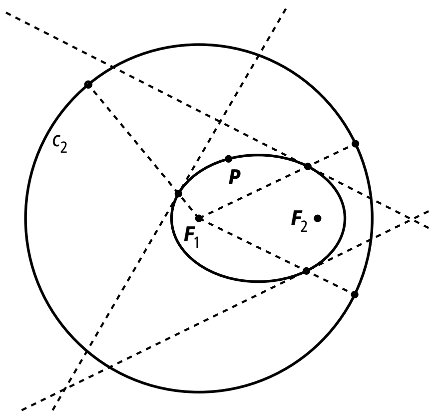
$|PF| = \mathrm{d}(P, F)$ en $|PV| = \mathrm{d}(P, m)$. Voor punt P geldt $\mathrm{d}(P, F) = \mathrm{d}(P, m)$ en dus is $|PV| = |PF|$ en is $\triangle FPV$ gelijkbenig.

T-6a

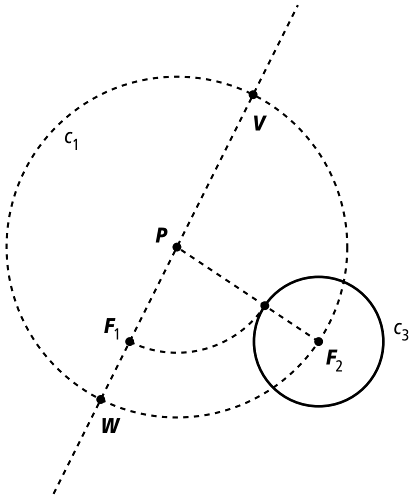


b $\mathrm{d}(P, c_2) = |PV| = |PF_2| = \mathrm{d}(P, F_2)$, dus c_2 is richtcirkel voor de ellips.

c

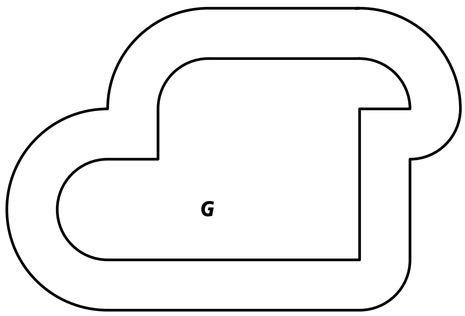


d



e Zoals in de figuur hierboven te zien is $d(P, F_1) = d(P, c_3)$ en dus ligt P op de hyperbool.

T-7a



b De tekening van gebied G is niet eenduidig. Bij de twee inhammen kan die inham groter worden gemaakt zonder dat de iso-2-lijn verandert.