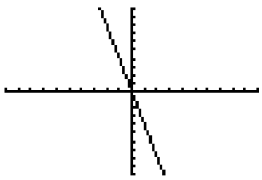
Hoofdstuk 5 - Goniometrische formules

Voorkennis: Herleiden

bladzijde 136

V-1a $f(x) = (x-7)(x+5) = x \cdot x + 5x - 7x - 7 \cdot 5 = x^2 + 5x - 7x - 35$
$g(x) = (x-1)^2 - 36 = (x-1)(x-1) - 36 = x^2 - 2x + 1 - 36$
Vereenvoudiging geeft voor *f* en *g* allebei de functie $x^2 - 2x - 35$.

b

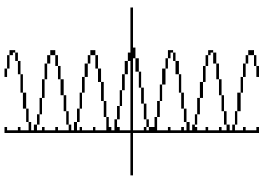


Plot
Invoer: Y1 = (1−X)^2−(1+X)^2
Venster: Standaardinstellingen

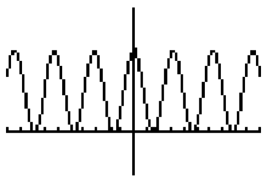
De grafiek is geen parabool maar een rechte lijn, dus $k(x)$ moet te vereenvoudigen zijn tot een lineaire vergelijking.

c Het functievoorschrift uitwerken geeft
$k(x) = (1-x)^2 - (1+x)^2 = (1 - 2x + x^2) - (1 + 2x + x^2) = 1 - 2x + x^2 - 1 - 2x - x^2 = -4x$
dus de functie *k* blijkt de lijn $y = -4x$ te zijn, wat je ook als plot vond bij opdracht b.

V-2a



Plot
Invoer: Y1 = (1−sin(X))(1+sin(X))
Venster: Xmin = −10 ; Xmax = 10
Ymin = −0.5 ; Ymax = 1.5



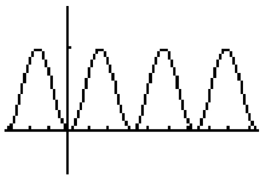
Plot
Invoer: Y1 = (cos(X))^2
Venster: Xmin = −10 ; Xmax = 10
Ymin = −0.5 ; Ymax = 1.5

De grafieken zijn gelijk.

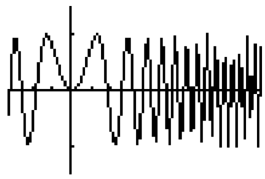
b $f(x) = (1 - \sin x)(1 + \sin x) = 1 - \sin x + \sin x - \sin x \cdot \sin x = 1 - \sin^2 x$

c De gelijkheid $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ geldt voor elke *x*, dus $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ ook, en $f(x) = g(x)$ ook.

V-3



Plot
Invoer Y1 = (sin(X))^2
Venster: Xmin = −π ; Xmax = 3 π
Ymin = −0.5 ; Ymax = 1.5



Plot
Invoer: Y1 = sin(X^2)
Venster: Xmin = −π ; Xmax = 3π
Ymin = −1.5 ; Ymax = 1.5

De grafieken zijn duidelijk verschillend, dus $f(x) = g(x)$ geldt niet voor elke waarde van *x*.

V-4a $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 =$
$(\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) + (\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

b Met de gelijkheid $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ volgt
$2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$, dus $f(x) = 2$.

bladzijde 137

V-5 Herleiden met gebruikmaking van $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ geeft
$h(x) = \sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x = \sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \cdot 1 = \sin x = k(x)$

V-6a Er is geen gemeenschappelijk punt met de *x*-as als $f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x = 0$ geen oplossing heeft.
Manier 1: *f* is een tweedegraadsfunctie in $\cos x$. De discriminant is dan:
$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$. De negatieve waarde betekent dat er geen waarde van $\cos x$ bestaat als oplossing.
Manier 2: Herleiden van $f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x = 0$ geeft
$f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x = 2 - 1 + \cos x + \cos^2 x = 2 + (-1 + \cos^2 x) + \cos x =$
$2 + \sin^2 x + \cos x = 0$. De term $\sin^2 x \geq 0$ wegens het kwadraat, dus voor $2 + \sin^2 x + \cos x = 0$ moet gelden $\cos x \leq -2$, wat niet kan.

b $p(x) = f(x) \cdot g(x) = (1 + \cos x + \cos^2 x) \cdot (1 - \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x - \cos x - \cos^2 x - \cos^3 x =$
$1 - \cos^3 x$.

c Altijd geldt: $-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow -1 \leq \cos^3 x \leq 1$ dus is ook waar
$-1 \leq -\cos^3 x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1 - \cos^3 x \leq 2$.
Hieruit volgt dat $p(x)$ de *x*-as raakt of er boven ligt.

V-7a $v(x) = f(x) - g(x) = (1 + \sin x) - (1 - \sin x) = 1 + \sin x - 1 + \sin x = 2\sin x$
f is een sinusfunctie met amplitude 2, dus periodiek.

b De periode van $2\sin x$ is gelijk aan de periode van $\sin x$, dus 2 π.

c $v(x) = 2\sin x$ is het eenvoudigste functievoorschrift voor *v*.

d $p(x) = f(x) \cdot g(x) = (1 + \sin x)(1 - \sin x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
Het product van twee periodieke functies is periodiek, dus $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$ is ook periodiek. De periode is 2 π. De eenvoudigste vorm is $p(x) = \cos^2 x$.

V-8a $h(x)=(1+\cos x-\sin x)(1+\sin x-\cos x)=$
$1+\sin x-\cos x\ +\ \cos x+\cos x\sin x-\cos^2 x\ -\ \sin x-\sin^2+\sin x\cos x=$
$1+2\sin x\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x=1+2\sin x\cos x-(\cos^2 x+\sin^2 x)=1+2\sin x\cos x-1=$
$2\sin x\cos x$

b De nulpunten zijn de oplossing van $2\sin x\cos x=0\to$
$\sin x=0\to x=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ ...$ ofwel $x=k\cdot\pi$ (k geheel).
of $\cos x=0\to x=\pm\frac{1}{2}\pi, x=\pm 1\frac{1}{2}\pi,....$ ofwel $x=\frac{1}{2}\pi+k\pi$ (k geheel)
Beide oplossingen samen geven de nulpunten: $x=\frac{1}{2}k\pi$ (k geheel)

V-9 $f(x)=\sin x-\sin^3 x=\sin x\cdot(1-\sin^2 x)$.
Uit $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ volgt $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Invullen geeft
$f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x=g(x)$.

5.1 Symmetrie-eigenschappen

bladzijde 138

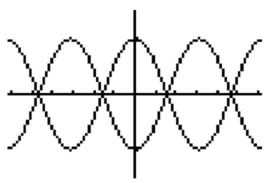
1a $f(t)=\sin t$ heeft symmetrieassen $x=\pm\frac{1}{2}\pi,\ \pm 1\frac{1}{2}\pi,\ \pm 2\frac{1}{2}\pi,\ \pm 3\frac{1}{2}\pi,\ ...$ $g(t)=\cos t$ heeft symmetrieassen $x=0,\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ ...$

b $\sin(-a)=-\sin a$ is juist want de y-waarde van $\sin a$ heeft tegenovergesteld teken bij $\sin(-a)$.

c $\cos(\pi-a)=-\cos a$ is juist want de y-waarde van $\cos a$ heeft tegenovergesteld teken bij $\cos(\pi-a)$.

d $\sin(\pi+a)=-\sin a$ geldt want de y-waarde van $\sin(\pi+a)$ heeft tegenovergesteld teken bij $\sin a$.

e



Plot
Invoer: Y1 = cos(π +X) en Y2 = cos(X)
Venster: Xmin = –2π ; Xmax = 2π
Ymin = –1.5 ; Ymax = 1.5

De y-waarden van de functies hebben tegenovergesteld teken, dus $h(t)=-k(t)$.

bladzijde 139

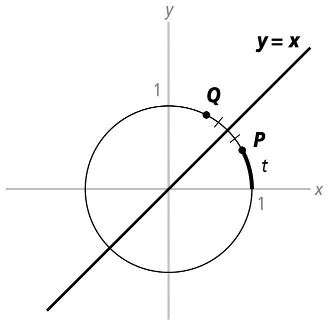
2a $f(t)=\sin(7\pi+t)=\sin(2\pi+(5\pi+t))=\sin(5\pi+t)=\sin(2\pi+(3\pi+t))=\sin(3\pi+t)=$
$\sin(2\pi+(\pi+t))=\sin(\pi+t)=-\sin t$

b $g(t)=\cos(-2\pi-t)=\cos(-(2\pi+t))=\cos(2\pi+t)=\cos t$

c $h(t)=\sin(-3\pi-t)=\sin(-(3\pi+t))=-\sin(3\pi+t)=-\sin(2\pi+(\pi+t))=-\sin(\pi+t)=\sin t$

d $k(t)=\sin(-t-23\pi)=\sin(-(t+23\pi))=-\sin(t+23\pi)=-\sin((t+\pi)+11\cdot 2\quad)=-\sin(t+\pi)=\sin t$

3a

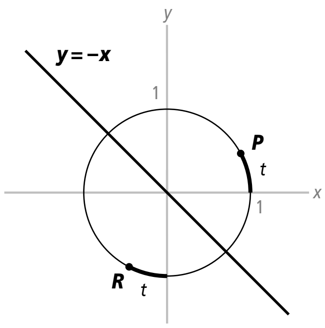


b Bij een punt dat gespiegeld wordt in de lijn $y = x$ verwisselen de x en y-coördinaten van plaats. De coördinaten van P zijn $(\cos t, \sin t)$.
De verwisseling van de coördinaten geeft voor Q $(\sin t, \cos t)$.

c De omtrek van de cirkel met straal r is $2\pi r$. De omtrek van de eenheidscirkel is dus 2π. Een kwartcirkel heeft booglengte $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$. De booglengte van Q tot de y-as is even groot als de booglengte van P tot de x-as, dus t. De booglengte van Q tot de x-as is dus $\frac{1}{2}\pi - t$.

d Uit opgave c volgt dus dat de x-coördinaat van Q gelijk is aan $\cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ en de y-coördinaat aan $\sin(\frac{1}{2}\pi - t)$.
Uit opgave b volgt: y-coördinaat van Q = x-coördinaat van P, ofwel
$\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$.

4a

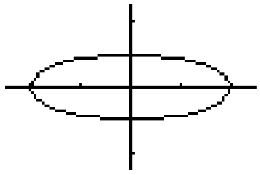


$1\frac{1}{2}\pi - t$ is de driekwart omtrek van de cirkel waar je t van afhaalt.

b P en R zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = -x$.

c 1) Uit opgave a volgt dat de x-coördinaat van R gelijk is aan $\cos(1\frac{1}{2}\pi - t)$.
Uit opgave b volgt dat
de x-coördinaat van R gelijk is aan de y-coördinaat van P vermenigvuldigd met –1,
dus geldt $\cos(1\frac{1}{2}\pi - t) = -\sin t$.
2) Uit opgave a volgt dat de y-coördinaat van R gelijk is aan $\sin(1\frac{1}{2}\pi - t)$.
Uit opgave b volgt dat
de y-coördinaat van R gelijk is aan de x-coördinaat van P vermenigvuldigd met –1,
dus geldt $\sin(1\frac{1}{2}\pi - t) = -\cos t$.

5a Zie de knoppencursus in de helpdesk voor het invoeren van parametervoorstellingen.



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = 2cos(T)
Y1T = sin(π–T)
Venster: Xmin = –2.5 ; Xmax = 2.5
Ymin = –2.5 ; Ymax = 2.5

Alle krommen K, L, M en N hebben deze grafiek en vallen met elkaar samen.

b Herleiden tot de eenvoudigste vorm van de parametervoorstellingen geeft

$$K:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin(\pi - t) = \sin t \end{cases}$$

$$L:\begin{cases} x = 2\cos(\pi + t) = -2\cos t \\ y = -\sin(-t) = \sin t \end{cases}$$

$$M:\begin{cases} x = 2\cos(-t) = 2\cos t \\ y = \sin t = \sin t \end{cases}$$

Gebruik bij het herleiden van de x-coördinaat van N het resultaat van opdracht 4c:
$x = 2\sin(-t - \frac{1}{2}\pi) = 2\sin(-(\frac{1}{2}\pi + t)) = -2\sin(\frac{1}{2}\pi + t) = -2\cdot\sin(1\frac{1}{2}\pi - (\pi - t)) =$
$-2\cdot -\cos(\pi - t) = -2\cos t$.
En voor de y-coördinaat van N volgt met het resultaat van opdracht 4c:
$y = \cos(-t - \frac{1}{2}\pi) = \cos(-(t + \frac{1}{2}\pi)) = \cos(t + \frac{1}{2}\pi) = \cos(1\frac{1}{2}\pi - (\pi - t)) = -\sin(\pi - t) = -\sin t$
Hieruit volgt

$$N:\begin{cases} x = 2\sin(-t - \frac{1}{2}\pi) = -2\cos t \\ y = \cos(-t - \frac{1}{2}\pi) = -\sin t \end{cases}$$

Het vergelijken van de x en y-waarden laat zien dat alleen de parametervoorstellingen K en M identiek zijn.

c Bij de ene parametervoorstelling wordt de kromme bijvoorbeeld linksom doorlopen en bij de andere rechtsom. Of het beginpunt varieert. Ook is tijdens het doorlopen een verdichting (vertraging) of verdunning (versnelling) mogelijk. De uiteindelijke krommen zien er identiek uit maar de parametervoorstellingen zijn verschillend.

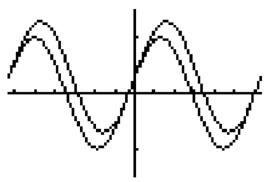
6a De kromme snijdt de y-as voor $x = 0$, dus los op: $\cos 3t = 0$.
Dat geeft $3t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ met k geheel, dus $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$ met k geheel.

b Alle a waarvoor geldt $\cos(3t + a) = \cos 3t$ en alle b waarvoor geldt $\sin(t + b) = \sin t$ voldoen. Als a en b even veelvouden van π zijn is daar volgens $\cos t = \cos(t + 2\pi)$ en $\sin t = \sin(t + 2\pi)$ aan voldaan.
De figuur is lijnsymmetrisch in de x-as en y-as, en puntsymmetrisch in de oorsprong. Voor een punt $P(x, y)$ dat de kromme doorloopt bestaan gespiegelde punten die eveneens de kromme doorlopen: $Q(-x, y)$, $R(x, -y)$ en $S(-x, -y)$. Dus ook a en b waarvoor geldt
$\cos(3t + a) = -\cos 3t$ en $\sin(\pi + b) = -\sin t$ voldoen. Als a en b oneven veelvouden van π zijn is daar volgens $\cos(\pi + t) = -\cos t$ en $\sin(\pi + t) = -\sin t$ aan voldaan.
De oplossingen samen betekent dat a en b positieve veelvouden van π kunnen zijn.
Ga na dat ook geldt $\cos t = \cos(t - 2\pi)$ en $\sin t = \sin(t - 2\pi)$, evenals
$\cos(t - \pi) = -\cos t$ en $\sin(t - \pi) = -\sin t$, waaruit volgt dat ook negatieve veelvouden van π oplossingen zijn.
De volledige oplossing is dus $a = k \cdot \pi$ met k geheel en $b = n \cdot \pi$ met n geheel.

5.2 Somformules

bladzijde 140

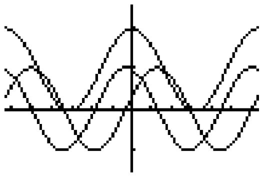
7a



Plot
Invoer: Y1 = sin(X+0.3)
Y2 = sin(X) + sin(0.3)
Y3 = sin(X)*cos(0.3)+cos(X)*sin(0.3)
Venster: Xmin = −2π ; Xmax = 2π
Ymin = −1.5 ; Ymax = 1.5

De grafieken van f en h zijn gelijk, dus kennelijk geldt
$\sin(x + 0,3) = \sin x \cdot \cos 0,3 + \cos x \cdot \sin 0,3$.
De grafiek van f is niet gelijk aan g, dus kennelijk geldt $\sin(x + 0,3) \neq \sin x + \sin 0,3$.

b De functies worden nu
$f(x) = \cos(x + 0{,}3)$, $g(x) = \cos x + \cos 0{,}3$ en $h(x) = \cos x \cdot \sin 0{,}3 + \sin x \cdot \cos 0{,}3$.



Plot
Invoer: Y1 = cos(X+0.3)
Y2 = cos(X) + cos(0.3)
Y3 = cos(X)*sin(0.3)+sin(X)*cos(0.3)
Venster: Xmin = −2π ; Xmax = 2π
Ymin = −1.5 ; Ymax = 2.5

Er zijn nu geen grafieken die samenvallen, dus er zijn geen gelijke functies.

8a $f(x) = \sin(x + 0{,}2) = \sin x \cdot \cos 0{,}2 + \cos x \cdot \sin 0{,}2$
$g(x) = \cos(x - 1) = \cos x \cdot \cos 1 + \sin x \cdot \sin 1$
$h(x) = \sin(x - 7) = \sin x \cdot \cos 7 - \cos x \cdot \sin 7$
b $f(x) = \cos(\pi + x) = \cos\pi \cdot \cos x - \sin\pi \cdot \sin x = -1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = -\cos x$

9 $\sin(u - t) = \sin(u + (-t)) = \sin u \cdot \cos(-t) + \cos u \cdot \sin(-t) = \sin u \cdot \cos t + \cos u \cdot -\sin t =$
$\sin u \cdot \cos t - \cos u \cdot \sin t$
$\cos(u - t) = \cos(u + (-t)) = \cos u \cdot \cos(-t) - \sin u \cdot \sin(-t) = \cos u \cdot \cos t - \sin u \cdot -\sin t =$
$\cos u \cdot \cos t + \sin u \cdot \sin t$

10a Een plot laat zien dat de lijn $y = x$ is.
b $\sin 2t = \sin(t + t) = \sin t \cdot \cos t + \cos t \cdot \sin t = 2\sin t \cdot \cos t$
c $\cos 2t = \cos(t + t) = \cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin t = \cos^2 t - \sin^2 t$
d Uit $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ volgt $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$. Dit invullen in $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$
geeft $\cos 2t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1$.
Uit $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ volgt $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. Dit invullen in $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$
geeft $\cos 2t = 1 - \sin^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$.

bladzijde 141

11a Uit de verdubbelingsformule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ voor elke x volgt
$2\cos^2 x = \cos 2x + 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$ voor elke x.
b $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}) \, dx = \left[\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{4} \cdot \sin\pi + \frac{1}{4}\pi) - (\frac{1}{4} \cdot \sin 0 + 0) = \frac{1}{4}\pi$

12a $\sin 3t = \sin(2t+t) = \sin 2t \cdot \cos t + \cos 2t \cdot \sin t$

b Werk de factor $\sin 2t$ om met een verdubbelingsformule en werk $\cos 2t$ om naar een vorm met $\sin^2 x$ want de gezochte uitdrukking wijst in de richting van een macht van $\sin x$:

$\sin(2t+t) = \sin 2t \cdot \cos t + \cos 2t \cdot \sin t =$

$2\sin t \cos t \cdot \cos t + (1 - 2\sin^2 t) \cdot \sin t =$

$2\sin t \cos^2 t + \sin t - 2\sin^3 t =$

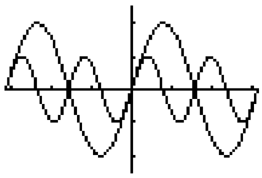
gebruik nu $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ volgens $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$:

$2\sin t(1 - \sin^2 t) + \sin t - 2\sin^3 t =$

$2\sin t - 2\sin^3 t + \sin t - 2\sin^3 t =$

$3\sin t - 4\sin^3 t$

13a



Plot

Invoer: Y1 = sin(4X)

Y2 = 4sin(X)*cos(X)

Venster: Xmin = –π ; Xmax = π

Ymin = –2.5 ; Ymax = 2.5

De grafieken zijn verschillend dus $\sin 4t \neq \sin t \cdot \cos t$.

b $\sin 4t = \sin(2t+2t) = \sin 2t \cdot \cos 2t + \cos 2t \cdot \sin 2t = 2 \cdot \sin 2t \cdot \cos 2t =$

$2 \cdot (2\sin t \cdot \cos t) \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) = \ 4\sin t \cdot \cos^3 t - 4\sin^3 t \cdot \cos t$.

14a $\sin 2t = 2\cos t$

$2\sin t \cdot \cos t = 2\cos t$

$2\sin t \cdot \cos t - 2\cos t = 0$

$2\cos t(\sin t - 1) = 0$

$\cos t = 0$ of $\sin t - 1 = 0$

$\cos t = 0$ of $\sin t = 1$

$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ met k geheel, de twee oplossingen samen geven:

$t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.

b $\sin 2t = 2\sin t$

$2\sin t \cos t = 2\sin t$

$2\sin t \cos t - 2\sin t = 0$

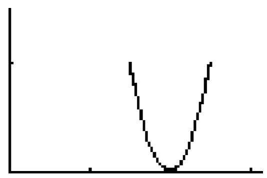
$2\sin t(\cos t - 1) = 0$

$2\sin t = 0$ of $\cos t - 1 = 0$

$\sin t = 0$ of $\cos t = 1 \rightarrow t = k \cdot \pi$ of $t = 2k \cdot \pi$, dus samen geeft dit $t = k \cdot \pi$.

Als oplossingen op het interval $[0, \pi]$ dus $t = 0$ of $t = \pi$.

15



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = 2+0.5sin(2T)
Y1T = 4sin(T)^2*cos(T)^2
Venster: Xmin = 0 ; Xmax = π
Ymin = 0 ; Ymax = 1.5

Voor de snijpunten met de x-as geldt $y = 0$, dus los op $4\sin^2 t \cdot \cos^2 t = 0$:
$\sin^2 t = 0$ of $\cos^2 t = 0$
$\sin t = 0$ of $\cos t = 0$
$t = k \cdot \pi$ of $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ met k geheel.
Samen geven deze oplossingen de oplossing $t = k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel.
De x-coördinaat is $2 + \frac{1}{2}\sin 2t = 2 + \frac{1}{2}\sin k\pi = 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2$.
De coördinaten van het snijpunt zijn dus $(2, 0)$.

b Als $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$ beide gelijk zijn aan 0 dan is er een keerpunt.
$x = 2 + \frac{1}{2}\sin 2t \;\rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \cos 2t = 0 \;\rightarrow\; t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel.
$y = 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t = 4\sin^2 t \cdot (1 - \sin^2 t) = 4\sin^2 t - 4\sin^4 t \;\rightarrow$
$\frac{dy}{dt} = 8\sin t\cos t - 16\sin^3 t\cos t = 8\sin t\cos t \cdot (1 - 2\sin^2 t) = 0 \;\rightarrow$
$8\sin t\cos t = 0$ of $1 - 2\sin^2 t = 0 \;\rightarrow\; \sin t = 0$ of $\cos t = 0$ of $\sin t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \;\rightarrow$

$t = k \cdot \frac{1}{4}\pi$ met k geheel.
Gemeenschappelijke oplossingen waarvoor beide afgeleiden nul zijn gelden dus voor $t = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel.
Substitutie van bijvoorbeeld $t = \frac{1}{4}\pi$ in de parametervoorstelling geeft
$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}\sin 2t = 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2\frac{1}{2} \\ y = 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$, dus $(2\frac{1}{2}, 1)$ is een keerpunt.

Substitutie van bijvoorbeeld $t = -\frac{1}{4}\pi$ in de parametervoorstelling geeft
$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}\sin 2t = 2 + \frac{1}{2} \cdot -1 = 1\frac{1}{2} \\ y = 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$, dus $(1\frac{1}{2}, 1)$ is het andere keerpunt.

c $4\sin^2 t \cdot \cos^2 t = (2\sin t\cos t)^2 = (\sin 2t)^2 = \sin^2 2t$

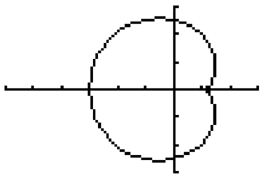
d Druk (een functie van) t uit in x:
$x = 2 + \frac{1}{2}\sin 2t \;\rightarrow\; \sin 2t = 2(x - 2) = 2x - 4$
Herleid y tot (de functie van) sin $2t$ en vul de formule voor x in:
$y = 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t = \sin^2 2t = (\sin 2t)^2 = (2x - 4)^2$, dus $p(x) = (2x - 4)^2$.

e De x-waarde van de parabool $p(x) = (2x - 4)^2$ mag niet voorbij de keerpunten liggen, dus het domein voor p is $1\frac{1}{2} \le x \le 2\frac{1}{2}$.

5.3 Formules van Simpson

bladzijde 142

16a



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = 2cos(T)−cos(2T)
Y1T = 2sin(T)−sin(2T)
Venster: Xmin = −6 ; Xmax = 3
Ymin = −3 ; Ymax = 3

Aflezen geeft aan dat het punt (1, 0) het dichtst bij de oorsprong ligt, en (–3, 0) het verst.

b Het punt M beschrijft in één omloop een cirkel met straal 2 rond O.

Een parametervoorstelling van de baan van M is dan $M:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

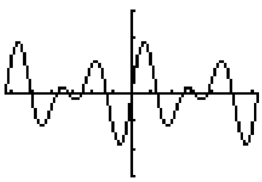
Het punt P beschrijft in één omloop twee keer een cirkel met straal 1 rond punt M.

Ten opzichte van M is de parametervoorstelling van $P:\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

De baan van punt P rond de oorsprong is een samenstelling van deze twee bewegingen.

P beschrijft dan de kromme: $\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t + \sin 2t \end{cases}$

17a

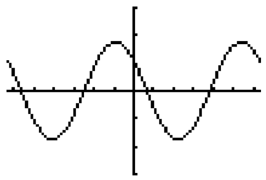


Plot
Invoer: Y1 = sin(3X)+sin(2X)
Venster: Xmin = –2π ; Xmax = 2π
Ymin = –3 ; Ymax = 3

De functie is periodiek want de grafiek herhaalt zich na de periode 2 π.

b De grafiek is wel periodiek maar lijkt niet op een sinus of cosinus en is dus geen sinusoïde.

c



Plot
Invoer:Y1 = sin(3+X)+sin(2+X)
Venster: Xmin = -2ϖ ; Xmax = 2ϖ
Ymin = –3 ; Ymax = 3

De functie is periodiek met periode 2 π.
Deze grafiek lijkt wel op een sinus of cosinus en is dus een sinusoïde.

bladzijde 143

18a $f(t) = \sin t + \sin(t-1) = 2\sin\tfrac{1}{2}(t+t-1)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t-(t-1)) = 2\sin(t-\tfrac{1}{2})\cdot\cos\tfrac{1}{2} \approx 1{,}76\cdot\sin(t-\tfrac{1}{2})$
$g(t) = \cos 2t + \cos(t-1) = 2\cos\tfrac{1}{2}(2t+t-1)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(2t-(t-1)) = 2\cos(1\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2})\cdot\cos(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2})$

b De grafiek van *f* is zeker een sinusoïde, maar de grafiek van *g* niet want het functievoorschrift van *g* is niet te herleiden tot de vorm $f(x) = d + a\sin b(x-c)$.

19a 1) $\sin t + \sin u = 2\sin\tfrac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t-u)$ wordt met $t = u$:
$\sin u + \sin u = 2\sin\tfrac{1}{2}(u+u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(u-u)$
$2\sin u = 2\sin u\cdot\cos 0 = 2\sin u\cdot 1 = 2\sin u$

2) $\sin t - \sin u = 2\sin\tfrac{1}{2}(t-u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t+u)$ wordt met $t = u$:
$\sin u - \sin u = 2\sin\tfrac{1}{2}(u-u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(u+u)$
$0 = 2\sin 0\cdot\cos u = 2\cdot 0\cdot\cos u = 0$

3) $\cos t + \cos u = 2\cos\tfrac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t-u)$ wordt met $t = u$:
$\cos u + \cos u = 2\cos\tfrac{1}{2}(u+u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(u-u)$
$2\cos u = 2\cos u\cdot\cos 0 = 2\cos u\cdot 1 = 2\cos u$

4) $\cos t - \cos u = -2\sin\tfrac{1}{2}(t+u)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(t-u)$ wordt met $t = u$:
$\cos u - \cos u = -2\sin\tfrac{1}{2}(u+u)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(u-u)$
$0 = -2\sin u\cdot\sin 0 = -2\sin u\cdot 0 = 0$

b 1) $\sin t + \sin u = 2\sin\tfrac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t-u)$ wordt met $u = 0$:
$\sin t + \sin 0 = 2\sin\tfrac{1}{2}(t)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t)$
$\sin t = 2\sin\tfrac{1}{2}t\cdot\cos\tfrac{1}{2}t$

2) $\sin t - \sin u = 2\sin\tfrac{1}{2}(t-u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t+u)$ wordt met $u = 0$:
$\sin t - \sin 0 = 2\sin\tfrac{1}{2}(t)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t)$
$\sin t = 2\sin\tfrac{1}{2}t\cdot\cos\tfrac{1}{2}t$

3) $\cos t + \cos u = 2\cos\tfrac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t-u)$ wordt met $u = 0$:
$\cos t + \cos 0 = 2\cos\tfrac{1}{2}(t)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(t)$
$\cos t + 1 = 2\cos\tfrac{1}{2}t\cdot\cos\tfrac{1}{2}t = 2\cos^2\tfrac{1}{2}t$

4) $\cos t - \cos u = -2\sin\tfrac{1}{2}(t+u)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(t-u)$ wordt met $u = 0$:
$\cos t - \cos 0 = -2\sin\tfrac{1}{2}(t)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(t)$
$\cos t - 1 = -2\sin^2\tfrac{1}{2}t$

De formules die je in deze opdracht krijgt zijn de verdubbelingsformules waarin de variabele $\tfrac{1}{2}t$ gebruikt wordt in plaats van *t*.

20a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2(\cos t - \cos 2t) = 2 \cdot -2\sin\frac{1}{2}(t+2t)\cdot\sin\frac{1}{2}(t-2t) = -4\sin 1\frac{1}{2}t\cdot\sin(-\frac{1}{2}t) = 4\sin 1\frac{1}{2}t\cdot\sin\frac{1}{2}t$

b Als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ en $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$, dan is er in dat punt een horizontale raaklijn.

Oplossingen voor $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ zijn:

$4\sin 1\frac{1}{2}t\cdot\sin\frac{1}{2}t = 0 \Rightarrow \sin 1\frac{1}{2}t = 0$ of $\sin\frac{1}{2}t = 0 \Rightarrow$

$1\frac{1}{2}t = k\cdot\pi$ met k geheel of $\frac{1}{2}t = k\cdot\pi$ met k geheel $\Rightarrow$
$t = k\cdot\frac{2}{3}\pi$ met k geheel of $t = k\cdot 2\pi$ met k geheel.
Op het interval $[0, 2\pi]$ waarop t geldt volgens opdracht 16, liggen de waarden
$t = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ 1\frac{1}{3}\pi$ en 2π .

De x-coördinaat $x = 2\cos t - \cos 2t$ geeft $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\sin t - 2\sin 2t$.

Voor $t = 0$ en $t = 2\pi$ is $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 0$, dus deze oplossingen voldoen niet.

Van de oplossing blijft dus over $t = \frac{2}{3}\pi$ en $t = 1\frac{1}{3}\pi$ voor de tijdstippen waarop de raaklijn horizontaal is.

c Bij $t = \frac{2}{3}\pi$ zijn de waarden $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t = 2\cos\frac{2}{3}\pi - \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} \\ y = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin\frac{2}{3}\pi - \sin\frac{4}{3}\pi \approx 2{,}60 \end{cases}$

Bij $t = 1\frac{1}{3}\pi$ zijn de waarden $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t = 2\cos 1\frac{1}{3}\pi - \cos 2\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} \\ y = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin 1\frac{1}{3}\pi - \sin 2\frac{2}{3}\pi \approx -2{,}60 \end{cases}$

De coördinaten zijn dus (–0,50 ; 2,60) en (–0,50 ; –2,60).

d Als $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \neq 0$ dan is er een verticale raaklijn.

Oplossingen voor $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ zijn:

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\sin t - 2\sin 2t = -2\sin t - 2\cdot 2\sin t\cos t = -2\sin t\cdot(1 - 2\cos t) = 0 \Rightarrow$

$\sin t = 0$ of $1 - 2\cos t = 0 \rightarrow \sin t = 0$ of $\cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$t = 0,\ \pi,\ 2\pi$ of $t = \frac{1}{3}\pi,\ 1\frac{2}{3}\pi$ op het interval $[0, 2\pi]$.

Voor $t = 0$ en $t = 2\pi$ geeft $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4\sin 1\frac{1}{2}t\cdot\sin\frac{1}{2}t$ de waarde 0, dus deze oplossingen voldoen niet. Van de oplossing blijft daarom $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$ en $t = 1\frac{2}{3}\pi$ over.

Bij $t = \frac{1}{3}\pi$ zijn de waarden $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t = 2\cos\frac{1}{3}\pi - \cos\frac{2}{3}\pi = 1\frac{1}{2} \\ y = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin\frac{1}{3}\pi - \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0{,}87 \end{cases}$

Bij $t = \pi$ zijn de waarden $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t = 2\cos\pi - \cos 2\pi = -3 \\ y = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin\pi - \sin 2\pi = 0 \end{cases}$

Bij $t = 1\frac{2}{3}\pi$ zijn de waarden $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t = 2\cos 1\frac{2}{3}\pi - \cos 3\frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{2} \\ y = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin 1\frac{2}{3}\pi - \sin 3\frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx -0{,}87 \end{cases}$

De exacte coördinaten zijn dus $(1\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx \left(1\frac{1}{2};\ 0{,}87\right)$, $(-3, 0)$ en$(1\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx \left(1\frac{1}{2};\ -0{,}87\right)$

21a $y = 1\frac{1}{2}\cos t + \cos 1\frac{1}{2}t \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -1\frac{1}{2}\sin t - 1\frac{1}{2}\sin 1\frac{1}{2}t = -1\frac{1}{2}(\sin t + \sin 1\frac{1}{2}t)$

De snelheid in verticale richting is nul als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$.

Met de formule van Simpson $\sin t + \sin u = 2\sin\frac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\frac{1}{2}(t-u)$ wordt dit

$-1\frac{1}{2}(\sin t + \sin 1\frac{1}{2}t) = -1\frac{1}{2}(2\sin\frac{1}{2}(t+1\frac{1}{2}t)\cdot\cos\frac{1}{2}(t-1\frac{1}{2}t)) = -3\sin 1\frac{1}{4}t\cdot\cos(-\frac{1}{4}t) =$

$-3\sin 1\frac{1}{4}t\cdot\cos\frac{1}{4}t = 0 \quad \rightarrow \quad \sin 1\frac{1}{4}t = 0$ of $\cos\frac{1}{4}t = 0$

Oplossen van $\sin 1\frac{1}{4}t = 0$ geeft $1\frac{1}{4}t = k\cdot\pi \quad \rightarrow \quad t = k\cdot\frac{4}{5}\pi$ met k geheel.

Oplossen van $\cos\frac{1}{4}t = 0$ geeft $\frac{1}{4}t = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \quad \rightarrow \quad t = 2\pi + k\cdot 4\pi$ met k geheel.

Hiervan voldoen op het interval $[0, 4\pi]$ de oplossingen

$t = 0,\ t = \frac{4}{5}+,\ t = 1\frac{3}{5}\pi,\ t = 2\pi,\ t = 2\frac{2}{5}\pi,\ t = 3\frac{1}{5}\pi$ en $t = 4\pi$.

b Invullen van deze waarden van t in de parametervoorstelling geeft de x en y-waarden van de punten die daarbij horen. Je vindt in volgorde van de oplossingen de punten (0; 2,50), (0,59; –2,02), (–0,95; 0,77), (0; 0,5), (0,95; 0,77), (–0,59; –2,02) en (0; 2,50).

c Als $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \neq 0$ dan is er een verticale raaklijn.

$x = \sin t \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ met k geheel.

Hiervan voldoen op het interval $[0, 4\pi]$ de oplossingen

$t = \frac{1}{2}\pi,\ t = 1\frac{1}{2}\pi,\ t = 2\frac{1}{2}\pi$ en $t = 3\frac{1}{2}\pi$.

Voor alle oplossingen is aan de voorwaarde $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -3\sin 1\frac{1}{4}t\cdot\cos\frac{1}{4}t \neq 0$ voldaan.

Invullen van deze waarden van t in de parametervoorstelling geeft de x en y-waarden van de punten met een verticale raaklijn. Je vindt in volgorde van de oplossingen de punten (1; –0,71), (–1; 0,71); (1; 0,71) en (–1; –0,71).

22a Voor de cardioïde uit opgave 16 met parametervoorstelling $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

geldt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\sin t + 2\sin 2t$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\cos t - 2\cos 2t$.

Voor $t = 0$ geeft $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\cdot 1 - 2\cdot 1 = 0$.

Invullen in de formule voor de baansnelheid $v(t) = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ geeft

$v(0) = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.

Voor $t = \pi$ geeft $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2\cdot -1 - 2\cdot 1 = -4$.

Invullen in de formule voor de baansnelheid geeft $v(\pi) = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$.

b De cardioïde, als baan van punt P op de tweede euro, heeft de grootste baansnelheid als P, gezien vanuit M, het snelt vooruit gaat. Dat is in het punt $(-3, 0)$.
De baansnelheid is het kleinst als P, gezien vanuit M, het snelt achteruit gaat. Dat is in het punt $(1, 0)$.

c $v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(-2\sin t + 2\sin 2t\right)^2 + \left(2\cos t - 2\cos 2t\right)^2} =$

$\sqrt{\left(4\sin^2 t - 8\sin t \cdot \sin 2t + 4\sin^2 2t\right) + \left(4\cos^2 t - 8\cos t \cdot \cos 2t + 4\cos^2 2t\right)} =$

$\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t - 8\cos t \cdot \cos 2t - 8\sin t \cdot \sin 2t} =$

$\sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 4(\sin^2 2t + \cos^2 2t) - 8(\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t)} =$

$\sqrt{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 8 \cdot \cos(t - 2t)} = \sqrt{8 - 8 \cdot \cos(-t)} = \sqrt{8 - 8\cos t}$.

d De baansnelheid is maximaal als $\sqrt{8 - 8\cos t}$ maximaal is. Dat is voor $\cos t = -1$.
Op het interval $[0, 2\pi]$ voor t geldt dat voor $t = \pi$. Bij opdracht 22d vond je dat daar het punt (–3, 0) bijhoort, wat klopt met opdracht b.

5.4 Formules gebruiken

bladzijde 144

23a Uit $x = 2\sin t$ volgt $x^2 = 4\sin^2 t$. Met $y = \sin^2 t$ volgt hieruit $x^2 = 4y$ ofwel $y = \frac{1}{4}x^2$.

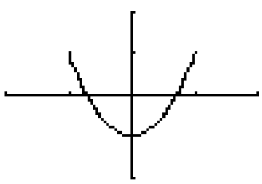
b De mogelijke x-waarden bepalen het domein, en voor $x = 2\sin t$ liggen de x-waarden tussen –2 en 2. De parabool $y = \frac{1}{4}x^2$ heeft domein $\mathbb{R}$. Om de kromme en de parabool precies samen te laten vallen moet het domein dus beperkt worden tot het interval [–2, 2].

24 Uit $y = 4\sin t$ volgt $y^2 = 16\sin^2 t$ ofwel $\sin^2 t = \frac{1}{16}y^2$. Met $x = 4\sin^2 t$ volgt hieruit $x = 4 \cdot \frac{1}{16}y^2 = \frac{1}{4}y^2$, dus voor elk punt op de kromme geldt $x = \frac{1}{4}y^2$.

25 Uit $x = 2\sin t$ volgt $\sin t = \frac{1}{2}x$.
Uit de verdubbelingsformule $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ volgt $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$.
Met $y = \cos 2t$ volgt hieruit $(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \Rightarrow$
$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 - y \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

bladzijde 145

26a

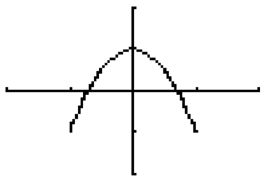


Plot Mode = Par
Invoer: X1T = cos(T)
Y1T = cos(2T)
Venster: Xmin = –2; Xmax = 2
Ymin = –2; Ymax = 2

De grafiek heeft de vorm van een dalparabool.

b $y = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 2 \cdot (\cos t)^2 - 1 = 2x^2 - 1$
De formule bij de dalparabool is dus $y = 2x^2 - 1$.

27a



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = sin(T)
Y1T = cos(2T)
Venster: Xmin = –2; Xmax = 2
Ymin = –2; Ymax = 2

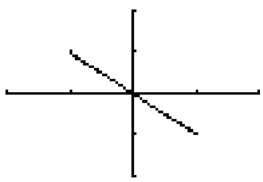
De periode van de kromme is de gemeenschappelijke periode van x en y. De periode van x is 2 π en de periode van y is π. De periode van de kromme is dus 2 π.

b Bij het plotten zie je dat de kromme op de volgende manier doorlopen wordt: van de top naar het rechter keerpunt, van het rechter keerpunt naar het linker keerpunt en van het linker keerpunt terug naar de top. Bij de keerpunten is de uitwijking in de x-richting maximaal, dus sin t is 1 of –1, dus $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$ op $[0, 2\pi]$. Elk punt van de kromme wordt precies één keer doorlopen als t de waarden doorloopt die bij de keerpunten horen. Dat is het interval $[\frac{1}{2}\pi,\ 1\frac{1}{2}\pi]$.

c $y = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2(\sin t)^2 = 1 - 2x^2$.
De formule hoort bij een bergparabool zoals de plot laat zien.

d Het rechterkeerpunt voor $t = \frac{1}{2}\pi$ heeft coördinaten $(\sin\frac{1}{2}\pi, \cos(2 \cdot \frac{1}{2}\pi)) = (1, -1)$.
Het linkerkeerpunt voor $t = 1\frac{1}{2}\pi$ heeft coördinaten $(\sin 1\frac{1}{2}\pi, \cos(2 \cdot 1\frac{1}{2}\pi)) = (-1, -1)$.

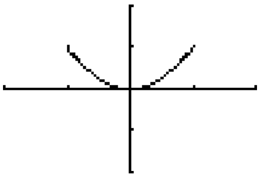
28a



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = cos(π–T)
Y1T = sin(π/2–T)
Venster: Xmin = –2; Xmax = 2
Ymin = –2; Ymax = 2

Uit de gelijkheid $\cos(\pi - t) = -\cos t$ volgt $x = \cos(\pi - t) = -\cos t \Rightarrow \cos t = -x$.
Uit de gelijkheid $\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$ volgt $y = \sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$.
Vervanging hierin van $\cos t$ door $-x$ geeft $y = -x$.

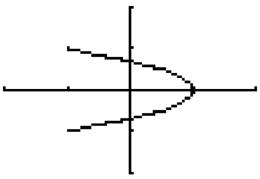
b



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = cos(π/2–T)
Y1T = (sin(π–T))^2
Venster: Xmin = –2; Xmax = 2
Ymin = –2; Ymax = 2

Uit de gelijkheid $\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$ volgt $x = \cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$.
Uit de gelijkheid $\sin(\pi - t) = \sin t$ volgt $y = \sin^2(\pi - t) = \sin^2 t$.
Vervanging hierin van $\sin t$ door x geeft $y = x^2$.

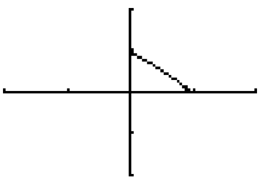
c



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = cos(2–T)
Y1T = –sin(–T)
Venster: Xmin = –2; Xmax = 2
Ymin = –2; Ymax = 2

Uit de gelijkheid $\sin(-t) = -\sin t$ volgt $y = -\sin(-t) = \sin t$.
Uit de gelijkheid $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ volgt $x = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$.
Vervanging hierin van $\sin t$ door y geeft $x = 1 - 2y^2$.

d



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = (sin(T–π))^2
Y1T = (cos(π –T))^2
Venster: Xmin = –2; Xmax = 2
Ymin = –2; Ymax = 2

Uit de gelijkheid $\sin(-t) = -\sin t$ volgt $\sin(t - \pi) = -\sin(\pi - t)$ dus
$\sin^2(t - \pi) = (-\sin(\pi - t))^2 = \sin^2(\pi - t)$ zodat $x = \sin^2(\pi - t)$.
Uit de gelijkheid $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ volgt $\sin^2(\pi - t) + \cos^2(\pi - t) = 1$
Vervanging hierin van $\sin^2(\pi - t)$ door x en $\cos^2(\pi - t)$ door y geeft $x + y = 1$.

29a $x=6\cos t$ kan waarden tussen –6 en 6 aannemen: [–6, 6].
$y=3\sin t$ kan waarden tussen –3 en 3 aannemen: [–3, 3].

b $x=6\cos t \;\Rightarrow\; \cos t=\frac{1}{6}x$
$y=3\sin t \;\Rightarrow\; \sin t=\frac{1}{3}y$

c $\sin^2 t+\cos^2 t=1 \;\Rightarrow\; (\frac{1}{6}x)^2+(\frac{1}{3}y)^2=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{36}x^2+\frac{1}{9}y^2=1 \;\Rightarrow\; x^2+4y^2=36$

30a $f(x)=\sin^3 x=\sin x\cdot\sin^2 x$. Uit de gelijkheid $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ volgt
$\sin^2 x=1-\cos^2 x$.
Substitutie geeft $f(x)=\sin^3 x=\sin x\cdot\sin^2 x=\sin x\cdot(1-\cos^2 x)=\sin x-\sin x\cdot\cos^2 x$.

b $\int_0^\pi f(x)\,dx=\int_0^\pi \sin^3 x\,dx=\int_0^\pi(\sin x-\sin x\cdot\cos^2 x)\,dx=[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x]_0^\pi=$
$(1+\frac{1}{3}\cdot-1)-(-1+\frac{1}{3})=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$

c $g(x)=\sin^2 x$.
Uit de gelijkheid $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ volgt $2\sin^2 x=1-\cos 2x \;\Rightarrow\; \sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$
Substitutie geeft $g(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

d $\int_0^\pi g(x)\,dx=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx\int_0^\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x)dx=[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x]_0^\pi=(\frac{1}{2}\quad-0)-(0-0)=\frac{1}{2}$.

5.5 Gemengde opdrachten

bladzijde 146

31a Met behulp van een plot van de grafiek zie je dat f_2 een sinusoïde zou kunnen zijn van de vorm $f_2(x)=a+b\sin c(x-d)$.
De grafiek heeft een maximum 2 voor $x=\pi$ en minimum 1 voor $x=1\frac{1}{2}\pi$ en dus is de evenwichtsstand $1\frac{1}{2}$, het amplitude $\frac{1}{2}$ en de periode $2\cdot\frac{1}{2}\pi=\pi$. Dus $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ en $c=2$. Het ‘startpunt’ is dan $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\frac{1}{2}\right)$, dus $d=\frac{3}{4}\pi$.
Dus $f_2(x)=1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(x-\frac{3}{4}\pi)$.
Om aan te tonen dat deze combinatie juist is moet blijken dat $f_2(x)=1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(x-\frac{3}{4}\pi)$ gelijk is aan $f_2(x)=1+\sin^2 x+\cos 2x$. Een mogelijke herleiding is de volgende:
$f_2(x)=1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2(x-\frac{3}{4}\pi)=1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x-1\frac{1}{2}\pi)=$
$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\sin 2x\cdot\cos 1\frac{1}{2}\pi+\cos 2x\cdot\sin 1\frac{1}{2}\pi)=\quad 1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\sin 2x\cdot 0-\cos 2x\cdot -1)=$
$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\quad 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos 2x=\quad 1+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\cos 2x=$
$1+\frac{1}{2}(2\sin^2 x)+\cos 2x=\quad 1+\sin^2 x+\cos 2x$.

b $f_4(x)=1+\sin^2 x+\cos 4x=\quad 1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sin^2 x+\cos 4x=$
$1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)+\cos 4x=\quad 1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos 4x$.

32a De x-coördinaat van je positie is de som van twee horizontale verplaatsingen:
1e)je horizontale verplaatsing op de grote cirkel.
2e)je horizontale verplaatsing op de kleine cirkel t.o.v. diens middelpunt.
De grote cirkel heeft een rondgang van 5 seconden, dus een hoek van 2 π duurt 5s.
De hoek van de grote cirkel verandert dus met de tijd volgens $\frac{2\pi}{5}t = 0,4\pi t$.

De kleine cirkel heeft een rondgang van 2 seconden, dus de hoek daarvan verandert met de tijd volgens $\frac{2\pi}{2}t = \pi t$.

De x-coördinaat van een punt op de grote cirkel met straal 5 is $5 \cdot \cos 0,4\pi t$.
De x-coördinaat van een punt op de kleine cirkel t.o.v. diens middelpunt met straal 2 is $2 \cdot \cos \pi t$.
De som van de verplaatsingen vind je als x-waarde in de parametervoorstelling.
Voor de verticale verplaatsing geldt eenzelfde redenering alleen neem je dan de sinus in plaats van de cosinus.

b $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$. De afgeleiden zijn $\frac{dx}{dt} = -2\pi \sin 0,4\pi t - 2\pi \sin \pi t$ en

$\frac{dy}{dt} = 2\pi \cos 0,4\pi t + 2\pi \cos \pi t$. Uitrekenen voor $t = 0$ geeft

$\frac{dx}{dt} = -2\pi \sin(0,4\pi \cdot 0) - 2\pi \sin(\pi \cdot 0) = 0$ en

$\frac{dy}{dt} = 2\pi \cos(0,4\pi \cdot 0) + 2\pi \cos(\pi \cdot 0) = 2\pi + 2\pi = 4\pi$,

waaruit volgt $\frac{dy}{dx} = 4\pi : 0$, kan niet. De afgeleide bestaat dus niet voor $t = 0$
Je ziet dat terug in de figuur waar de beweging alleen in verticale richting is: de richtingscoëfficiënt van de verticale raaklijn is oneindig.

De baansnelheid is $v(0) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{0^2 + (4\pi)^2} = 4\pi \approx 12,57$ m/s.
Uitrekenen voor $t = 2$ geeft

$\frac{dx}{dt} = -2\pi \sin(0,4g \cdot 2) - 2\pi \sin(\pi \cdot 2) = -2\pi \sin(0,8\pi) \approx -3,69$ m/s en

$\frac{dy}{dt} = 2 \ \cos(0,4\pi \cdot 2) + 2 \ \cos(\pi \cdot 2) = 2\pi \cos(0,8\pi) + 2\pi \approx 1,20$ m/s,

waaruit volgt $\frac{dy}{dx} = 1,20 : -3,69 \approx -0,33$.
De baansnelheid is $v(2) = \sqrt{(-3,69)^2 + (1,20)^2} \approx 3,88$ m/s.

c Bereken voor de baansnelheid $v(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ met

$\frac{dx}{dt}=-2\pi\sin 0{,}4\pi t-2\pi\sin\pi t$ en $\frac{dy}{dt}=2\pi\cos 0{,}4\pi t+2\pi\cos\pi t$ eerst de kwadraten:

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=(-2\pi\sin 0{,}4\pi t-2\pi\sin\pi t)^2=4\pi^2\sin^2 0{,}4\pi t+8\pi^2\sin 0{,}4\pi t\cdot\sin\pi t+4\pi^2\sin^2\pi t$

$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2\pi\cos 0{,}4\pi t+2\pi\cos\pi t)^2=4\pi^2\cos^2 0{,}4\pi t+8\pi^2\cos 0{,}4\pi t\cdot\cos\pi t+4\pi^2\cos^2\pi t$

Maak bij de optelling van de afgeleiden gebruik van de regel $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ zodat

$4\pi^2\sin^2 0{,}4\pi t+4\pi^2\cos^2 0{,}4\pi t=4\pi^2(\sin^2 0{,}4\pi t+\cos^2 0{,}4\pi t)=4\pi^2\cdot 1=4\pi^2$ en

$4\pi^2\sin^2\pi t+4\pi^2\cos^2\pi t=4\pi^2(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)=4\pi^2\cdot 1=4\pi^2$.

Maak verder gebruik van de somformule $\cos(u-t)=\cos u\cdot\cos t+\sin u\cdot\sin t$ zodat

$8\pi^2\sin 0{,}4\pi t\cdot\sin\pi t+8\pi^2\cos 0{,}4\pi t\cdot\cos\pi t=8\pi^2\cos(0{,}4\pi t-\pi t)=8\pi^2\cos(-0{,}6\pi t)=8\pi^2\cos 0{,}6\pi t$

De baansnelheid wordt dan

$v(t)=\sqrt{4\pi^2+4\pi^2+8\pi^2\cos 0{,}6\pi t}=\sqrt{4\pi^2(2+2\cos 0{,}6\pi t)}=2\pi\sqrt{2+2\cos 0{,}6\pi t}$.

d De baansnelheid is maximaal als de wortel de maximale waarde heeft, dus als $\cos 0{,}6\pi t=1$.

De baansnelheid is dan $v(t)=2\pi\sqrt{2+2\cdot 1}=4\pi\approx$ 12,57 m/s.

Met deze snelheid wordt in 1 uur = 3600 s een afstand van 12,57 · 3600 ≈ 45 252 meter afgelegd. De snelheid is dus ca. 45,3 km/h.

bladzijde 147

33a De helling van de kromme in een punt is $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$.

Met $\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\cdot\sin t$ en $\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cdot\cos t$ geeft dat

$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin^2 t\cdot\cos t}{-3\cos^2 t\cdot\sin t}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\tan t$.

Voor punten op A die ook op de lijn $y=-x$ liggen geldt $\sin^3 t=-\cos^3 t$. Oplossen

geeft $\sin^3 t=-\cos^3 t \Rightarrow \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}=-1 \Rightarrow \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^3=-1\Rightarrow \tan^3 t=-1 \Rightarrow \tan t=-1.$

De exacte helling in de snijpunten is dus $\frac{dy}{dx}=-1\cdot\tan t=-1.-1=1$.

Ga na dat je de waarden voor t wel kunt berekenen maar hier niet nodig hebt.

b Als je $t=\frac{1}{4}\pi$ invult vind je het punt $P(0{,}71; 0{,}71)$ op kromme E en $Q(0{,}35; 0{,}35)$ op kromme A.

Het midden van het lijnstuk PQ heeft coördinaten $(\frac{0{,}71+0{,}35}{2};\frac{0{,}71+0{,}35}{2})$ = (0,53; 0,53).

De lijn door (0, 1) en (1, 0) heeft vergelijking $y=-x+1$. Voor $t=\frac{1}{4}\pi$ heeft een punt op deze lijn de exacte coördinaten (0,5; 0,5). Dat is niet het midden van PQ, dus er is geen spiegeling.

c Twee lijnen staan loodrecht op elkaar als het product van hun hellingsgetallen –1 is.
De helling van de raaklijn in Q aan A is al berekend in opdracht a als $-\tan t$.
De lijn door de punten $P(\cos t, \sin t)$ en $Q(\cos^3 t, \sin^3 t)$ heeft hellingsgetal

$$\frac{\sin t-\sin^3 t}{\cos t-\cos^3 t}=\frac{\sin t(1-\sin^2 t)}{\cos t(1-\cos^2 t)}=\frac{\sin t\cdot\cos^2 t}{\cos t\cdot\sin^2 t}=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{1}{\frac{\sin t}{\cos t}}=\frac{1}{\tan t}.$$

Het product van de hellingen is gelijk aan $-\tan t\cdot\dfrac{1}{\tan t}=-1$ voor alle waarden van t die geen veelvoud zijn van $\frac{1}{2}\pi$, dus de lijn PQ staat loodrecht op de raaklijn in Q aan A.

d $\dfrac{dx}{dt}=x'(t)=-3\cos^2 t\cdot\sin t$ en $\dfrac{dy}{dx}=y'(t)=3\sin^2 t\cdot\cos t$ invullen in

$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ geeft

$$\sqrt{(-3\cos^2 t\cdot\sin t)^2+(3\sin^2 t\cdot\cos t)^2}=\sqrt{9\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9\sin^4 t\cdot\cos^2 t}=$$

$$\sqrt{9\cos^2 t\cdot\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}=3\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}=3|\cos t\cdot\sin t|=3|\sin t\cdot\cos t|.$$

e Op het integratie-interval $[0,\frac{1}{2}\pi]$ zijn $\sin t$ en $\cos t$ positief, dus $\sin t\cdot\cos t$ ook.
Daaruit volgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3|\sin t\cdot\cos t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\cdot\cos t\,dt=[1\tfrac{1}{2}\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}}=(1\tfrac{1}{2})-(0)=1\tfrac{1}{2}.$$

Het antwoord 1,5 is dus de exacte lengte.

ICT-Symmetrie-eigenschappen

bladzijde 148

I-1a Verander k in het formulevoorschrift van A zodat je $y=\sin(-2\pi-t)$, enz. krijgt.
Bij $k=-2, 0$ en 2 hoort dezelfde grafiek. Bij $k=-1$ en 1 zijn de grafieken ook gelijk aan elkaar.

b De grafiek van $h_0(t)=\sin(0\cdot\pi-t)$ verschilt van de grafiek van $f(t)=\sin t$ en $g(t)=\cos t$.

c $h_1(t)=\sin(\pi-t)$ heeft dezelfde grafiek als $y=\sin t$.
$h_2(t)=\sin(2\pi-t)$ heeft dezelfde grafiek als $y=-\sin t$.

d a) Verander k in het formulevoorschrift van B zodat je $y=\sin(-2\pi+t)$, enz. krijgt.
Bij $k=-2, 0$ en 2 hoort dezelfde grafiek. Bij $k=-1$ en 1 zijn de grafieken ook gelijk aan elkaar.
b) De grafiek van $f_0(t)=\sin(0\cdot\pi+t)$ komt overeen met de grafiek van $f(t)=\sin t$.
c) $f_1(t)=\sin(\pi+t)$ heeft dezelfde grafiek als $y=-\sin t$.
$f_2(t)=\sin(2\pi+t)$ heeft dezelfde grafiek als $y=\sin t$.

e a) Verander k in het formulevoorschrift van C zodat je $y=\cos(-2\pi-t)$, enz. krijgt.
Bij $k=-2, 0$ en 2 hoort dezelfde grafiek. Bij $k=-1$ en 1 zijn de grafieken ook gelijk aan elkaar.
b) De grafiek van $g_0(t)=\cos(0\cdot\pi-t)$ komt overeen met de grafiek van $g(t)=\cos t$.
c) $g_1(t)=\cos(\pi-t)$ heeft dezelfde grafiek als $y=-\sin t$.
$g_2(t)=\cos(2\pi-t)$ heeft dezelfde grafiek als $y=\cos t$.

bladzijde 149

I-2a $f(t)=\sin(7\pi+t)=\sin(2\pi+(5\pi+t))=\sin(5\pi+t)=\sin(2\pi+(3\pi+t))=\sin(3\pi+t)=$
$\sin(2\pi+(\pi+t))=\sin(\pi+t)=-\sin t$

b $g(t)=\cos(-2\pi-t)=\cos(-(2\pi+t))=\cos(2\pi+t)=\cos t$

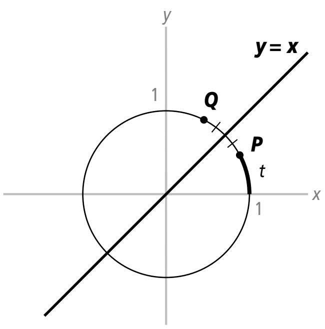
c $h(t)=\sin(-3\pi-t)=\sin(-(3\pi+t))=-\sin(3\pi+t)=-\sin(2\pi+(\pi+t))=-\sin(\pi+t)=\sin t$

d $k(t)=\sin(-t-23\pi)=\sin(-(t+23\pi))=-\sin(t+23\pi)=-\sin((t+\pi)+11\cdot 2\pi)=-\sin(t+\pi)=\sin t$

I-3a Bij $k=-5, -1$ en 3 hoort dezelfde grafiek. Bij $k=-3, 1$ en 5 zijn de grafieken ook gelijk aan elkaar.

b $h_1(t)=\sin(\frac{1}{2}\pi-t)=\cos t$
$h_3(t)=\sin(1\frac{1}{2}\pi-t)=-\cos t$

c



d Bij een punt dat gespiegeld wordt in de lijn $y=x$ verwisselen de x en y-coördinaten van plaats. De coördinaten van P zijn ($\cos t$, $\sin t$). De verwisseling van de coördinaten voor Q geeft $(\sin t, \cos t)$.

e De omtrek van de cirkel met straal r is $2\pi r$. De omtrek van de eenheidscirkel is dus 2π. Een kwartcirkel heeft booglengte $\frac{1}{4}\cdot 2\pi=\frac{1}{2}\pi$. De booglengte van Q tot de y-as is even groot als de booglengte van P tot de x-as, dus t. De booglengte van Q tot de x-as is dus $\frac{1}{2}\pi-t$.

f Bij de eenheidscirkel is de booglengte tot de x-as voor een punt gelijk aan de hoek die het punt maakt met de x-as. Ga dit na.
Uit opgave d volgt dus dat de x-coördinaat van Q gelijk is aan $\cos(\frac{1}{2}\pi-t)$ en de y-coördinaat aan $\sin(\frac{1}{2}\pi-t)$.
Uit opgave e volgt: y-coördinaat van Q = x-coördinaat van P, ofwel $\sin(\frac{1}{2}\pi-t)=\cos t$.

g $h_{-5}(t)=\sin(-2\frac{1}{2}\pi-t)=-\cos t$
$h_{-3}(t)=\sin(-1\frac{1}{2}\pi-t)=\cos t$
$h_{-1}(t)=\sin(-\frac{1}{2}\pi-t)=-\cos t$
$h_5(t)=\sin(2\frac{1}{2}\pi-t)=\cos t$

I-4a De krommen K, L, M en N staan van boven naar beneden in de lijst. De grafieken vallen alle met elkaar samen.

b Herleiden tot de eenvoudigste vorm van de parametervoorstellingen geeft

$$K:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin(\pi - t) = \sin t \end{cases}$$

$$L:\begin{cases} x = 2\cos(\pi + t) = -2\cos t \\ y = -\sin(-t) = \sin t \end{cases}$$

$$M:\begin{cases} x = 2\cos(-t) = 2\cos t \\ y = \sin t = \sin t \end{cases}$$

Gebruik bij het herleiden van de x-coördinaat van N het resultaat van opdracht 4c:

$x = 2\sin(-t - \frac{1}{2}\pi) = 2\sin(-(\frac{1}{2}\pi + t)) = -2\sin(\frac{1}{2}\pi + t) = -2 \cdot \sin(1\frac{1}{2}\pi - (\pi - t)) =$
$-2 \cdot -\cos(\pi - t) = -2\cos t$.

En voor de y-coördinaat van N volgt met het resultaat van opdracht 4c:
$y = \cos(-t - \frac{1}{2}\pi) = \cos(-(t + \frac{1}{2}\pi)) = \cos(t + \frac{1}{2}\pi) = \cos(1\frac{1}{2}\pi - (\pi - t)) = -\sin(\pi - t) = -\sin t$.

Hieruit volgt

$$N:\begin{cases} x = 2\sin(-t - \frac{1}{2}\pi) = -2\cos t \\ y = \cos(-t - \frac{1}{2}\pi) = -\sin t \end{cases}$$

Vergelijken van de x en y-waarden laat zien dat alleen de parametervoorstellingen K en M identiek zijn.

c Bij de ene parametervoorstelling wordt de kromme bijvoorbeeld linksom doorlopen en bij de andere rechtsom. Of het beginpunt varieert. Ook is tijdens het doorlopen een verdichting (vertraging) of verdunning (versnelling) mogelijk. De uiteindelijke krommen zien er identiek uit maar de parametervoorstellingen zijn verschillend.

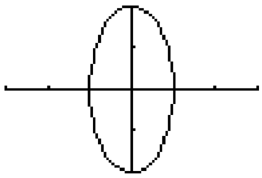
I-5a De kromme snijdt de y-as voor $x = 0$, dus los op: $\cos 3t = 0$.
Dat geeft $3t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ met k geheel, dus $t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$ met k geheel.

b Alle a waarvoor geldt $\cos(3t + a) = \cos 3t$ en alle b waarvoor geldt $\sin(t + b) = \sin t$ voldoen. Als a en b even veelvouden van π zijn is daar volgens $\cos t = \cos(t + 2\pi)$ en $\sin t = \sin(t + 2\pi)$ aan voldaan.
De figuur is lijnsymmetrisch in de x-as en y-as, en puntsymmetrisch in de oorsprong.
Voor een punt $P(x, y)$ dat de kromme doorloopt bestaan gespiegelde punten die eveneens de kromme doorlopen: $Q(-x, y)$, $R(x, -y)$ en $S(-x, -y)$. Dus ook a en b waarvoor geldt $\cos(3t + a) = -\cos 3t$ en $\sin(\pi + b) = -\sin t$ voldoen.
Als a en b oneven veelvouden van π zijn is daar volgens $\cos(\pi + t) = -\cos t$ en $\sin(\pi + t) = -\sin t$ aan voldaan.
De oplossingen samen betekent dat a en b positieve veelvouden van π kunnen zijn.
Ga na dat ook geldt $\cos t = \cos(t - 2\pi)$ en $\sin t = \sin(t - 2\pi)$, evenals $\cos(t - \pi) = -\cos t$ en $\sin(t - \pi) = -\sin t$, waaruit volgt dat ook negatieve veelvouden van π oplossingen zijn.
De volledige oplossing is dus $a = k \cdot \pi$ met k geheel en $b = n \cdot \pi$ met n geheel.

Test jezelf

bladzijde 152

T-1a

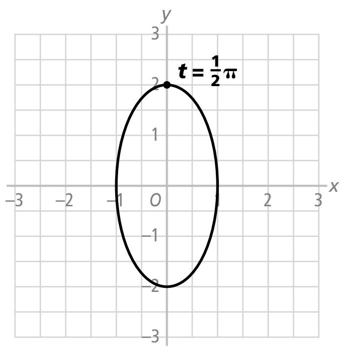


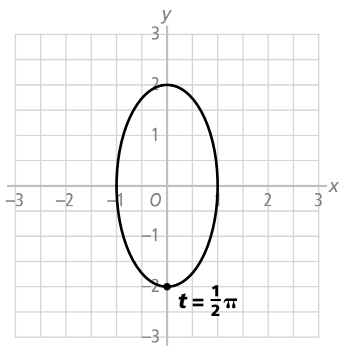
Plot Mode = Par
Invoer: X1T = sin(π/2−T)
Y1T = 2sin(T−π)
X2T = −cos(T)
Y2T = 2sin(T)
Venster: Xmin = −3; Xmax = 3
Ymin = −2; Ymax = 2

De x-waarden liggen op het interval $[-1, 1]$; de y-waarden op het interval $[-2, 2]$.

b $\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$ en $2\sin(t-\pi) = 2\sin(-(\pi - t)) = -2\sin(\pi - t) = -2\sin t$.
Voor elke t zijn de x en y-waarden van de krommen dus tegengesteld aan elkaar.
Omdat de krommen puntsymmetrisch zijn in de oorsprong hoort bij beide parametervoorstellingen dezelfde kromme.

c

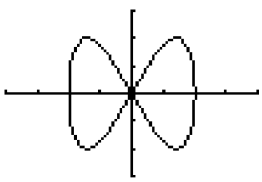




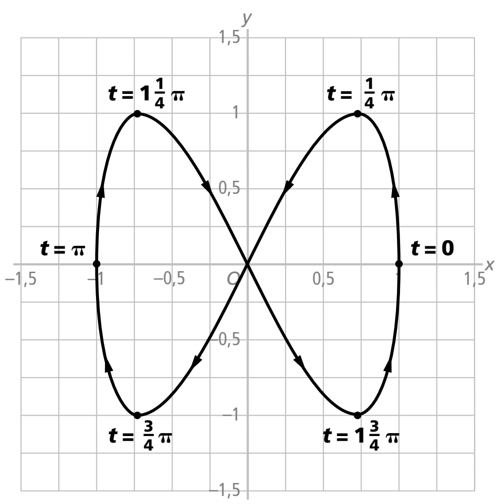
De punten zijn elkaars spiegelbeeld in de oorsprong.

d De krommen zijn puntsymmetrisch in de oorsprong dus de coördinaten zijn steeds elkaars tegengestelde.

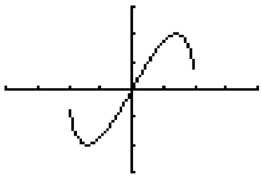
T-2a



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = cos(T)
Y1T = sin(2T)
Venster: Xmin = −2; Xmax = 2
Ymin = −1.5; Ymax =



b

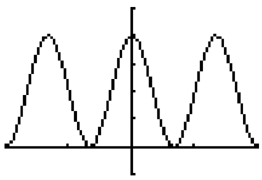


Plot
Invoer: Y1 = 2X√(1–X2)
Venster: Xmin = –2; Xmax = 2
Ymin = –1.5; Ymax = 1.5

c Wanneer $0 \le t \le \pi$ dan geldt $\sin t \ge 0 \rightarrow \sin t = \sqrt{\sin^2 t} = \sqrt{1-\cos^2 t}$. Dus
$y = \sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2\cos t \cdot \sin t = 2\cos t\sqrt{\sin^2 t} = \ 2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}$

d Voor $\pi \le t \le 2\pi$ valt de kromme samen met de spiegeling van *f* in de *x*-as. Dat is de functie $g(x) = -2x\sqrt{1-x^2}$.

T-3a



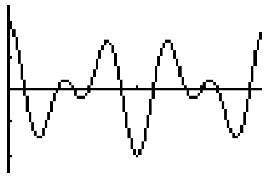
Plot
Invoer: Y1 = (sin(X)+sin(4X))2+
(cos(X)+cos(4X))2
Venster: Xmin = –π; Xmax = π
Ymin = –1; Ymax = 5

De periode lees je af als $\frac{2}{3}\pi$.

b Voor $f(x) = d + a\cos bx$ ga je uit van de cosinusfunctie. Schuif de cosinus 2 omhoog, dus $d = 2$. Maak de amplitude 2, dus $a = 2$. Voor periode $\frac{2}{3}\pi$ wordt $b = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$. De cosinus is niet in horizontale richting verschoven. De functie is dus $f(x) = 2 + 2\cos 3x$.

c $f(x) = (\sin x + \sin 4x)^2 + (\cos x + \cos 4x)^2 =$
$(\sin^2 x + 2\sin x \cdot \sin 4x + \sin^2 4x) + (\cos^2 x + 2\cos x \cdot \cos 4x + \cos^2 4x) =$
$2(\sin x \cdot \sin 4x + \cos x \cdot \cos 4x) + (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 4x + \cos^2 4x) =$
$2\cos(x - 4x) + 1 + 1 = 2 + 2\cos(-3x) = 2 + 2\cos 3x$.
Het voorschrift is exact gelijk aan dat van functie f .

T-4a



Plot
Invoer: Y1 = cos(3X)+cos(5X)
Venster: Xmin = 0; Xmax = 2π
Ymin = –2.5; Ymax = 2.5

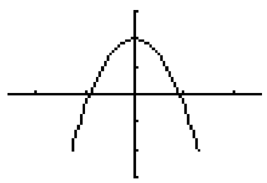
De grafiek van h heeft 10 snijpunten met de x-as op $[0, 2\pi]$.

b Uit de formule van Simpson $\cos t + \cos u = 2\cos\frac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\frac{1}{2}(t-u)$ volgt
$h(x) = \cos 3x + \cos 5x = 2\cos\frac{1}{2}(3x+5x)\cdot\cos\frac{1}{2}(3x-5x) = 2\cos 4x\cdot\cos(-x) = 2\cos 4x\cdot\cos x$

c Voor de snijpunten met de x-as geldt $2\cos 4x\cdot\cos x = 0$. Oplossen geeft
$\cos 4x = 0$ of $\cos x = 0 \quad\Rightarrow\quad 4x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi \Rightarrow$
$x = \frac{1}{8}\pi + k\cdot\frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ (k geheel).
De snijpunten van de x-as hebben dus de volgende x-coördinaten in het interval $[0, 2\pi]$:
$x = \frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ 1\frac{1}{8}\pi,\ 1\frac{3}{8}\pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 1\frac{5}{8}\pi$ en $1\frac{7}{8}\pi$.
De y-coördinaten van de snijpunten zijn gelijk aan 0.

bladzijde 153

T-5a



Plot Mode = Par
Invoer: X1T = 2sin(T)
Y1T = 2cos(2T)
Venster: Xmin = –4; Xmax = 4
Ymin = –3; Ymax = 3

De gemeenschappelijke periode van de functies is 2 π dus elk interval met een breedte van 2 π voldoet, bijvoorbeeld $[0, 2\pi]$.

b De keerpunten liggen op de uiterste waarde voor x, en de minimale waarde voor y, dus de exacte coördinaten zijn (–2, –2) en (2, –2).

c Schrijf $y = 2\cos 2t$ in een vorm waarin alleen $\sin t$ voorkomt vanwege $x = 2\sin t$:
$y = 2\cos 2t = 2(1 - 2\sin^2 t)$. Substitutie van $\sin t = \frac{1}{2}x$ geeft
$y = 2(1 - 2\cdot(\frac{1}{2}x)^2) = 2(1 - 2\cdot\frac{1}{4}x^2) = 2 - x^2$, dus $f(x) = 2 - x^2$ is het functievoorschrift.

d Het domein van f zijn de x-waarden die tussen de keerpunten liggen, dus het interval [–2, 2].

T-6a De baansnelheid is $v(t)=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$.

Uit $x=\cos 15t+\cos 2t$ volgt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-15\sin t-2\sin 2t$, en voor $t=0$ is $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0-0=0$.

Uit $y=\sin 15t+\sin 2t$ volgt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=15\cos t+2\cos 2t$, en voor $t=0$ is $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=15+2=17$.

De exacte snelheid op $t=0$ is $v(0)=\sqrt{0^2+17^2}=17$.

b De formule van Simpson $\cos t+\cos u=2\cos\frac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\frac{1}{2}(t-u)$ geeft voor de x-coördinaat:
$x=\cos 15t+\cos 2t=2\cos\frac{1}{2}(15t+2t)\cdot\cos\frac{1}{2}(15t-2t)=2\cos(6\frac{1}{2}t)\cdot\cos(8\frac{1}{2}t)$
De formule van Simpson $\sin t+\sin u=2\sin\frac{1}{2}(t+u)\cdot\cos\frac{1}{2}(t-u)$ geeft voor de y-coördinaat:
$y=\sin 15t+\sin 2t=2\sin\frac{1}{2}(15t+2t)\cdot\cos\frac{1}{2}(15t-2t)=2\sin 8\frac{1}{2}t\cdot\cos(-6\frac{1}{2}t)=2\cos(6\frac{1}{2}t)\cdot\sin(8\frac{1}{2}t)$

c In het punt $(0,0)$ zijn zowel de x als de y-coördinaat nul, ofwel – volgens de herleide vergelijkingen bij opdracht b – indien $\cos(6\frac{1}{2}t)=0.$ Oplossen geeft
$6\frac{1}{2}t=\frac{13}{2}t=\frac{1}{2}\pi+k\pi \;\rightarrow\; t=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{13}k\pi=\frac{1}{13}\pi+\frac{2}{13}k\pi$ (k geheel).
Op het interval $[0,2\pi]$ voldoen de waarden $\frac{1}{13}\pi,\frac{3}{13}\pi,\frac{5}{13}\pi,\ldots,\frac{23}{13}\pi,\frac{25}{13}\pi$.
Dat zijn $\frac{1}{2}(1+25)=13$ oplossingen. Het punt $(0,0)$ wordt dus 13 keer gepasseerd.

T-7a De horizontale snelheid is $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3\cos t-3\cos 3t$. De verticale snelheid is
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-3\sin t+3\sin 3t$.

b Voor $t=0$ is $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3-3=0$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0+0=0$. De baansnelheid is

$v(0)=\sqrt{0^2+0^2}=0$.

Voor $t=\pi$ is $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-3+3=0$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0+0=0$. De baansnelheid is

$v(\pi)=\sqrt{0^2+0^2}=0$.

c De formule van Simpson $\cos t-\cos u=-2\sin\frac{1}{2}(t+u)\cdot\sin\frac{1}{2}(t-u)$ geeft voor de x-coördinaat:
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3(\cos t-\cos 3t)=3\cdot -2\sin\frac{1}{2}(t+3t)\cdot\sin\frac{1}{2}(t-3t)=-6\sin 2t\cdot\sin(-t)=6\sin 2t\cdot\sin t$
De formule van Simpson $\sin t-\sin u=2\sin\frac{1}{2}(t-u)\cdot\cos\frac{1}{2}(t+u)$ geeft voor de y-coördinaat:

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-3\sin t+3\sin 3t=-3(\sin t-\sin 3t)=-3\cdot 2\sin\frac{1}{2}(t-3t)\cdot\cos\frac{1}{2}(t+3t)=-6\sin(-t)\cdot\cos 2t=$
$6\sin t\cdot\cos 2t$

d $v(t)=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{(6\sin 2t\cdot\sin t)^2+(6\sin t\cdot\cos 2t)^2}=$

$\sqrt{36\sin^2 2t\cdot\sin^2 t+36\sin^2 t\cdot\cos^2 2t}=\sqrt{36\sin^2 t(\sin^2 2t+\cos^2 2t)}=$

$\sqrt{36\sin^2 t\cdot 1}=\sqrt{36}\sqrt{\sin^2 t}=6|\sin t|$

e De baansnelheid is maximaal als $\left|\sin t\right| = 1$. Op het interval is dat voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$.

De coördinaten voor $t = \frac{1}{2}\pi$ zijn $\begin{cases} x = 3\sin\frac{1}{2} - \sin 1\frac{1}{2} = 3 + 1 = 4 \\ y = 3\cos\frac{1}{2} - \cos 4\frac{1}{2} = 0 \end{cases}$, dus (4, 0).

Voor $t = 1\frac{1}{2}\pi$ zijn de coördinaten (–4, 0).

f Een horizontale raaklijn is er als $\frac{dy}{dt} = 0$ maar $\frac{dx}{dt} \neq 0$.
In $\frac{dy}{dt} = 6\sin t \cdot \cos 2t$ komt $\sin t$ ook voor in $\frac{dx}{dt} = 6\sin 2t \cdot \sin t$, dus voor $\frac{dy}{dt} = 0$ zijn oplossingen voor $\sin t = 0$ niet geldig. Ongeldige oplossingen op het interval $[0, 2\pi]$ zijn dus $t = 0, \pi \text{ en } 2\pi$.

Voor $\frac{dy}{dt} = 0$ blijft daarom alleen $\cos 2t = 0$ over. Op het interval $[0, 2\pi]$ is dat voor $t = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, 1\frac{1}{4}\pi \text{ en } 1\frac{3}{4}\pi$.

Een verticale raaklijn is er als $\frac{dx}{dt} = 0$ maar $\frac{dy}{dt} \neq 0$.

In $\frac{dx}{dt} = 6\sin 2t \cdot \sin t$ komt $\sin t$ ook voor in $\frac{dy}{dt} = 6\sin t \cdot \cos 2t$, dus voor $\frac{dx}{dt} = 0$ zijn oplossingen voor $\sin t = 0$ niet geldig.

Voor $\frac{dx}{dt} = 0$ blijft daarom alleen $\sin 2t = 0$ over. Oplossingen hiervan op het interval $[0, 2\pi]$ die niet tot de ongeldige oplossingen behoren zijn $t = \frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$.