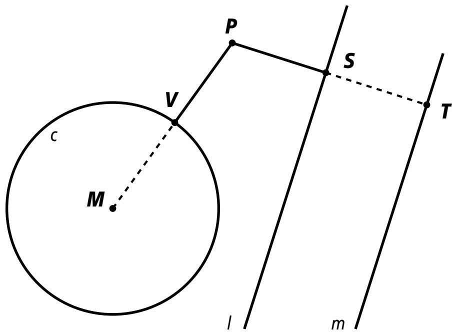
Hoofdstuk 4 - Kegelsneden

Voorkennis: Conflictlijnen

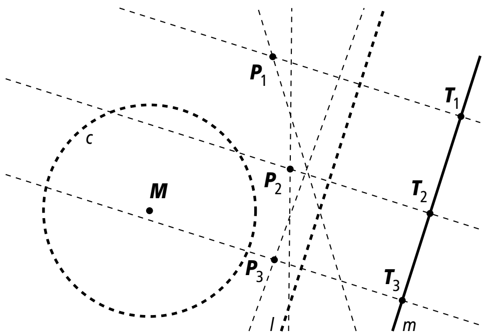
bladzijde 102

V-1a

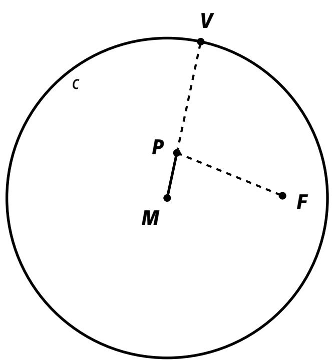


$|PM| = \text{d}(P,c) + r$ en $\text{d}(P,m) = |PT| = |PS| + |ST| = \text{d}(P,l) + r$. Als $\text{d}(P,c) = \text{d}(P,l)$ dan is $|PM| = \text{d}(P,c) + r = \text{d}(P,l) + r = \text{d}(P,m)$.

b De conflictlijn van c en l (cirkel en lijn) kan dus worden teruggebracht tot de conflictlijn van M en m (punt en lijn). Kies een punt T_1 op m, richt in dat punt een loodlijn op en snij die loodlijn met de middelloodlijn van M en T_1. Je krijgt op die manier punt P_1. De andere punten gaan op gelijke wijze.

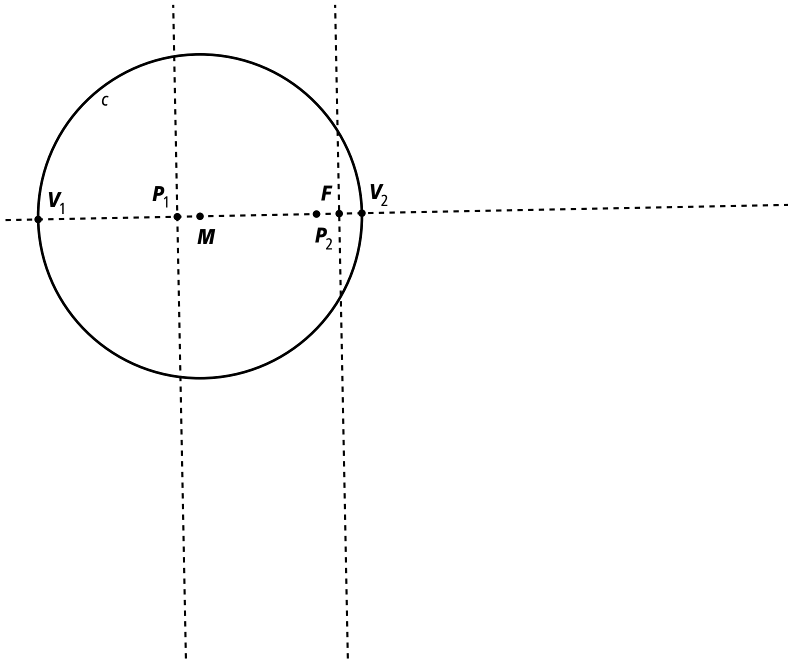


V-2a



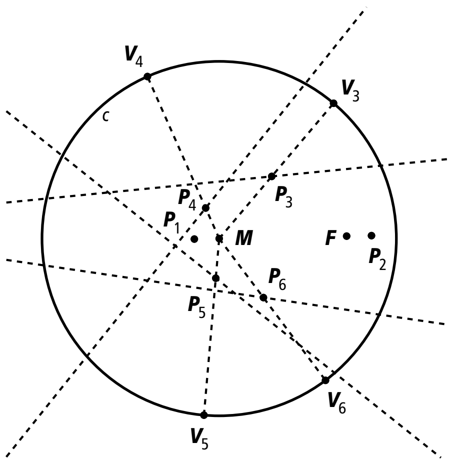
Er geldt $\text{d}(P,c) = |PV|$ en $d(P,F) = |PF|$. Als $\text{d}(P,c) = \text{d}(P,F)$ dan is dus $|PV| = |PF|$ en ligt P op de middelloodlijn van VF.

b



De lijn door M en F snijdt de cirkel in punten V_1 en V_2. Deze lijn snijden met de middelloodlijnen van V_1F en V_2F levert de gevraagde punten P_1 en P_2 op.

c



Kies punten V_3, V_4, V_5, en V_6 op de cirkel c, teken de lijnstukken MV_3, MV_4, MV_5, en MV_6 en snijdt deze respectievelijk met de middelloodlijnen van FV_3, FV_4, FV_5, en FV_6 en je krijgt punten P_3, P_4, P_5, en P_6.

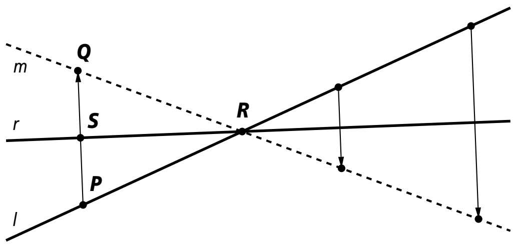
d Bekijk bijvoorbeeld punt P_3 in het plaatje hierboven. Er geldt:

$$\left.\begin{array}{l}|FP_3| = |V_3P_3| \\ |MP_3| + |V_3P_3| = r\end{array}\right\} \Rightarrow |MP_3| + |FP_3| = r$$

, deze som heeft dus steeds dezelfde waarde *r*.

bladzijde 103

V-3a

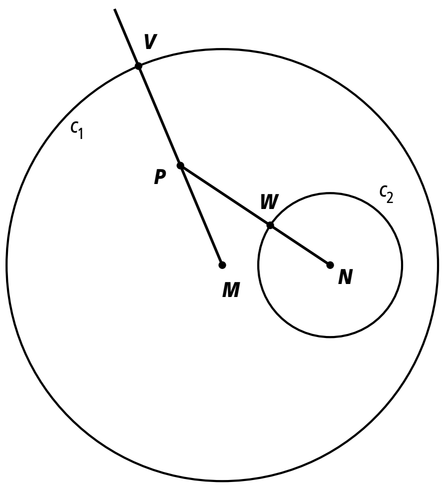


b Neem een willekeurig punt P op lijn l (zie boven). Als dit punt wordt afgebeeld op punt Q, dan snijden PQ en l elkaar loodrecht in een punt S dus:

$$\left.\begin{array}{l} |PS| = |SQ| \\ \angle PSR = \angle QSR = 90° \\ |SR| = |SR| \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PRS \cong \triangle QRS \Rightarrow \angle PRS = \angle QRS$$

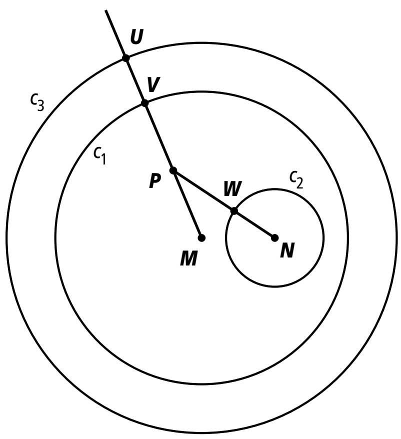
Dus S ligt op de bissectrice van $\angle(l,m)$ en dus is r dus de bissectrice van deze hoek.

V-4a



b Sinds hoofdstuk 3 weet je dat zowel $\mathrm{d}(P,c_1)$ als $\mathrm{d}(P,c_2)$ moeten worden gemeten langs een lijn die door het middelpunt van bijbehorende cirkel gaat. Dus $\mathrm{d}(P,c_1) = |PV|$ en $\mathrm{d}(P,c_2) = |PW|$.

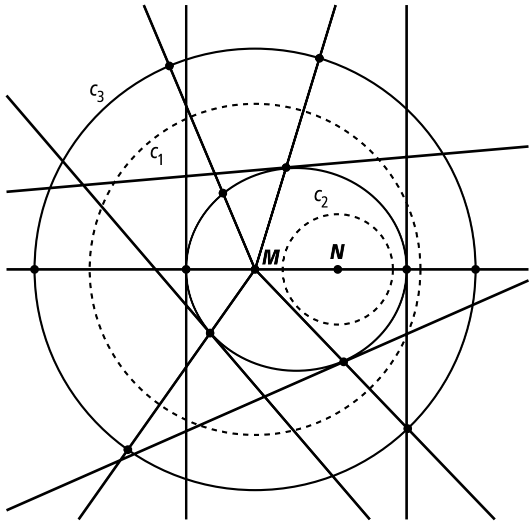
c



$\mathrm{d}(P,c_3) = |PU| = |PV| + 2 = |PW| + 2 = \mathrm{d}(P,c_2) + 2 = \mathrm{d}(P,c_1) + 2 = |PN|$

d De conflictlijn van een cirkel en een punt binnen die cirkel is een ellips met brandpunten M en N.

e

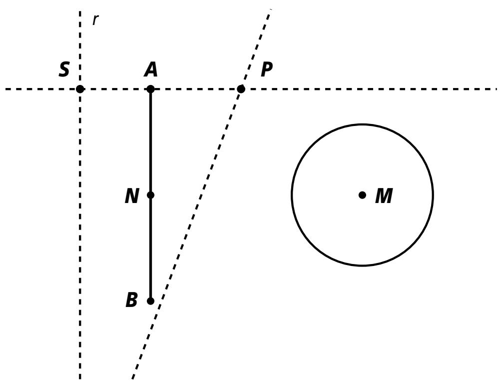


Een lijn door M snijdt c_3 in U. De middelloodlijn van UN snijdt MU in P een punt van de conflictlijn.

V-5a De conflictlijn van de cirkel c met middelpunt M en straal 1 en een lijn l door A en B zonder gemeenschappelijke punten met c is identiek met de conflictlijn van punt M en een lijn r die ten opzichte van l over een afstand 1 verschoven is van M weg. Een dergelijk cirkel-lijn-combinatie heeft als conflictlijn een parabool met richtlijn r en brandpunt M. De conflictlijn van een **lijnstuk** en de cirkel is dus minimaal voor een deel gelijk aan deze parabool.

b Deze afstand is gelijk aan de straal van de cirkel, dus 1.

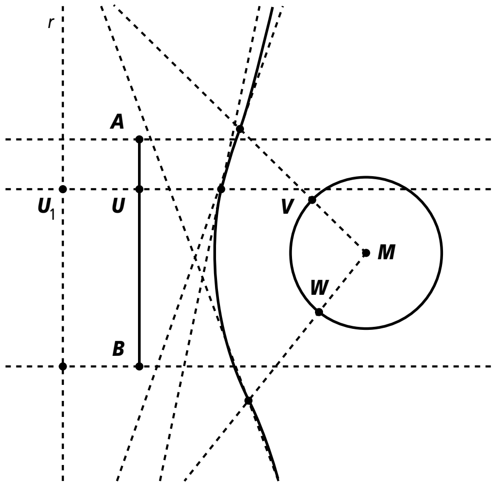
c



De loodlijn op AB in A snijdt de lijn r in S. Het snijpunt van deze loodlijn met de middelloodlijn van SM is het gezochte punt (P).

d Boven de loodlijn op AB in A is de afstand van een punt tot AB gelijk aan de afstand tot A. Dat gedeelte van de conflictlijn komt overeen met (een gedeelte van) een hyperbooltak. Iets dergelijks geldt voor het gedeelte van de conflictlijn dat beneden de in B opgerichte loodlijn op AB.

e



Om bijvoorbeeld een punt te vinden in het hyperboolgedeelte aan de kant van A kies je een punt V op c, trek je de halfrechte MV en snijd je deze met bijbehorende middelloodlijn van AV. Om het paraboolgedeelte te vinden kies je een punt U op AB, teken je de loodlijn op AB in U, die r in een punt U_1 snijdt. Neem dan het snijpunt van de loodlijn in U met de middelloodlijn van U_1M.

4.1 Kegelsneden

bladzijde 104

1a Het vlak staat dan loodrecht op as a.

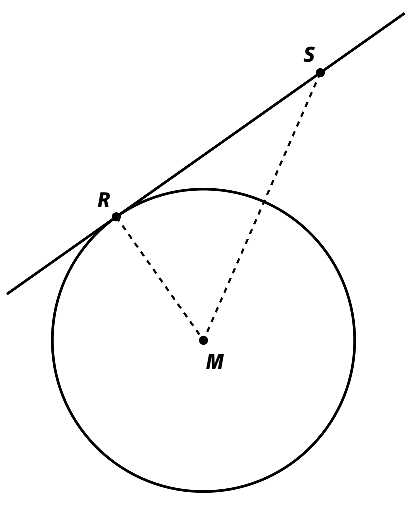
b Het vlak maakt dan precies een hoek α (halve tophoek) met as a.

c Het vlak maakt dan een hoek met as a die groter is dan α.

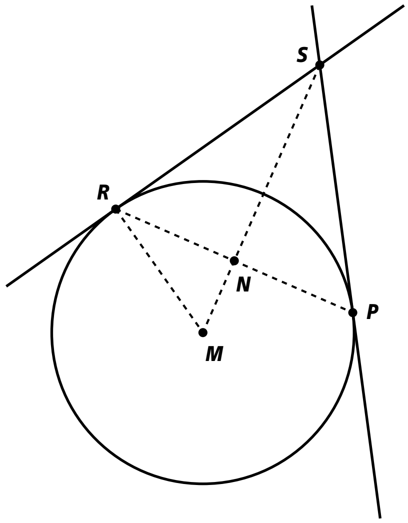
d De doorsnijdingsfiguur is een punt wanneer de hoek van as en vlak groter is dan α of een tweetal lijnen die elkaar onder een hoek van 2α (en $180^0 - 2\alpha$) snijden wanneer de hoek van as en vlak kleiner is dan α.

bladzijde 105

2a In deze opgave ga je dus de omkaderde stelling bewijzen.
Neem een raaklijn uit S met de bol, het raakpunt is R. Als M het middelpunt van de bol is dan is $\angle MRS = 90°$ en geldt: $\sin \angle MSR = \frac{|MR|}{|MS|} = \text{constant}$.
Dus geldt dat alle raaklijnen door S aan de bol dezelfde hoek vormen met MS.



b



Ga weer uit van de raaklijn van onderdeel a. Trek nu de andere raaklijn aan de doorsnijdingscirkel behorend bij het vlak door S, R en M (zie boven). Uit onderdeel a volgt niet alleen dat de hoeken die de raaklijnen SR en SP met MS maken gelijk zijn, maar ook dat de afstanden van S tot de raakpunten gelijk zijn vanwege $\triangle MRS \cong \triangle MPS$, dus o.a. ook $|SR| = |SP|$. Omdat de driehoeken en RNS en PNS tenslotte SN gemeenschappelijk hebben, zijn ze congruent (ZHZ) en is de hoek bij N recht. Neem nu een willekeurige andere raaklijn. Je krijgt dan te maken met een driehoek $R'N'S$. Omdat $\angle RSN = \angle R'SN'$, $\angle N = \angle N' = 90^0$ en $|SR| = |SR'|$ is $\triangle SRN \cong \triangle SR'N'$ (HZH) en $SN = SN'$ én dus ook $N = N'$. Verder is de afstand tot van R en R' tot N steeds gelijk. Omdat de laatste raaklijn willekeurig is gekozen volgt dus dat de afstanden van alle raakpunten tot N gelijk zijn. Omdat alle raakpunten ook in één vlak liggen, namelijk het vlak door N en loodrecht op SN, liggen alle raakpunten op eenzelfde cirkel.

c Uit de congruentie van $\triangle MSR$ en $\triangle MSR'$ uit onderdeel a volgt dat $|SR| = |SR'|$ en dus ook dat de afstand van S tot alle raakpunten gelijk is.

3a PF_1 is natuurlijk raaklijn vanuit P aan de grote bol en verder is PF_2 raaklijn aan de kleine bol. Omdat PA ook raaklijn aan de kleine bol is, geldt volgens de omkaderde stelling bij opgave 2 dat $|PF_2| = |PA|$. Omdat PB raaklijn aan de grote bol is, geldt verder dat $|PF_1| = |PB|$.

b Omdat A en B beide op de lijn door S en T liggen, is $|AB| = |PA| + |PB|$ en volgt uit onderdeel a verder dat $|AB| = |PF_1| + |PF_2|$.

c Omdat $|AB| = |SB| - |SA|$ en $|SB|$ en $|SA|$ constant zijn, niet afhangen van de keuze van P op de doorsnijdingsfiguur van V met de kegel.

d De punten P op de groene kromme voldoen precies aan de definitie van een ellips: $\mathrm{d}(P, F_1) + \mathrm{d}(P, F_2) = \text{constant}$.

4a De doorsnede bestaat slechts uit één punt, namelijk de top van de kegel.

b Je kunt de doorsnijdingsfiguur opvatten als een ellips met $F_1 = F_2 = \text{top}$ en met assen die gelijk zijn aan 0.

5a De doorsnede bestaat uit twee lijnen die elkaar snijden in de top van de kegel.

b De toppen vallen samen in S en de brandpunten liggen op oneindig.

4.2 Parabolen

bladzijde 106

6a R ligt op de parabool dus $\mathrm{d}(R,l)=\mathrm{d}(R,F)$ dan geldt $|RV|=|RF|$ dus R op de lijn m.

b Er geldt $|QV|=|QF|$

c Omdat QF hypothenusa is in de rechthoekige driehoek $QQ'V$, geldt dat $|QV|>|QQ'|$.

d Uit b en c volgt dat voor willekeurige Q op m anders dan P geldt dat $\mathrm{d}(Q,l)=|QQ'|<|QV|=|QF|=\mathrm{d}(Q,F)$ en dus heeft m maar één punt gemeenschappelijk met de parabool en ligt Q steeds aan de dezelfde kant van de conflictlijn (c.q. parabool), namelijk in het gebied van de richtlijn. Met andere woorden, m raakt aan de parabool.

e Laat S het snijpunt zijn van m met FV. Er geldt $\triangle RVS \cong \triangle RFS$ (ZZZ) en dus is $\angle VRS = \angle FRS$.

f Elke lijn loodrecht op de richtlijn heeft maar één punt gemeen met de parabool, maar is geen raaklijn.

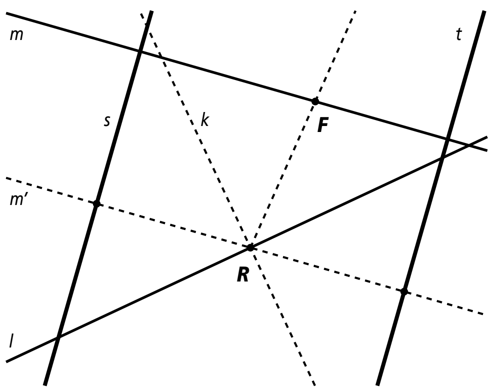
7a De raaklijn in R maakt gelijke hoeken met FR en met een lijn loodrecht op de richtlijn zoals l, beide met grootte α^0. De deellijn verdeelt $\angle FRP$ in twee hoeken van β^0. Er geldt dat $2\alpha+2\beta=180^0$, dus is $\alpha+\beta=90^0$ en staat de raaklijn in R loodrecht op de deellijn van $\angle FRP$.

b Laat vanuit R een loodlijn neer op de richtlijn, deze snijdt de richtlijn in V. Construeer vervolgens de middelloodlijn van VF. Dit is de raaklijn in R.

c Door gebruik te maken de eigenschap die bij onderdeel a wordt genoemd. Teken het lijnstuk RF, teken lijn l door R evenwijdig aan de symmetrie-as, construeer de deellijn van de hoek die door RF en l wordt gemaakt (binnen het gebied van F), richt in R de lijn op loodrecht op de deellijn en je hebt de gezochte raaklijn.

bladzijde 107

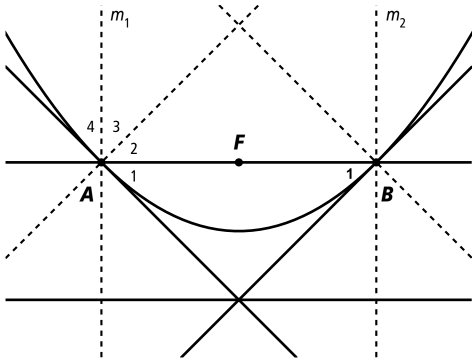
8 Construeer een lijn $m' \parallel m$ door punt R en een loodlijn k op l in R. De lijn k hoort de bissectrice te zijn van de hoek tussen m' en RF. Je vindt dus brandpunt F door de hoek bij R tussen m' en k te verdubbelen en bijbehorende been te snijden met symmetrie-as m.
Kies een voetpunt van R op m' zodanig dat de afstand van R tot dat voetpunt gelijk is aan $|FR|$. Er zijn twee mogelijkheden. Loodlijn oprichten in de gevonden voetpunten levert de mogelijke richtlijnen s en t.



9 Laat V het voetpunt zijn van A op l. De punten A en S liggen beide op de middelloodlijn van VF, dus

$$\left.\begin{array}{l}|FS|=|VS|\\|AF|=|AV|\\|AS|=|AS|\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ASF\cong\triangle ASV\Rightarrow\angle SFA=\angle SVA=90^\circ.$$

10 De raaklijn in A staat loodrecht op de deellijn van $\angle A_{2,3}$. Omdat $\angle A_{2,3}=90^0$ is $\angle A_2=45^0$ en $\angle A_1=90^0-\angle A_2=45^0$. Analoog is ook $\angle B_1=45^0$ en is de hoek die de twee raaklijnen met elkaar maken gelijk aan 90^0.



11a Omdat de deellijn van de ingaande en de uitgaande straal loodrecht staat op de raaklijn.

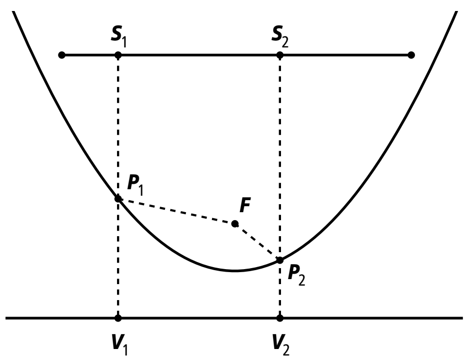
b De bundel bestaat na terugkaatsing uitsluitend uit stralen die evenwijdig zijn aan de as van de spiegel, want de stralen zijn het omgekeerde van de stralen uit opdracht a.

c Het vlak door brandpunt F loodrecht op de as van de spiegel snijdt de spiegel in punten die samen een cirkel vormen. De evenwijdige stralen die op die cirkel aankomen weerkaatsen onder een hoek van 90^0. Vergelijk ook opgave 10.

12a Omdat zij elkaar op die manier versterken.

b Als de richtlijn erbij wordt gehaald, dan is het snel duidelijk.

$$\left.\begin{array}{l}|S_1P_1|+|P_1F|=|S_1P_1|+|P_1V_1|=|S_1V_1|\\|S_2P_2|=|P_2F|=|S_2P_2|+|P_2V_2|=|S_2V_2|\\|S_1V_1|=|S_2V_2|\end{array}\right\}\Rightarrow\ \text{alle stralen leggen dezelfde afstand af.}$$



4.3 Ellipsen

bladzijde 108

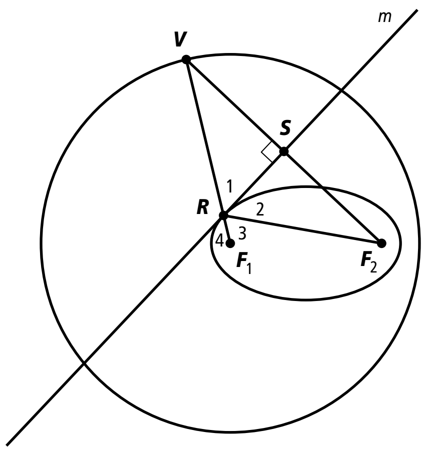
13a $|VR| = |VF_1| - |RF_1| = |RF_1| + |RF_2| - |RF_1| = |RF_2|$ en dus ligt R op de middelloodlijn m van VF_2.

b Omdat F_1, Q en V niet op één lijn liggen is $|F_1Q| + |QV| > |F_1V|$.
Q ligt op m dus $|QV| = |QF_2|$.

Dus geldt $|QF_2| + |QF_1| = |QV| + |QF_1| > |VF_1|$ en ligt zo'n punt Q buiten de ellips.

c Als een punt Q over m beweegt, ligt het eerst buiten de ellips, in punt R op de ellips en daarna opnieuw buiten de ellips. De lijn m moet dus wel aan de ellips raken.

d



Bewezen moet worden dat $\angle R_2 = \angle R_4$.

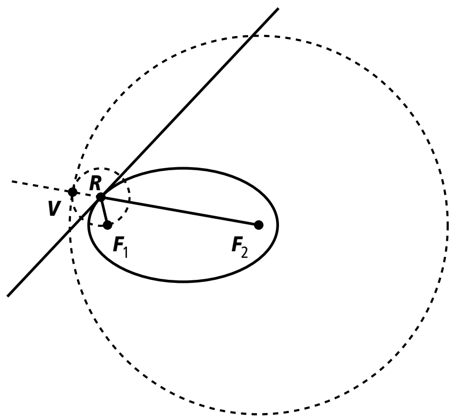
$$\left.\begin{array}{l} |VR| = |RF_2| \\ |RS| = |RS| \\ \angle S = \angle S = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle VRS \cong \triangle F_2RS \text{ (ZZR)} \Rightarrow \angle R_1 = \angle R_2 .$$

Uit $\angle R_1 = \angle R_4$ (overstaande hoeken) volgt dan meteen dat $\angle R_2 = \angle R_4$.

14a De hoeken die F_1R en F_2R met raaklijn l maken zijn gelijk, zeg α^0. De hoeken die m met F_1R en F_2R maakt zijn natuurlijk ook gelijk, zeg β^0. De hoek tussen l en m is $\alpha + \beta$, terwijl $2\alpha + 2\beta = 180^0$. Hieruit volgt dat $\alpha + \beta = 90^0$ en l en m staan dus loodrecht op elkaar.

b Teken F_2R en verleng dit lijnstuk met een stukje ter grootte van $|F_1R|$. Je vindt dan punt V op de richtcirkel met middelpunt F_2. Construeer nu de middelloodlijn van VF_1 en je hebt de raaklijn aan R te pakken.

c Teken F_1R en F_2R, construeer de deellijn van $\angle F_1RF_2$ en richt vervolgens de loodlijn in R op m op en je hebt de raaklijn aan R te pakken.



15a Je kunt cirkel c uit cirkel c_1 halen door c_1 met een factor $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen vanuit punt F_2. Het middelpunt F_1 van c_1 wordt afgebeeld op het midden tussen F_1 en F_2 en de straal van c_1 gelijk aan de lange as van de ellips, wordt de helft daarvan. V wordt daarbij afgebeeld op Q en dus is $|F_2Q| = \frac{1}{2}|F_2V|$ en ook $|VQ| = |QF_2|$.

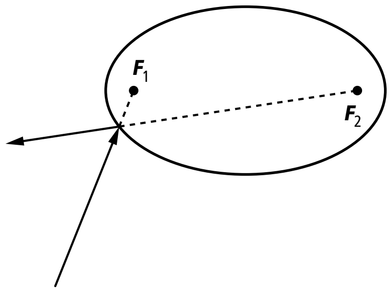
b De raaklijn in R is de middelloodlijn van VF_2. Omdat $|VQ| = |QF_2|$ is Q het midden van VF_2 en ligt dus op die middelloodlijn.

c Omdat $\triangle RF_2Q \cong \triangle RVQ$ (ZZZ) is $\angle RQF_2 = \angle RQV$. Omdat deze hoeken samen een gestrekte hoek vormen, is $\angle RQF_2 = 90^0$.

d Uitgaande van F_1 en F_2 en richtcirkel c_1 met middelpunt F_1 kun je als volgt te werk gaan: Vermenigvuldig F_1 ten opzichte van F_2 met factor $\frac{1}{2}$, halveer de straal van c_1 en teken cirkel c. Kies nu een punt V op c_1, teken VF_2 en bepaal het snijpunt met c en noem dat punt Q. Richt in Q een loodlijn op en snijdt deze lijn met VF_1. Dit snijpunt ligt op de ellips.

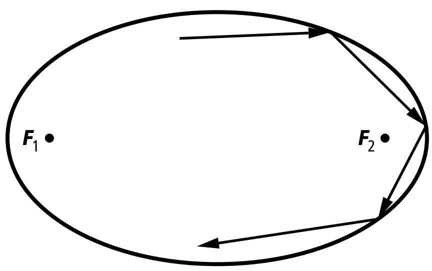
16a Stel lichtstraal l komt vanuit F_2 op de spiegel aan in punt P. De straal wordt weerkaatst volgens de regel hoek van inval is hoek van uitval. Omdat F_2P en PF_1 voldoen aan die regel, gaat de teruggekaatste straal door F_1. Als de straal vervolgens op de spiegel aankomt in punt Q wordt zij om vergelijkbare redenen teruggekaatst richting F_2, enzovoort.

b Het punt waar de straal m de spiegel treft, verbindt je met F_2 en de straal wordt teruggekaatst op aangegeven manier.

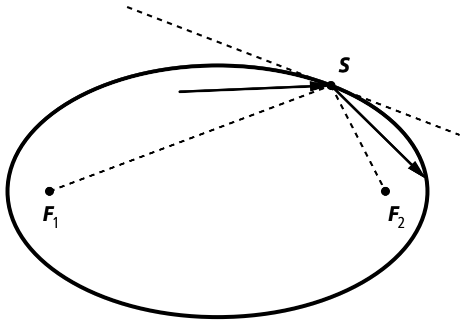


bladzijde 109

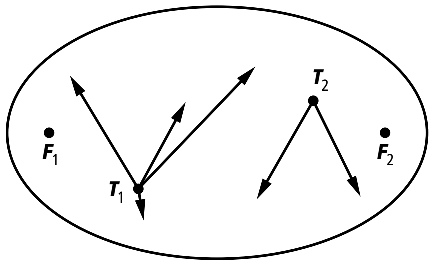
17a Kies bijvoorbeeld de methode van opgave 14c. Je krijgt dan:



b De invallende straal maakt een kleinere hoek met de raaklijn in S dan een straal langs F_1S. Dat betekent dat de hoek van uitval ook kleiner zal zijn dan de hoek die F_2S maakt met de raaklijn. De teruggekaatste straal gaat dus niet tussen F_1 en F_2 door, maar gaat buitenom. Dezelfde redenering kun je houden bij de volgende keer dat de straal op de spiegel terecht komt.

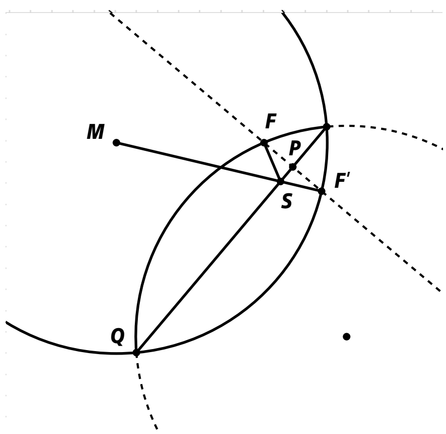


c



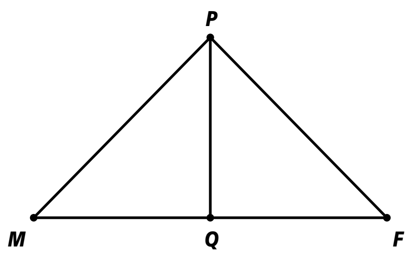
Wanneer de lichtstraal steeds tussen de beide brandpunten doorgaat moet de vertrekkende lichtstraal dat ook doen.

18abc



Spiegel F in de vouwlijn. Je krijgt dan F'. MF' snijdt de vouwlijn in S. Omdat $\triangle SPF' \cong \triangle SPF$ (ZHZ) is $|FS| = |F'S|$ en $\angle F'SP = \angle FSP$. Omdat $|MS| + |SF| = |MS| + |SF'| = |MF'| =$ straal van een richtcirkel ligt S op de ellips. Omdat $\angle FSP = \angle F'SP = \angle MSQ$ (overstaande hoek) is de vouwlijn tegelijk raaklijn aan de ellips in S.

d De lengte van de lange as is gelijk aan de straal van een richtcirkel. Dit is dus 10.
De lengte van de kleine as vind je bijvoorbeeld door punt P te bekijken. Dit punt ligt op de kleine as van de ellips en op de ellips zelf ($|MP| = |PF| = 5$ en dus $|MP| + |PF| = 10$). $|PQ| = \sqrt{5^2 - \left(3\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{51}$ en de korte as heeft dus lengte $\sqrt{51}$.



19 Stel V is het snijpunt van F_1P met de richtcirkel waarvan F_1 het middelpunt is, dan is lijn l de middelloodlijn van F_2V en Q dus het midden van F_2V. Dan is dus ook $|PV| = |PF_2|$.
M is het midden van F_1F_2 en Q is het midden van F_2V dus
$|MQ| = \frac{1}{2}|F_1V| = \frac{1}{2}\left(|F_1P| + |PV|\right) = \frac{1}{2}\left(|F_1P| + |F_2P|\right)$.

20a $\left.\begin{array}{l} |G'F| = |F'G| = \text{straal beide richtcirkels} \\ |PG'| = |PF'| (P \text{ op middelloodlijn } F'G') \\ |PF| = |PG| (P \text{ op middelloodlijn } FG) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PFG' \cong \triangle PGF'$

b Omdat P en R beide op de middelloodlijn van FG liggen is $|PF| = |PG|$ en $|RF| = |RG|$. Verder is $|PR| = |PR|$ en dus is $\triangle PRF \cong \triangle PRG$ (ZZZ) en dus $\angle PFR = \angle PGR$.
Een gevolg van de congruentie bewezen bij onderdeel a is $\angle PGF' = \angle PFG'$. Echter is $\angle PFG' = \angle PGF' = \angle PGR = \angle PFR$ en dus PF bissectrice van $\angle QFR$.

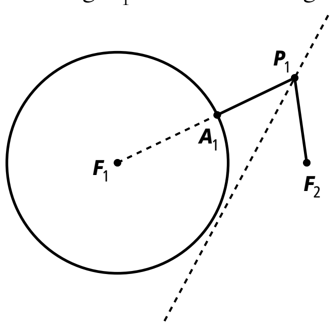
c $\angle G'PQ = \angle F'PQ$; $\angle PG'Q = \angle PF'Q = \angle PF'R$ en $\angle PGR = \angle PFR = \angle PFQ$.

4.4 Hyperbolen

bladzijde 110

21a Verleng F_1A in de richting van A en snijdt deze lijn met de middelloodlijn van AF_2.

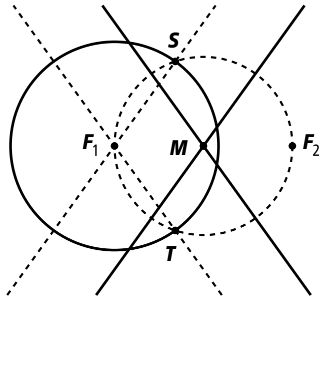
b



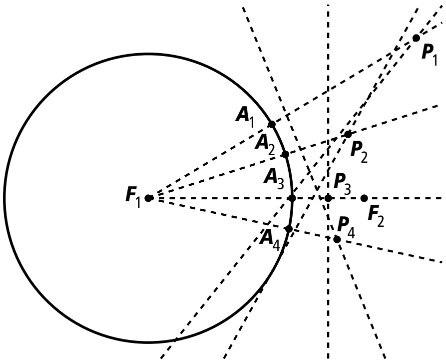
c Halflijn F_1A_2 snijdt de middelloodlijn van A_2F_2 nergens.

d Als $\angle F_1AF_2 = 90^0$ lopen F_1A en de middelloodlijn van AF_2 evenwijdig en snijden ze elkaar dus niet. Wanneer $\angle F_1AF_2 < 90^0$ dan snijden de middelloodlijn en F_1A elkaar in een punt dat dichter bij de cirkel ligt dan bij F_2, dus dat kan ook niet.

e Construeer eerst punt M midden tussen F_1 en F_2.
De cirkel met M als middelpunt door F_1 en F_2 snijdt de richtcirkel in S en T. De lijnen door M (tevens symmetriepunt van de hyperbool) evenwijdig aan F_1S en F_1T vormen de asymptoten van de hyperbool.

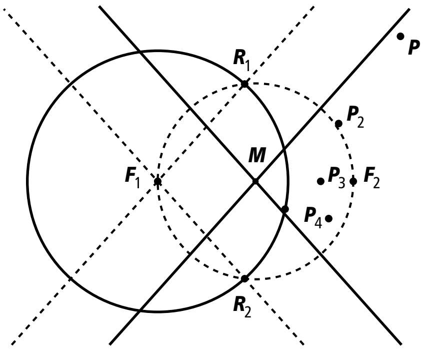


22a



Je vindt een punt van de hyperbool door op de cirkel een punt A te kiezen. Het snijpunt van F_1A en de middelloodlijn van F_2A is een punt van *fde* hyperbool. De geconstrueerde punten liggen allemaal op een tak van de hyperbool.

b



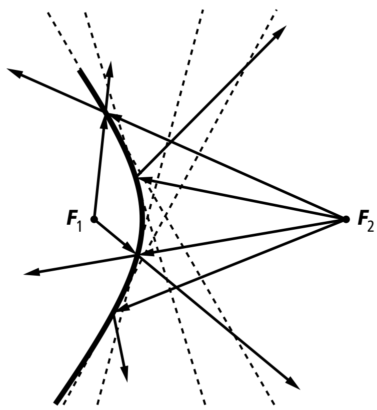
Het midden M van lijnstuk F_1F_2 is natuurlijk symmetriepunt van de hyperbool. De asymptoten van de hyperbool gaan dus door dit punt. De cirkel met middelpunt M door F_1 snijden de richtcirkel met middelpunt F_1 in R_1 en R_2. De lijnen door M evenwijdig aan F_1R_1 en F_1R_2 vormen de asymptoten van de hyperbool.

23a Laat r de straal van c zijn. Er geldt dan $r = \mathrm{d}(R, F_1) - \mathrm{d}(R, F_2)$

b De twee driehoeken waarin m de driehoek F_2RV verdeelt zijn congruent (ZZZ) en dus maakt m gelijke hoeken met RF_1 en RV en dus ook met RF_1 en RF_2.

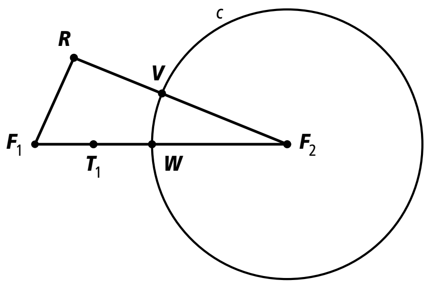
c Neem een willekeurig punt Q op m anders dan R. Omdat Q op de middelloodlijn m ligt geldt $\mathrm{d}(Q, F_2) = \mathrm{d}(Q, V)$. Verder is dan $\mathrm{d}(Q, F_1) < \mathrm{d}(Q, V) + \mathrm{d}(V, F_1) = \mathrm{d}(Q, F_2) + r$ en dus is $\mathrm{d}(Q, F_1) - \mathrm{d}(Q, F_2) < r$. Afgezien van R liggen alle punten van m dus aan dezelfde kant van de hyperbooltak, dus moet m de raaklijn in R zijn.

24ab Bij een hyperbolische spiegel worden stralen vanuit een brandpunt terugegkaatst alsof ze uit het andere brandpunt komen.



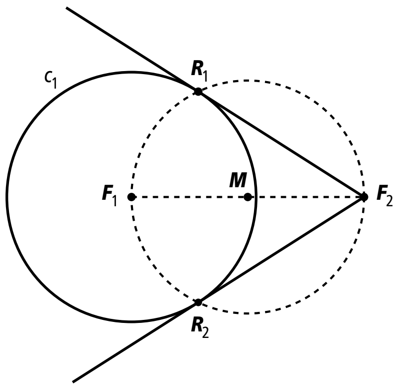
bladzijde 111

25a



Pas een afstand ter grootte $|RF_1|$ af op RF_2 en contrueer de richtcirkel c met middelpunt F_2. Teken daarna het lijnstuk F_1F_2 en bepaal het snijpunt W met c. De top T_1 ligt nu midden tussen F_1 en W.

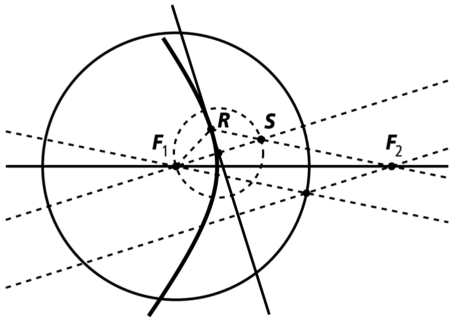
b



Construeer richtcirkel c_1 met F_1 als middelpunt met de straal die je bij onderdeel a vond. De raaklijnen vanuit F_2 staan loodrecht op de straal van de cirkel naar bijbehorend raakpunt. Construeer een cirkel die als middellijn F_1F_2 heeft en snijdt deze met c_1 in R_1 en R_2. Lijnen vanuit F_2 door R_1 en R_2 getrokken staan loodrecht op de stralen F_1R_1 en F_1R_2 en zijn dus de gezochte raaklijnen.

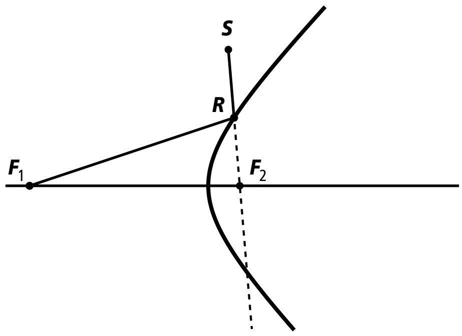
c Een van de asymptoten is de lijn door M evenwijdig aan F_1R_1. De middelloodlijn van F_2R_1 staat evenals F_1R_1 loodrecht op F_2R_1 en omdat $|R_1M| = |MF_2|$ gaat die middelloodlijn ook door M. Deze middelloodlijn heeft dezelfde richting en gaat door hetzelfde punt als de asymptoot. Het moet dus gaan om dezelfde lijn. Voor de andere asymptoot geldt iets dergelijks.

26



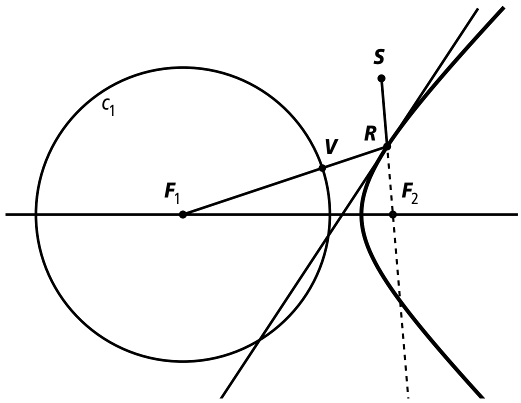
Spiegel F_1 in de raaklijn en noem dat punt S. Verleng lijnstuk RS en snijdt bijbehorende lijn met de symmetrieas. Het snijpunt is F_2 en $|F_2S|$ is de straal van beide richtcirkels. Je hoeft alleen maar deze lengte naar F_1 over te brengen om de gevraagde richtcirkel te kunnen construeren.

27a



Verleng SR en snij de lijn met de symmetrieas. Dit snijpunt is F_2.

bc

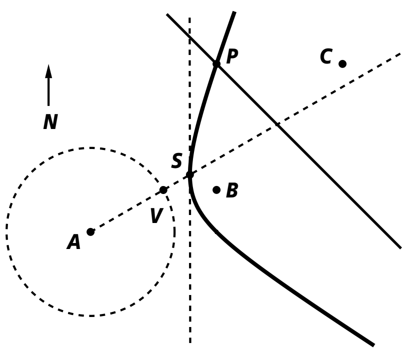


Pas een lijnstuk RV op RF_1 af ter grootte $|RF_2|$, dan is $|F_1V|$ de straal van de gevraagde richtcirkel (onderdeel b).

c Construeer vervolgens de middelloodlijn van VF_2 en je hebt de raaklijn in R aan de hyperbooltak.

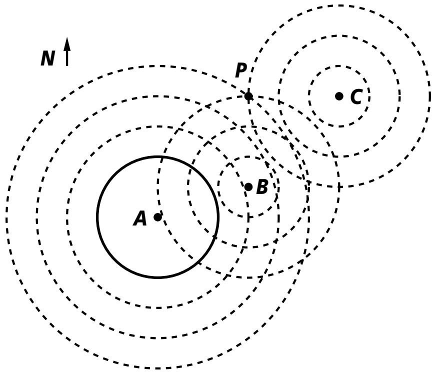
28a Punt A is $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ km verder van punt P verwijderd dan de punten B en C.

b



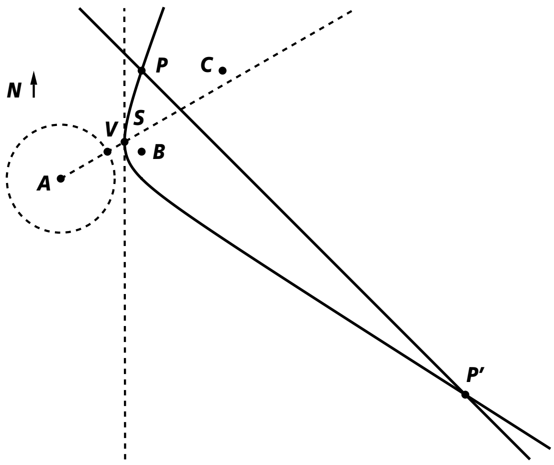
Je kunt het punt P bepalen met behulp van twee conflictlijnen. Eén conflictlijn hoort bij zinsnede 'in B en C wordt op exact hetzelfde tijdstip....', dit is de middelloodlijn van BC. Een andere conflictlijn die je kunt kiezen hoort bij 'punt A ligt 2 km verder van punt P dan punt B' en resulteert in de getekende hyperbooltak. Het snijpunt in noordelijke\ richting ligt precies 3 km ten noorden van punt B.

c



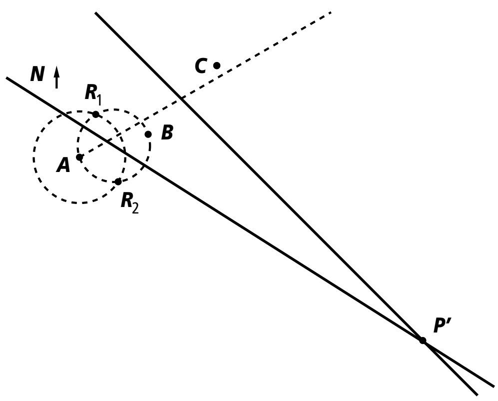
Teken cirkels om A van $2, 3, 4, 5$ km en om B en C van $0, 1, 2, 3$ km en je vind ook op die manier punt P. Als punt P niet op een geheel aantal kilometers van zowel A, B als C had gelegen, dan was het op deze manier moeilijker te vinden geweest.

d



Bovenstaande figuur laat zien dat de andere mogelijkheid voor punt P wat verder weg ligt en wel in zuidoostelijke richting ten opzichte van A, B en C.

e

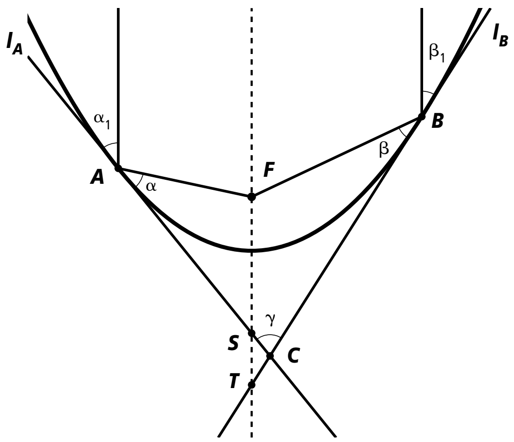


Bepaal de raakpunten R_1 en R_2 van punt B aan de richtcirkel met middelpunt A De middelloodlijn van BR_2 is de asymptoot die de hyperbooltak in zuidoostelijke richting het best benadert. Je vindt op deze manier ongeveer hetzelfde punt P'.

4.5 Gemengde opdrachten

bladzijde 112

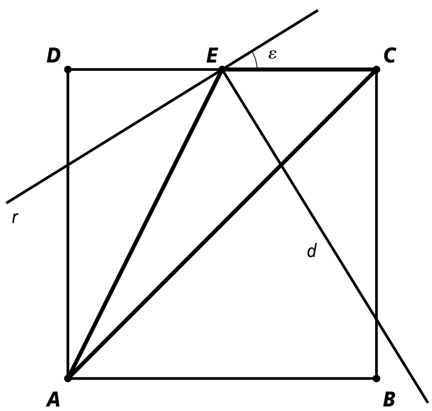
29a



Voor de 'weerkaatste' stralen van FA en FB geldt dat ze evenwijdig zijn aan de symmetrie-as. Er geldt verder $\alpha = \alpha_1 = \angle ASF$(F-hoek) $= \angle CST$ (overstaande hoek) en $\beta = \beta_1 = \angle CTS$ (F-hoek). Dus is $\gamma = \angle CST + \angle CTS = \alpha + \beta$.

b Hoek F binnen vierhoek $AFBC$ is
$360^0 - \alpha - \beta - (\alpha + \beta) = 360^0 - 2(\alpha + \beta) = 360^0 - 2\gamma$. Dit impliceert dat $\angle AFB = 2\gamma$.

30a

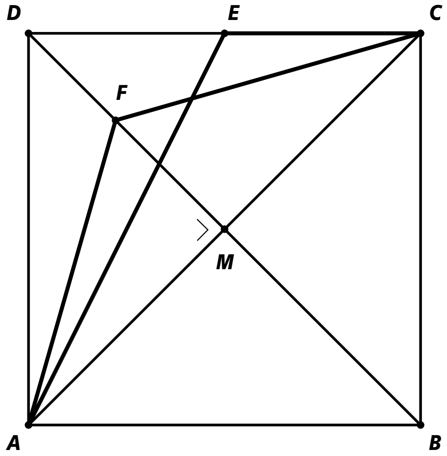


De raaklijn d in E aan een van de ellipsen staat loodrecht op de deellijn van $\angle CEA$. De gevraagde hoek is 2ε groot. Omdat $\varepsilon = 90^0 - \frac{1}{2}\angle AEC$ geldt $2\varepsilon = 180^0 - \angle AEC$. Via de cosinusregel kun je $\angle AEC$ vinden:
$|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2 - 2|AE||EC|\cos\angle AEC$

Als $|AB| = a$ dan is $|AE| = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$, $AC = a\sqrt{2}$ en $EC = \frac{1}{2}a$ en dus is

$cos\angle AEC = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \Rightarrow \angle AEC \approx 116,57^0 \Rightarrow 2\varepsilon \approx 63,43^0$.

bc

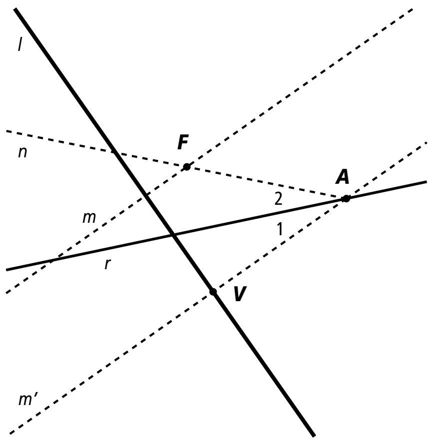


De lengte van de lange as voor beide ellipsen gelijk aan

$|CE| + |EA| = 6 + \sqrt{6^2 + 12^2} = 6 + 6\sqrt{5} \approx 19,42$.

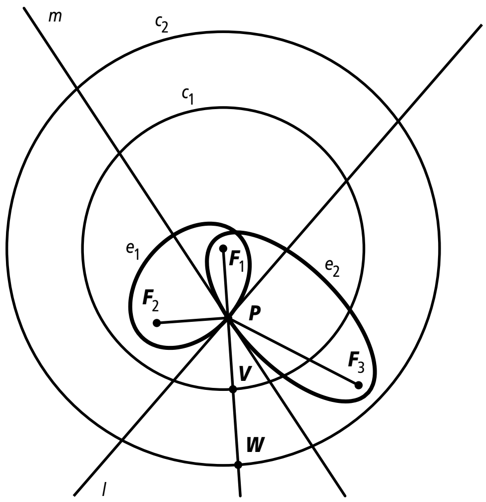
De lengte van de korte as is dan $2|FM| = 2\sqrt{|AF|^2 - |AM|^2} = 2\sqrt{18\sqrt{5} - 18} \approx 9,43$.

31



Trek door A een lijn m' evenwijdig aan de symmetrieas m. Ergens op m' moet een voetpunt V liggen. Aan de andere kant van lijn r ligt het brandpunt F zodanig dat de lijn r middelloodlijn van VF zijn. Dat betekent in ieder geval ook dat r deellijn is van $\angle VAF$. Met andere woorden, $\angle A_1 = \angle A_2$. Teken nu de halfrechte n zo dat $\angle A_2 = \angle A_1$. De halfrechte snijdt de symmetrielijn in F. Kies nu V zo dat $|AV| = |AF|$ en je vindt de richtlijn l door een lijn door $V \perp m'$ te tekenen.

32



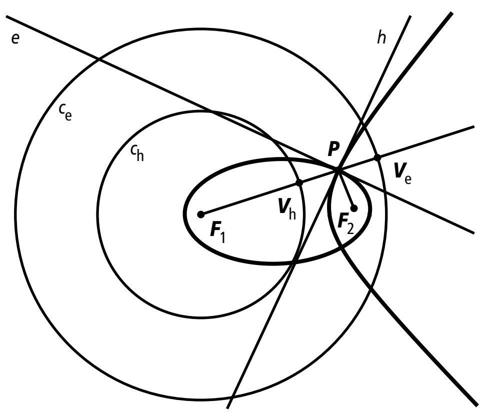
Hierboven zijn de richtcirkels c_1 en c_2 van de ellipsen e_1 en e_2 getekend. V en W liggen in het verlengde van F_1P op de richtcirkels. Raaklijn l is de middelloodlijn van F_2V en dus ook bissectrice van $\angle F_2PV$. Raaklijn m is de middelloodlijn van F_3W en dus ook bissectrice van $\angle F_3PW$. Dus er geldt:

$$\left.\begin{array}{l}\angle(F_2P,l)=\angle(PW,l)\\ \angle(F_3P,m)=\angle(PW,m)\end{array}\right\}\Rightarrow\ \angle F_2PF_3=\angle(F_2P,l)+\angle(PW,l)+\angle(PW,m)+\angle(F_3P,m)=$$

$$2\cdot\angle(PW,l)+2\cdot\angle(PW,m)=2\cdot(\angle(PW,l)+\angle(PW,m))=2\alpha\,.$$

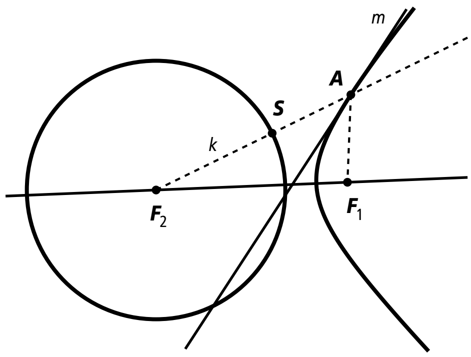
bladzijde 113

33



Laat c_e een richtcirkel zijn van de ellips en c_h die van één van de hyperbooltakken. De volledige hyperbool en de ellips snijden elkaar in vier punten, waaronder in P. De raaklijn h in P aan de hyperbooltak is bissectrice van $\angle V_hPF_2$ en de raaklijn e in P aan de ellips is bissectrice van $\angle V_ePF_2$. Omdat F_1, V_e en V_h op één rechte lijn liggen volgt hieruit dat $e \perp h$. Uit symmetrieoverwegingen valt te begrijpen dat de raaklijnen in de andere snijpunten ook loodrecht op elkaar staan.

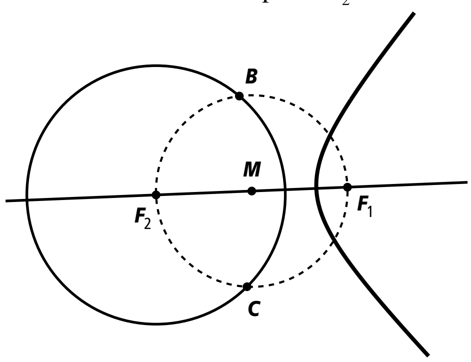
34a



Raaklijn m is bissectrice van $\angle F_1AF_2$. Door die eigenschap kun je lijn k vinden. Het snijpunt van k met de symmetrie-as levert brandpunt F_2.

b Door op AF_2 een stukje AS ter grootte $|AF_1|$ af te passen, vind je de straat van de richtcirkel met middelpunt F_2.

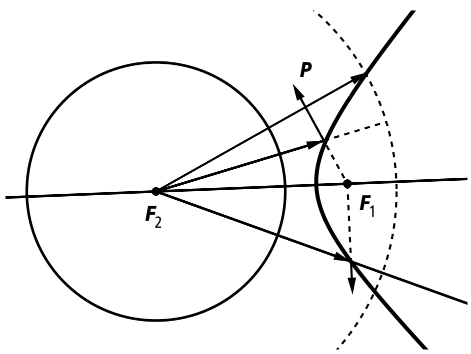
c



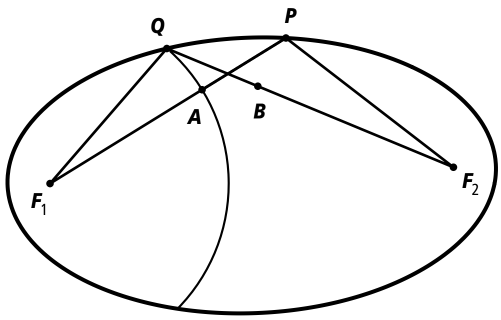
Er is geen snijpunt van F_2B en de middelloodlijn van BF_1. Dit is het gevolg van het feit dat $\angle F_2BF_1$ een rechte hoek is. Er is ook geen snijpunt van F_2C en de middelloodlijn van CF_1. Dit is het gevolg van het feit dat ook $\angle F_2CF_1$ een rechte hoek is.

d Er is geen snijpunt van F_2B en de middelloodlijn van BF_1 omdat ze evenwijdig zijn. Dit is het gevolg van het feit dat $\angle F_2BF_1$ een rechte hoek is. Er is ook geen snijpunt van F_2C en de middelloodlijn van CF_1. Dit is het gevolg van het feit dat ook $\angle F_2CF_1$ een rechte hoek is.

e



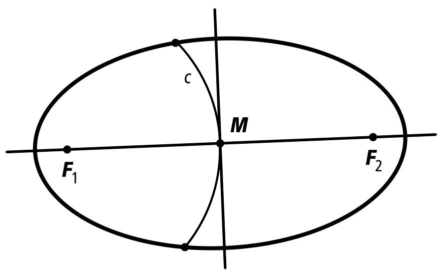
35a



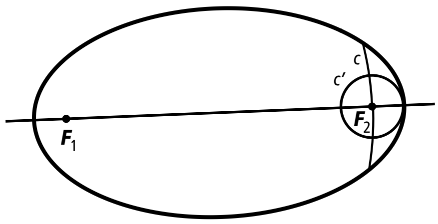
Neem een geluidsgolf F_1Q die de wand bereikt in Q en teruggekaatst wordt naar F_2.
F_1P is een tweede geluidsgolf die de wand iets later bereikt in P.
Kies B op F_2Q zo dat $|QB| = |AP|$ (1)
Op het moment dat F_1P de wand bereikt, is de teruggekaatste straal uit Q in punt B.
Er geldt $|F_1P| + |PF_2| = |F_1Q| + |QF_2| \Rightarrow |F_1A| + |AP| + |PF_2| = |F_1Q| + |QB| + |BF_2|$ (2)
Omdat natuurlijk ook geldt $|F_1A| = |F_1Q|$ (3).
(1) , (2) en (3) geeft: $|PF_2| = |BF_2|$ en dus liggen P en B op een cirkel.

b Ook de golven van golffront Equation Chapter (Next) Section 1 c zijn even lang onderweg als die van c'. Dat betekent dat $r_{c'} + r_c = l \Rightarrow r_{c'} = l - r_c$.

c



d



Test jezelf

bladzijde 116

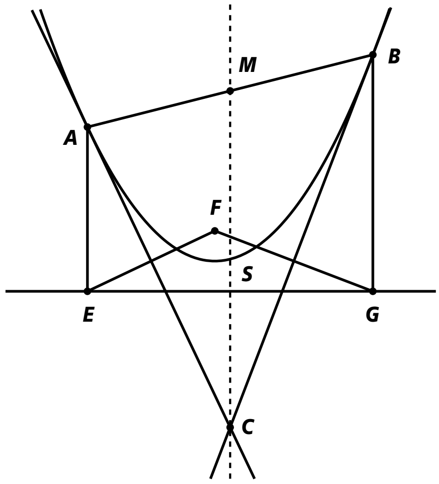
T-1a In opdracht 2 is de stelling bewezen dat wanneer je vanuit een punt buiten een bol raaklijnen tekent aan die bol de afstand tussen dat punt en de raakpunten gelijk is.
Dus $|PA| = |PC|$ en $|PB| = |PD|$

b Omdat D en C evenwijdige cirkels doorlopen.

c $|PA| + |PB| = |PC| + |PD| = DC = \text{constant}$

d De doorsnede is een ellips met brandpunten A en B.

T-2a



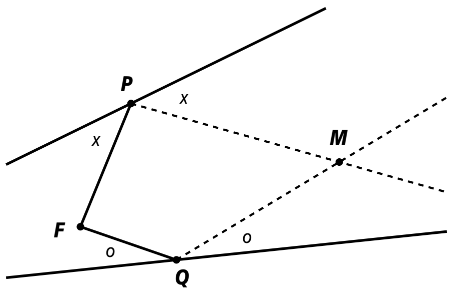
b CA is middelloodlijn van EF en CB is middelloodlijn van FG.

c S is het midden van EG en M is het midden van AB, dus MS is middenparallel in trapezium $EGBA$. Dus dan geldt $MS \mathbin{//} AE$ en staat MS loodrecht op EG.

$$\left.\begin{array}{l} MS \perp EG \\ S \text{ midden van } EG \end{array}\right\} \Rightarrow MS \text{ is middelloodlijn van } EG \text{ en gaat dus door } C.$$

d MC staat loodrecht op EG, dus op de richtlijn en dus geldt MC//as parabool

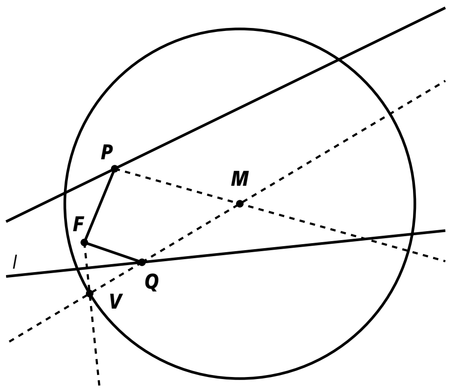
T-3a



De raaklijnen in P en Q maken gelijke hoeken met FP en MP respectievelijk met FQ en MQ. Breng dus de hoek tussen de raaklijn in P en FP over. Het snijpunt van dit alles is punt M.

b Omdat raaklijn l nu middelloodlijn van VF is voor zekere ligt V dus op de richtcirkel met middelpunt M.

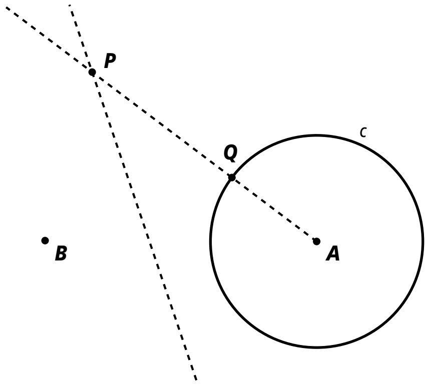
c



De gespiegelde V van F in l verbinden met M en $|VM|$ nemen als straal van de richtcirkel.

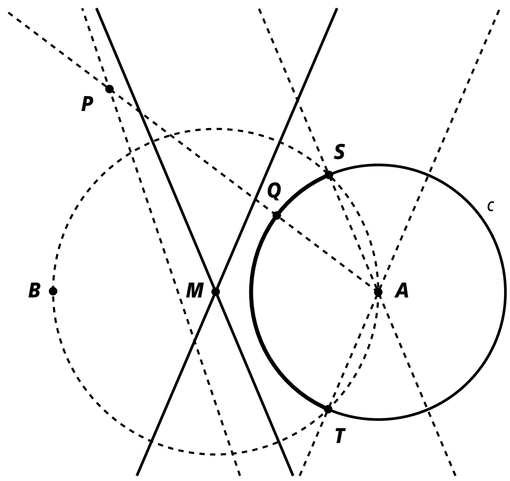
bladzijde 117

T-4a



Snijd het verlengde van AQ met de middelloodlijn van BQ en je vind punt P.

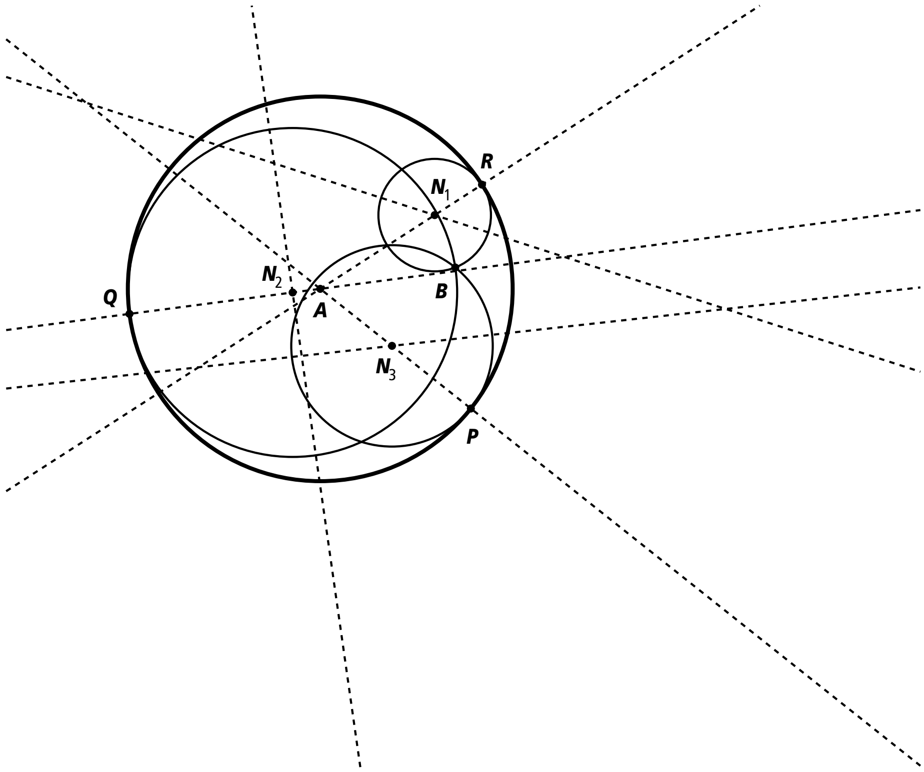
b



Bepaal het midden M van AB. De cirkel met middelpunt M en straal $\frac{1}{2}|AB|$ snijdt c in S en T. AS is evenwijdig met de middelloodlijn van BS en levert net geen punt meer op van de hyperbooltak. Iets dergelijks geldt voor punt T. De boog tussen S en T is vetgemaakt omdat daar overal voetpunten van de hyperbooltak kunnen liggen (exclusief S en T zelf dus).

c De asymptoten zijn de lijnen door M die evenwijdig aan AS resp. AT lopen. Zie hierboven.

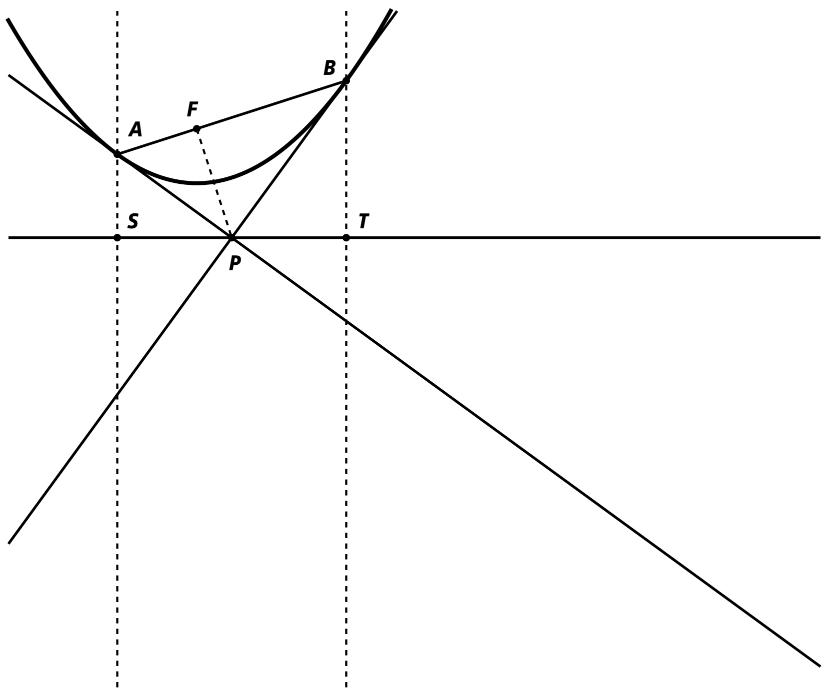
T-5a



Kies een randpunt R, trek de lijn AR en de middelloodlijn van BR. Ze snijden elkaar in een punt N_1, dat als middelpunt kan worden genomen van een cirkel die raakt aan c_1 en door B gaat. Zie hierboven voor drie voorbeelden.

b Het vermoeden rijst dat de meetkundige plaats van de middelpunten van de rakende cirkels een ellips is met A en B als brandpunten. Bewijs:
Stel N_3 is het middelpunt van zo'n inwendig rakende door B gaande cirkel. De cirkels raken in punt P. Dan ligt N_3 op de middelloodlijn van BP. Dus $|BN_3| = |N_3P|$.
Dan geldt: $|AN_3| + |N_3B| = |AN_3| + |N_3P| = r$ Dus N_3 ligt op een ellips met brandpunten A en B.

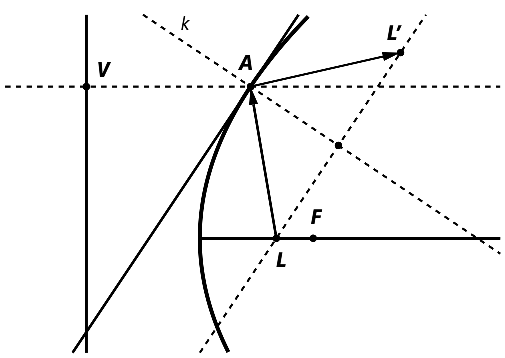
T-6ab



AP is deel van de middelloodlijn van SF dus $\triangle APS \cong \triangle APF$. Dus is $\angle AFP = 90°$
Analoog volgt uit het feit dat BP middelloodlijn is van TF dat ook $\angle BFP = 90°$.
Beide hoeken bij F zijn recht dus $\angle AFB = 180°$ en de stelling is bewezen.

c AP is (deel van) de middelloodlijn van SF, dus is AP ook bissectrice van $\angle SPF$. Analoog is BP bissectrice van $\angle FPT$. Dus AP en BP delen elk hoeken middendoor die samen $180°$ zijn en dus is $\angle APB = 90°$.

T-7a



Trek een pijl van L naar A, construeer vervolgens de raaklijn in A, de loodlijn k op die raaklijn, spiegel L in k en trek de vervolgpijl van A naar L'.

b Als de lichtbron L op de symmetrieas niet samenvalt met F is geplaatst, komen de lichtstralen na spiegeling niet door F omdat dit slechts geldt voor stralen die parallel aan de symmetrieas naar de spiegel komen.

T-8 Er bestaat wel een raaklijn die $45°$ maakt met de hoofdas van de ellips. Een bal die evenwijdig aan die hoofdas wordt afgestoten en terecht komt op bijbehorende raakpunt, kaatst van de rand van het biljart terug en maakt een hoek van $90°$, zodat de bal loodrecht op de hoofdas verder beweegt. Uit symmetrieoverwegingen kan worden ingezien dat de bal in een rechthoek rond kan gaan en dus steeds na vier maal kaatsen weer in hetzelfde punt op het biljart komt.