Hoofdstuk 6 - Toegepaste analyse

Voorkennis: Afgeleiden en primitieven

bladzijde 156

V-1a $f(x)=x^3\cdot\sin x \Rightarrow f'(t)=3x^2\sin x+x^3\cos x$

b $k(x)=\sqrt{x}\cdot\cos x=x^{\frac{1}{2}}\cdot\cos x \Rightarrow f'(t)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos x+\sqrt{x}\cdot-\sin x=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sqrt{x}\sin x.$

c $l(x)=e^x+2^x \Rightarrow l'(x)=e^x+2^x\ln 2$.

d $m(x)=\dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow m'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x.1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

V-2a $f(x)=\frac{1}{2}x+2\sin x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}+2\cos x$

b $k(x)=\sqrt{x^2-3}=(x^2-3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k'(x)=\frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

c $l(x)=\ln x\cdot\sqrt{x} \Rightarrow l'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}+\ln x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$

d $m(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x} \Rightarrow m'(x)=\dfrac{2e^x(1+e^x)-2e^x(e^x)}{(1+e^x)^2}=\dfrac{2e^x+2e^{2x}-2e^{2x}}{(1+e^x)^2}=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

V-3a $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x \Rightarrow f'(x)=4x^3-\frac{1}{2}$

b $f'(x)=4x^3-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 4x^3=\frac{1}{2} \Rightarrow x^3=\frac{1}{8}=8^{-1} \Rightarrow x=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$
De extreme waarde is $f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}-\frac{4}{16}=-\frac{3}{16}$, een minimum.

c De helling voor $x=3$ is $f'(3)=4\cdot 3^3-\frac{1}{2}=107\frac{1}{2}$.

d a) $g(x)=\dfrac{2x+2}{x-2} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{2\cdot(x-2)-(2x+2)\cdot(1)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x-4-2x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{-6}{(x-2)^2}$

b) $g'(x)=\dfrac{-6}{(x-2)^2}=0$ heeft geen oplossing. Er is geen extreme waarde.

c) De helling voor $x=3$ is $g'(3)=\dfrac{-6}{(3-2)^2}=\dfrac{-6}{1^2}=-6$.

V-4a $f(x)=x^5-x^4 \Rightarrow f'(x)=5x^4-4x^3$

b $f'(x)=5x^4-4x^3=4x^3(1\frac{1}{4}x-1)=0 \Rightarrow 4x^3=0$ of $1\frac{1}{4}x-1=0 \Rightarrow x=0$ of $x=1\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}=0,8$

c $f(0)=0^5-0^4=0$, dus (0, 0) is een top.
$f(0,8)=0,8^5-0,8^4=-0,08192$, dus (0,8; –0,08192) is een top.

bladzijde 157

V-5a $f(x)=x^2+\sqrt{2x}=x^2+\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}+c=\frac{1}{3}x^3+\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}}+c=$
$\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{2x}+c$

b $g(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{x}=x+4+\dfrac{2}{x} \Rightarrow G(x)=\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+c$

c $h(x)=\sin 3x-\cos 2x \Rightarrow H(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{2}\sin 2x+c$

d $k(x)=e^{2x-2} \quad \Rightarrow \quad K(x)=\frac{1}{2}e^{2x-2}+c$

e $l(x)=3^x+3^{-x}+x^3+3x \quad \Rightarrow \quad L(x)=\dfrac{1}{\ln 3}3^x-\dfrac{1}{\ln 3}3^{-x}+\frac{1}{3}x^4+1\frac{1}{2}x^2+c$

f $m(x)=\dfrac{1}{2x-4} \quad \Rightarrow \quad M(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-4|+c$

; met $\ln ab=\ln a+\ln b$ is dit nog te vereenvoudigen tot

$\frac{1}{2}\ln(2\cdot|x-2|)+c=\frac{1}{2}(\ln 2+\ln|x-2|)+c=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln|x-2|+c=\frac{1}{2}\ln|x-2|+c_1$.

V-6a $\int_1^4 \dfrac{2}{x}\,dx=\left[2\ln|x|\right]_1^4=2\ln 4-2\ln 1=2\ln 4-0=2\ln 4$

b $\int_0^{\pi} 2\sin(2-x)\,dx=\left[2\cos(2-x)\right]_0^{\pi}=2\cos(2-\pi)-2\cos 2$

met $\cos(-t)=\cos t$ en $\cos(\pi-t)=-\cos t$ volgt

$2\cos(\pi-2)-2\cos 2=-2\cos 2-2\cos 2=-4\cos 2$

c $\int_2^5 ((\frac{1}{2})^x-\frac{1}{2}x)\,dx=\left[\dfrac{1}{\ln\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^x-\frac{1}{4}x^2\right]_2^5=(\dfrac{(\frac{1}{2})^5}{\ln\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot 25)-(\dfrac{(\frac{1}{2})^2}{\ln\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot 4))=\dfrac{\frac{1}{32}-\frac{1}{4}}{\ln\frac{1}{2}}-5\frac{1}{4}=$

$\dfrac{-\frac{7}{32}}{\ln 2^{-1}}-5\frac{1}{4}=\dfrac{-\frac{7}{32}}{-\ln 2}-5\frac{1}{4}=\dfrac{7}{32\ln 2}-5\frac{1}{4}$

V-7a $f(x)=x^3-8x^2+12x=x(x^2-8x+12)=x(x-2)(x-6)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ of $x=2$ of $x=6$

b Bij integreren wordt een oppervlakte boven de x-as positief gerekend en onder de x-as negatief. Bij de integraal van 0 tot 6 valt de oppervlakte boven de x-as dus weg tegen een deel van de oppervlakte onder de x-as en uit de integraal komt niet de totale oppervlakte.

c De oppervlakte boven de x-as is

$\int_0^2 (x^3-8x^2+12x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_0^2=(6\frac{2}{3})-(0)=6\frac{2}{3}$.

De oppervlakte onder de x-as is:

$-\int_2^6 (x^3-8x^2+12x)\,dx=-\left[\frac{1}{4}x^4-2\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_2^6=-(-36)+(6\frac{2}{3})=42\frac{2}{3}$

De totale oppervlakte is dus $6\frac{2}{3}+42\frac{2}{3}=49\frac{1}{3}$.

V-8a $f(x)=x^3-3x^2+2x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3x^2-6x+2$. De helling in $(0,0)$ voor $x=0$ is $f'(0)=2$.

b $f'(x)=3x^2-6x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}=\dfrac{6\pm\sqrt{12}}{6}=1\pm\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Rightarrow$

$x=1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ of $x=1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$. De extreme waarde bij $x=1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ is exact

$f(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})=(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})^3-3(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})^2+2(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})=$

gebruik de vorm $(1-a)^3=1-3a+3a^2-a^3$:

$(1-3\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}+3\cdot(\frac{1}{3}\sqrt{3})^2-(\frac{1}{3}\sqrt{3})^3)-3(1-2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}+(\frac{1}{3}\sqrt{3})^2)+2(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})=$

$1-\sqrt{3}+3\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-3\cdot\frac{1}{3}+2-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\ 0+(-1-\frac{1}{9}+2-\frac{2}{3})\sqrt{3}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

De extreme waarde bij $x=1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ is exact $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

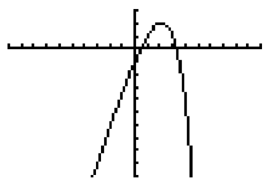
c De helling voor $x = 3$ is $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 2 = 27 - 18 + 2 = 11$.
De y-waarde bij $x = 3$ is $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 6$.
Lijn l heeft vergelijking $y = 11x + b$. Invullen van (3, 6) geeft
$6 = 11 \cdot 3 + b \rightarrow b = -27$.
De vergelijking van l is $y = 11x - 27$.

d De oppervlakte van vlakdeel W bestaat uit de oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as waar de oppervlakte tussen l en de x-as van afgetrokken wordt.
Het integratie-interval begint bij een nulpunt van f en eindigt bij het raakpunt.
Oplossen van $f(x) = 0$ geeft voor de nulpunten
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow$
$x = 0$ of $x = 1$ of $x = 2$. De oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as ligt geheel boven de x-as en is dus
$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_2^3 = (2\tfrac{1}{4}) - (0) = 2\tfrac{1}{4}.$$
De oppervlakte tussen l en de x-as is een driehoek. De lijn snijdt de x-as in $x = \frac{27}{11} = 2\frac{5}{11}$. De driehoek heeft breedte $3 - 2\frac{5}{11} = \frac{6}{11}$ en hoogte 6, dus de oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} \cdot 6 = 1\frac{7}{11}$.
De oppervlakte van vlakdeel W is dan $2\frac{1}{4} - 1\frac{7}{11} = \frac{27}{44}$.

6.1 Uiterste waarden en buigpunten

bladzijde 158

1a



Plot
Invoer: Y1 = 3X–2^X
Venster: Xmin = –10 ; Xmax = 10
Ymin = –10 ; Ymax = 3

Met voor de TI: CALC > MAX, of de Casio: G-Solv > MAX geeft de rekenmachine $x \approx 2{,}11$ voor de top.

b $f'(x) = 3 - 2^x \ln 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2^x \ln 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 2^x = \dfrac{3}{\ln 2} \quad \Rightarrow \quad x = {}^2\log \dfrac{3}{\ln 2} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{\ln 2}\right)}{\ln 2} \approx 2{,}11.$

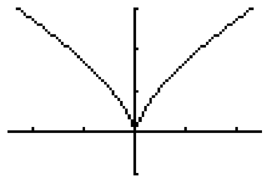
Klopt met opdracht a.

c $f'(x)$ heeft maar één oplossing, dus er is hoogstens één punt met een horizontale raaklijn. Er is in principe sprake van *hoogstens* één omdat f ook nog moet bestaan in het punt.

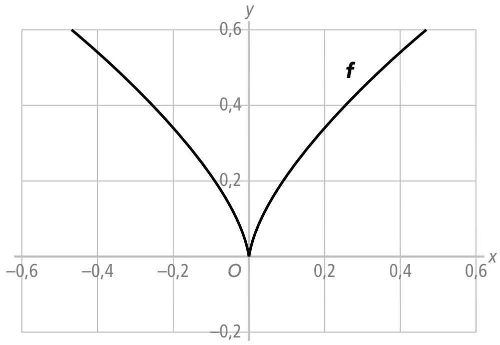
2a $f(x)=x^3\cdot e^x \;\Rightarrow\; f'(x)=3x^2\cdot e^x+x^3\cdot e^x=(3+x)x^2e^x=0 \;\Rightarrow\; 3+x=0$ of $x^2e^x=0 \;\Rightarrow$ $x=-3$ of $x=0$.

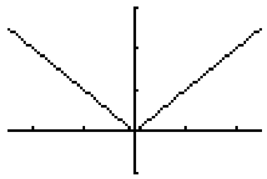
b $f(-3)=-27\cdot e^{-3}\approx -1,344$ en $f(0)=0$. De coördinaten zijn dus (–3; –1,344) en (0, 0).
De grafiek van *f* laat zien dat (–3; –1,344) een uiterste waarde is en een minimum.
Bij (0, 0) is geen uiterste waarde, geen minimum en geen maximum.

3a Zoom ver genoeg in op de oorsprong om de details te zien.

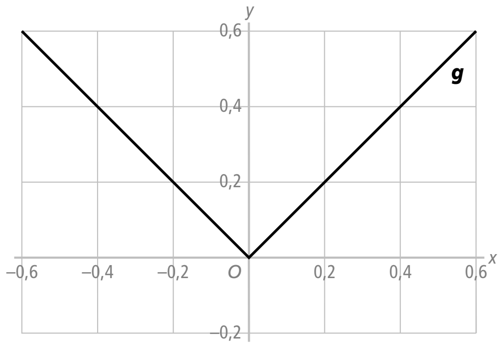


Plot
Invoer: Y1 = X^(2/3)
Venster: Xmin = –0.5 ; Xmax = 0.5
Xscl = 0.2
Ymin = –0.2 ; Ymax = 0.6
Yscl = 0.2





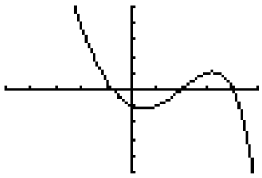
Plot
Invoer: Y1 = abs(X)
Venster: Xmin = –0.5 ; Xmax = 0.5
Xscl = 0.2
Ymin = –0.2 ; Ymax = 0.6
Xscl = 0.2



b In het punt voor $x=0$ verlopen de grafieken niet vloeiend dus er bestaan geen raaklijnen in dat punt. De hellingen van de raaklijnen zijn $f'(0)$ en $g'(0)$ en bestaan dus niet.

c De extreme waarde is hier geen top die je vindt door de afgeleide nul te stellen, maar te kijken naar de laagste en hoogste functiewaarde. In de grafieken zie je dat beide functies een extreme waarde 0 hebben voor $x=0$, een minimum.

4a

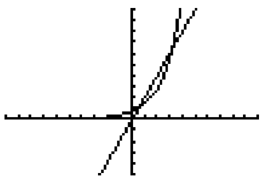


Plot
Invoer: Y1 = X2–2^X
Venster: Xmin = –5 ; Xmax = 5
Ymin = –5 ; Ymax = 5

In twee punten: in het minimum gaat de grafiek van dalend naar stijgend; in het maximum van stijgend naar dalend.

b $f(x) = x^2 - 2^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - \ln 2 \cdot 2^x$

c

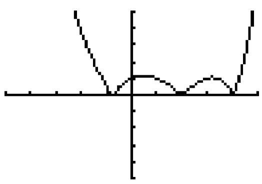


Plot
Invoer: Y1 = ln(2)*2^X
Y2 = 2X
Venster: Xmin = –10 ; Xmax = 10
Ymin = –5 ; Ymax = 10

Voor elk snijpunten geldt er zijn twee *x*-waarden waarvoor geldt:
$2x = \ln 2 \cdot 2^x \Rightarrow \; 2x - \ln 2 \cdot 2^x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$ Er zijn twee toppen.

d Met de rekenmachine vind je de snijpunten voor $x \approx 0{,}485$ en $x \approx 3{,}212$.
$f(0{,}485) = 0{,}485^2 - 2^{0{,}485} \approx -1{,}164$ en $f(3{,}212) = 3{,}212^2 - 2^{3{,}212} \approx 1{,}051$.
De coördinaten van de toppen zijn dus (0,485; –1,164) en (3,212; 1,051).

e



Plot
Invoer: Y1 = abs(X2–2^X)
Venster: Xmin = –5 ; Xmax = 5
Ymin = –5 ; Ymax = 5

De toppen bij opdracht d worden nu de toppen (0,485; 1,164) en (3,212; 1,051). De absolute waarde geeft op de *x*-as nog de toppen (–0,767; 0), (2, 0) en (4, 0).

bladzijde 159

5a $f(x)=(2x^2+3x)\cdot \text{e}^{-x}$
$f'(x)=(4x+3)\cdot \text{e}^{-x}+(2x^2+3x)\cdot -\text{e}^{-x}=(-2x^2-3x+4x+3)\cdot \text{e}^{-x}=(-2x^2+x+3)\cdot \text{e}^{-x}$

b Voor $x\Rightarrow\infty$ gaat de grafiek steeds vlakker lopen dus de helling van de raaklijn gaat naar 0.
Voor $x\Rightarrow-\infty$ gaat de grafiek steeds steiler lopen maar blijft dalend, dus de helling van de raaklijn gaat naar $-\infty$.

c $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; (-2x^2+x+3)\cdot\text{e}^{-x}=0 \;\Rightarrow\; (-2x^2+x+3)=0 \;\Rightarrow\; 2x^2-x-3=0 \;\Rightarrow$
$x^2-\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}=0 \;\Rightarrow\; (x+1)(x-1\frac{1}{2})=0 \;\Rightarrow\; x=-1$ of $x=1\frac{1}{2}$.
De functie heeft een minimum voor $x=-1$ groot
$f(-1)=(2\cdot(-1)^2+3\cdot-1)\cdot\text{e}^1=(2-3)\cdot\text{e}=-\text{e}$, en een maximum voor $x=1\frac{1}{2}$ groot
$f(1\frac{1}{2})=(2\cdot(1\frac{1}{2})^2+3\cdot1\frac{1}{2})\cdot\text{e}^{-1\frac{1}{2}}=(4{,}5+4{,}5)\cdot\text{e}^{-1\frac{1}{2}}=9\cdot\text{e}^{-1\frac{1}{2}}$.

d $f'(x)=(-2x^2+x+3)\cdot\text{e}^{-x} \;\Rightarrow\; f''(x)=(-4x+1)\cdot\text{e}^{-x}+(-2x^2+x+3)\cdot-\text{e}^{-x}=$
$(-4x+1+2x^2-x-3)\cdot\text{e}^{-x}=(2x^2-5x-2)\cdot\text{e}^{-x}$.

$x=1\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{41}$ of $x=1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41}$.

$f''(x)=(2x^2-5x-2)\cdot\text{e}^{-x}=0 \;\Rightarrow\; 2x^2-5x-2=0 \;\Rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot-2}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{4}$

e $f''(x)=0$ geeft het maximum of minimum van $f'(x)$, dus de punten waar de helling van de functie f maximaal of minimaal is.

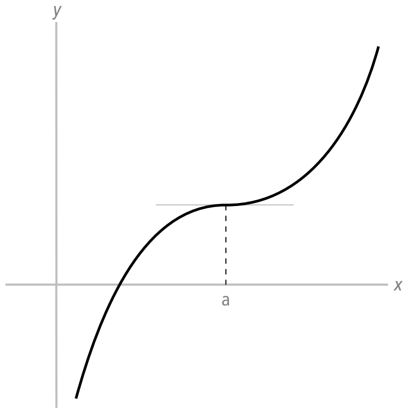
f Bij de minimale of maximale helling van de grafiek van *f* heeft de grafiek een buigpunt. Bij de overgang van 'hol' in 'bol' heeft de grafiek zijn maximale helling.
Dat is voor $x=1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41}$. De maximale helling is dus $f'(1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{41})\approx3{,}413$.

6a Het domein van x^2 is $\mathbb{R}$ en van $\ln x$ is $\langle 0,\rightarrow\rangle$, dus het domein van *f* is $\langle 0,\rightarrow\rangle$.
Het domein van *g* is $[0,\rightarrow\rangle$.
$f'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$. Het domein van f' is $\langle 0,\rightarrow\rangle$.
$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Het domein is $\langle 0,\rightarrow\rangle$.

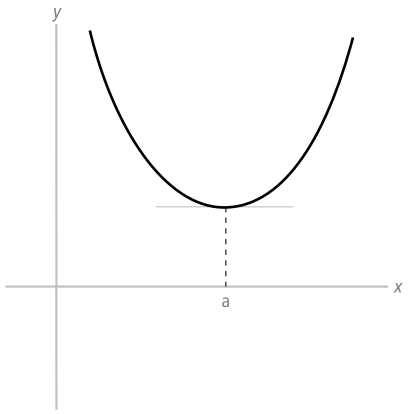
b $f'=2x\ln x+x \;\Rightarrow\; f''(x)=(2\ln x+2x\cdot\dfrac{1}{x})+1=2\ln x+2+1=2\ln x+3$
$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 2\ln x+3=0 \;\Rightarrow\; \ln x=-1\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\text{e}^{-1{,}5}$.
$f(\text{e}^{-1{,}5})=(\text{e}^{-1{,}5})^2\cdot\ln(\text{e}^{-1{,}5})=\text{e}^{-3}\cdot-1{,}5=-1{,}5\text{e}^{-3}$
De exacte coördinaten van het buigpunt zijn $(\text{e}^{-1{,}5};-1{,}5\text{e}^{-3})$.

c Een sterke vergroting van de plot van *f* rond de oorsprong laat zien dat de grafiek van *f* daar horizontaal loopt. De grafiek van *g* begint in de oorsprong juist verticaal. De helling van een verticale raaklijn bestaat niet dus de afgeleide van *g* in $x=0$ bestaat ook niet. Het steile begin van de grafiek van *g* wordt wel duidelijk als je een zeer kleine waarde voor *x* neemt. De waarde van $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ is dan zeer groot dus de raaklijn staat bijna verticaal.
De afgeleide van *f* voor een zeer kleine waarde van *x* is ongeveer 0. De helling van de raaklijn in de buurt van $x=0$ is dus ongeveer 0 wat een bijna horizontaal begin betekent van de grafiek van *f*.

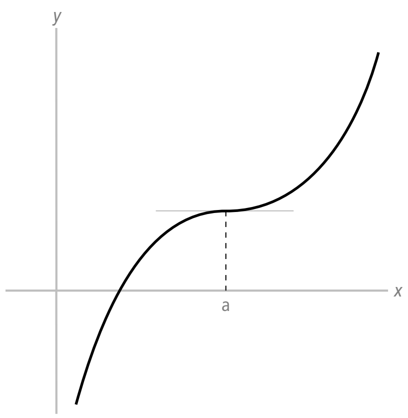
7a $f'(a)=0$ terwijl $f(a)$ geen extreme waarde is:



b Als $f''(a)>0$ dan neemt de helling toe in *a* en $f'(a)=0$ hoort bij een top als minimum:



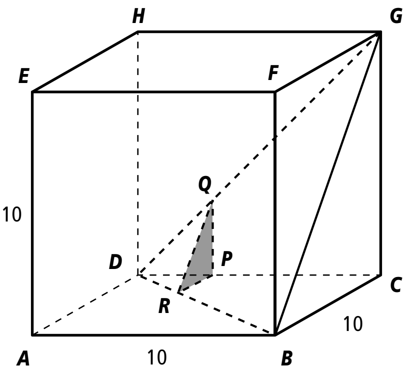
c Er is een buigpunt als $f''(a)=0$ en $f'(a)=0$ betekent de raaklijn heeft helling 0, er is dus sprake van een horizontale buigraaklijn.



6.2 Integraal en inhoud

bladzijde 160

8abc



d Maak gebruik van de gelijkvormigheid van driehoeken:

$\triangle DCG \sim \triangle DPQ$ dus $\dfrac{CG}{DC} = \dfrac{PQ}{DP} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{10}{10} = \dfrac{PQ}{3} \quad \Rightarrow \quad PQ = 3$.

Uit $\triangle DCB \sim \triangle DPR$ volgt $\dfrac{CB}{DC} = \dfrac{PR}{DP} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{10}{10} = \dfrac{PR}{3} \quad \Rightarrow \quad PR = 3$.

De oppervlakte van driehoek $PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$.

e $DP = x$ dus volgt uit de gelijkvormigheid $PQ = x$ en $PR = x$. De oppervlakte van $\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} x^2$.

9a De getekende prisma's vallen alle binnen de piramide. Het grootste prisma begint op $x = 9$, het kleinste op $x = 1$. Er zijn dus 9 prisma's met hoogte 1, zodat de benadering voor de inhoud
wordt $\sum \frac{1}{2} x^2 \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{2} k^2 \cdot 1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{1}{2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 9^2) = \frac{1}{2} \cdot 285 = 142,5$.

Omdat de prisma's alle binnen de piramide vallen zal de benadering kleiner zijn dan de exacte inhoud van de piramide.

b $\int_0^{10} \frac{1}{2} x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^{10} = \frac{1}{6} \cdot 1000 = 166\frac{2}{3}$

c Voor de inhoud van een piramide geldt $I = \frac{1}{3} \cdot$ oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte . Met $\triangle BCG$ als grondvlak met oppervlakte 10 × 10 : 2 = 50 en $CD = 10$ als hoogte geeft de formule
$I = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 10 = 166\frac{2}{3}$. De uitkomst is hetzelfde als bij de integraal.

10a Manier 1:
De breedte van het vierkant is evenredig met de afstand tot de top. Afstand $a = 15$ komt overeen met $PQ = 10$ en $a = 0$ met $PQ = 0$, dus per $PQ = \frac{10}{15}a = \frac{2}{3}a$.
De oppervlakte van het vierkant wordt dan: $\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}a^2$.
Manier 2:
Noem *N* het midden van *PQRS.* Dan volgt uit $\triangle AMT \sim \triangle PNT$ dat

$$\frac{AM}{MT} = \frac{PN}{NT} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{100}}{15} = \frac{PN}{a} \quad \Rightarrow \quad PN = a \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{3}a \ .$$

Met $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ volgt
$(2PN)^2 = PQ^2 + PQ^2 = 2PQ^2 \quad \Rightarrow \quad PQ = 2PN = 2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a$.
De oppervlakte van het vierkant wordt dan: $\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}a^2$.

b De inhoud van het blok met zijden *PQ* en *QR* en dikte Δa is $PQ^2 \cdot \Delta a = (\frac{2}{3}a)^2 \cdot \Delta a = \frac{4}{9}a^2 \cdot \Delta a$. Met een groot aantal van zulke blokken kun je de inhoud van piramide *T.ABCD* benaderen door de Riemann-som $\sum \frac{4}{9}a^2 \cdot \Delta a$. Door Δa steeds kleiner te nemen als *a* het interval [0, 15] doorloopt gaat de Riemann-som $\sum \frac{4}{9}a^2 \cdot \Delta a$ over in de integraal $\int_0^{15} \frac{4}{9}a^2 \, \mathrm{d}a$.

c $\int_0^{15} \frac{4}{9}a^2 \, \mathrm{d}a = \left[\frac{4}{27}a^3\right]_0^{15} = 500 - 0 = 500$

bladzijde 161

11a De straal *r* neemt evenredig met de hoogte *h* toe. De toename is 20 – 10 = 10 cm over een hoogte van 40 cm, ofwel 10 : 40 = $\frac{1}{4}$ cm toename van *r* per cm stijging. De beginwaarde van de straal is 10 cm voor *h* = 0, dus $r = 10 + \frac{1}{4}h$.

b De inhoud van de emmer is opgebouwd uit schijven met hoogte Δh en straal $r = 10 + \frac{1}{4}h$.
De inhoud van een cilinder is $I = \pi r^2 \times \text{hoogte} \ \rightarrow \ I = \pi(10 + \frac{1}{4}h)^2 \cdot \Delta h$.
Door Δh steeds kleiner te nemen als *h* het interval [0, 40] doorloopt gaat de Riemann-som $\sum \pi(10 + \frac{1}{4}h)^2 \cdot \Delta h$ over in de integraal $\int_0^{40} \pi(10 + \frac{1}{4}h)^2 \mathrm{d}h$. Berekening hiervan geeft

$$\int_0^{40} (10 + \tfrac{1}{4}h)^2 \mathrm{d}h = \pi\left[\tfrac{1}{3}(10 + \tfrac{1}{4}h)^3 \cdot 4\right]_0^{40} = \tfrac{4}{3}\pi((10 + \tfrac{1}{4} \cdot 40)^3 - (10 + 0)^3) = \tfrac{4}{3}\pi(8000 - 1000) =$$

$$\tfrac{28000}{3}\pi \text{ cm}^3 = \tfrac{28}{3}\pi \text{ dm}^3 = 9\tfrac{1}{3} \quad \text{dm}^3 (\approx 29{,}3 \text{ liter}) .$$

12a De stelling van Pythagoras geeft
$x^2 + r^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = R^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.
De oppervlakte is $\pi r^2 = 21\pi$.

b $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$. De oppervlakte is $\pi r^2 = \pi(25 - x^2)$.

c De inhoud van de halve bol is opgebouwd uit cilinders of schijven met hoogte Δx en straal $r = \sqrt{25 - x^2}$. De inhoud van een cilinder is

$I = \pi r^2 \times \text{hoogte} \rightarrow I = \pi(25 - x^2) \cdot \Delta x$.

Door Δx steeds kleiner te nemen als x het interval $[0, 5]$ doorloopt gaat de Riemann-som

$\sum \pi(25 - x^2) \cdot \Delta x$ over in de integraal $\int_0^5 \pi(25 - x^2)\mathrm{d}x$. De inhoud is dus

$\int_0^5 \pi(25 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left[25x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \pi((125 - \frac{1}{3} \cdot 125) - (0 - 0)) = \frac{2}{3}\pi \cdot 125 = 83\frac{1}{3}\pi$.

d Als de inhoud van een bol $\frac{4}{3}\pi R^3$ is dan is de inhoud van de halve bol $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 125 = 83\frac{1}{3}\pi$. Het antwoord klopt met opdracht c.

13a De oppervlakte van de cirkel is $\pi r^2 = \pi h$.

b De inhoud van het glas is opgebouwd uit cilinders of schijven met hoogte Δh en oppervlakte πh . De inhoud van een cilinder is $I = \pi h \cdot \Delta h$.

Door Δh steeds kleiner te nemen als h het interval $[0, 4]$ doorloopt gaat de Riemann-som

$\sum \pi h \cdot \Delta h$ over in de integraal $\int_0^4 \pi h\,\mathrm{d}h$. De inhoud is dus

$\int_0^4 \pi h\,\mathrm{d}h = \frac{1}{2}\pi\left[h^2\right]_0^4 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi \approx 25{,}1$ cm^3.

6.3 Omwentelingslichamen

bladzijde 162

14a Bij het wentelen van de grafiek om de x-as beschrijft elk punt op de grafiek een cirkel loodrecht op de x-as. De afstand van een punt op de grafiek tot de x-as is de straal van de cirkel. Voor $x = 0{,}4$ is de afstand tot het punt op de grafiek gelijk aan de y-waarde bij $x = 0{,}4$, dus $f(0{,}4)$.

b De oppervlakte van een cirkel is πr^2 . Voor elke waarde van x is volgens opdracht a de straal $f(x)$, dus de oppervlakte is $\pi \cdot (f(x))^2$. Invullen van $f(x) = 1 - x^2$ geeft $\pi \cdot (1 - x^2)^2$.

c Vul het omwentelingslichaam met cilinders of schijven die binnen het omwentelingslichaam vallen. Het lichaam is symmetrisch dus bereken de inhoud rechts van de y-as en verdubbel dat later. Voor $\Delta x = 0{,}2$ zijn er vier cilinders of schijven tussen $x = 0$ en $x = 1$: de eerste tussen $x = 0$ en $x = 0{,}2$ en de vierde tussen $x = 0{,}6$ en $x = 0{,}8$. De straal van de eerste cilinder is $f(0{,}2) = 1 - 0{,}2^2$ en van de vierde $f(0{,}8) = 1 - 0{,}8^2$. De benadering met de Riemann-som geeft op deze manier

$\sum \pi(1 - x^2)^2 \Delta x = \pi(1 - 0{,}2^2)^2 \cdot 0{,}2 + \pi(1 - 0{,}4^2)^2 \cdot 0{,}2 + \pi(1 - 0{,}6^2)^2 \cdot 0{,}2 + \pi(1 - 0{,}8^2)^2 \cdot 0{,}2 =$

$\pi(0{,}96^2 + 0{,}84^2 + 0{,}64^2 + 0{,}36^2) \cdot 0{,}2 = 0{,}43328\pi$.

De verdubbeling geeft $0{,}86656\,\pi \approx 2{,}722$.

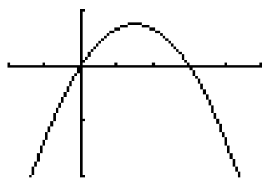
d Door Δx steeds kleiner te nemen als x het interval [–1, 1] doorloopt gaat de Riemann-som

$\sum \pi(1-x^2)^2 \Delta x$ over in de integraal $\int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x$.

e $\int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi\int_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4)\,\mathrm{d}x = \pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \pi\left[(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5})-(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5})\right]=$
$\pi\left[(\frac{8}{15}--\frac{8}{15})\right]=1\frac{1}{15}\pi \approx 3{,}351.$

bladzijde 163

15a



Plot
Invoer: Y1 = X–X²/3
Venster: Xmin = –2 ; Xmax = 5
Ymin = –2 ; Ymax = 1

Voor de nulpunten geldt $f(x)=x-\frac{1}{3}x^2=x(1-\frac{1}{3}x)=0 \;\;\rightarrow\;\; x=0$ of $x=3$.

b Het ingesloten deel van de grafiek ligt tussen de nulpunten. De inhoud is volgens

$\int_a^b \pi(f(x))^2 \,\mathrm{d}x$ dus exact

$$\int_0^3 \pi(x-\tfrac{1}{3}x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi\int_0^3 (x^2-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{9}x^4)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{6}x^4+\tfrac{1}{45}x^5\right]_0^3 = \pi\left[0{,}9-0\right]=0{,}9 \quad .$$

16a $\int_0 \pi(\sin x)^2 \mathrm{d}x = \int_0 \pi \sin^2 x\mathrm{d}x$

b Uit de verdubbelingsformule $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ volgt $\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

c $\int_0 \pi\sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0 \pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x)\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0 = \pi\left[(\frac{1}{2}\quad)-(0)\right]=\frac{1}{2}\pi^2$

17a Door $f(x)=3x$ te spiegelen in de lijn $y=x$ verwisselen x en y van plaats. De functie g is dus $x=3y \;\rightarrow\; y=\frac{1}{3}x \;\rightarrow\; g(x)=\frac{1}{3}x$.

b Bij draaiing van f om de y-as worden alle punten van f die horen bij y in [0, 12] rond de y-as gewenteld. Door de spiegeling in de lijn $y=x$ wordt het bereik van f het domein van g. Bij draaiing van g om de x-as worden dus alle punten van g die horen bij x in [0, 12] rond de x-as gewenteld, dus het integratie-interval is [0, 12].

c De exacte inhoud is $\int_0^{12} \pi(\frac{1}{3}x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{12} \pi\cdot\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{27}x^3\right]_0^{12} = 64\pi$.

18a Voor $y = \ln(x+1)$ wordt de vergelijking voor de gespiegelde grafiek
$x = \ln(y+1) \;\rightarrow\; \mathrm{e}^x = y+1 \;\rightarrow\; y = \mathrm{e}^x - 1$.

$$g(x) \leftarrow \boxed{-1} \leftarrow \boxed{\mathrm{e}^x} \leftarrow x$$

Het functievoorschrift van de inverse functie g is dus $g(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

b De grafiek van $f(x) = \ln(x+1)$ is de grafiek van $y = \ln x$ verschoven met 1 naar links. De oorsprong is dus een nulpunt. Het gebied wordt verder beperkt door $y = 2$. Bij draaiing van f om de y-as worden alle punten van f die horen bij y in $[0, 2]$ rond de y-as gewenteld. Het integratie-interval is dus $[0, 2]$.

c De inhoud is

$$\int_0^2 \pi(\mathrm{e}^x - 1)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1)\mathrm{d}x = \pi\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + x\Big]_0^2 = \pi\Big[(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^2 + 2) - (\tfrac{1}{2} - 2)\Big] =$$

$(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^4 - 2\mathrm{e}^2 + 3\tfrac{1}{2})\pi \approx 50{,}33$.

19a De grafiek van $h(x) = \sqrt{x-1}$ is de grafiek van $y = \sqrt{x}$ verschoven met 1 naar rechts. De inverse functie van h heeft als vergelijking

$x = \sqrt{y-1} \;\rightarrow\; x^2 = y - 1 \;\rightarrow\; y = x^2 + 1$.

Wenteling van het gebied ingesloten door de grafiek van de functie $h(x) = \sqrt{x-1}$, de x-as, de
y-as en de lijn $y = 2$ om de y-as is hetzelfde als wenteling van het gebied ingesloten door de grafiek van $y = x^2 + 1$, de y-as, de x-as en de lijn $x = 2$ om de x-as. De inhoud is

$$\int_0^2 \pi(x^2 + 1)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\mathrm{d}x = \pi\Big[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x\Big]_0^2 = \pi\Big[(\tfrac{1}{5}\cdot 32 + \tfrac{2}{3}\cdot 8 + 2) - 0\Big] =$$

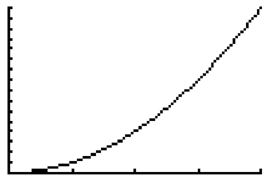
$13\tfrac{11}{15}\pi \approx 43{,}14$.

b De grafiek van $k(x) = \ln x$ spiegelen in de lijn $y = x$ geeft de grafiek van $y = \mathrm{e}^x$. Wenteling van het gebied ingesloten door de grafiek van k, de x-as en de lijn $x = \mathrm{e}$ om de y-as is hetzelfde als wenteling van het gebied ingesloten door de grafiek van $y = \mathrm{e}^x$, de y-as en de lijn $y = \mathrm{e}$ om de x-as. De grafiek van $y = \mathrm{e}^x$ snijdt $y = \mathrm{e}$ voor $x = 1$, dus het integratie-interval is $[0, 1]$.
Het ingesloten gebied sluit niet aan op de x-as, dus het volume van het omwentelingslichaam kun je niet direct berekenen. Neem voor het omwentelingslichaam als oppervlakte die rondgewenteld wordt de rechthoek ingesloten door de y-as, de x-as, de lijn $y = \mathrm{e}$ en de lijn $x = 1$ en trek er de oppervlakte onder de grafiek van af. De wenteling van de rechthoek geeft een cilinder met straal $r = \mathrm{e}$ en hoogte 1. De inhoud van het gevraagde omwentelingslichaam wordt dus

$$\pi\mathrm{e}^2\cdot 1 - \int_0^1 \pi(\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^2 - \pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^2 - \pi\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big]_0^1 = \pi\mathrm{e}^2 - \pi(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\pi(\mathrm{e}^2 + 1) \approx 13{,}18.$$

6.4 Lengte van een kromme

bladzijde 164

20a 

Plot
Invoer: Y1 = X^2
Venster: Xmin = 0 ; Xmax = 4
Ymin = 0 ; Ymax = 16

b De lijnstukken vormen elk de schuine zijde van een driehoek met breedte 1. Met de stelling van Pythagoras volgt

$OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$AB = \sqrt{1^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$BC = \sqrt{1^2 + (9-4)^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

$CD = \sqrt{1^2 + (16-9)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$

De som van de lengten is $\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{26} + \sqrt{50} \approx 16{,}75$.

c De lijnstukken geven de kortste verbinding tussen de punten terwijl de grafiek er een boog tussen maakt. De werkelijke lengte is dus groter dan de som van de lengten.

21a Voor een kleine waarde van Δx kun je de grafiek tussen P en Q benaderen door de raaklijn in P. De helling van de raaklijn is de afgeleide in P en volgens de vergelijking van een lijn $y = ax$ met helling a geldt dan $QR \approx \Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$.

b De lengte van lijnstuk PQ door de raaklijn is volgens de stelling van Pythagoras

$PQ = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x) \cdot \Delta x)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x))^2 \cdot (\Delta x)^2} =$

$\sqrt{(1 + (f'(x))^2) \cdot (\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \Delta x$.

c Voor $f(x) = x^2$ in de vorige opdracht geldt $f'(x) = 2x$ en het integratie-interval $[0, 4]$. De lengte van de grafiek is $L = \int_0^4 \sqrt{(1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$.

d De rekenmachine geeft $L = \int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x \approx 16{,}82$.

22a $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x \;\; \to \;\; f'(x) = 2x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} = 2x - \frac{1}{8x}$

$1 + (f'(x))^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 =$

$1 + 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + \left(\frac{1}{8x}\right)^2 =$

schrijf de 1 in de vorm van de gemengde term:

$4 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + \left(\frac{1}{8x}\right)^2 =$

$4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{8x} + \left(\frac{1}{8x}\right)^2 = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$

b $L = \int_1^{e^2} \sqrt{\left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2}\, dx = \int_1^{e^2} \left|2x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x}\right| dx = \left[x^2 + \frac{1}{8}\ln|x|\right]_1^{e^2} = \left[(e^4 + \frac{1}{8}\ln(e^2)) - (1+0)\right] =$

$e^4 + \frac{1}{8} \cdot 2 - 1 = e^4 - \frac{3}{4}$.

bladzijde 165

23a De lengte AB is de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met zijden Δx en Δy. De lengte van AB is volgens de stelling van Pythagoras $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.
Als benadering voor de lengte van de grafiek geldt dus

$$L \approx AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 \cdot \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{\Delta t}{\Delta t}\right)^2 \cdot \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)} =$$

$$\sqrt{(\Delta t)^2 \cdot \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)} = \sqrt{(\Delta t)^2 \cdot \left(\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}\right)} = \sqrt{\left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2\right) \cdot (\Delta t)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \; .$$

Bij punt A hoort $t = t_i$ en bij punt B hoort $t = t_i + \frac{1}{2}\Delta t$. Het differentiequotiënt $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ op het deelinterval $[t_i,\, t_i + \Delta t]$ kun je volgens opdracht 21a benaderen door $f'(t_i)$. Als je echter het midden $t + \frac{1}{2}\Delta t$ van het deelinterval kiest om een helling voor de lijn AB te bepalen krijg je een helling die tussen de helling van de raaklijn in A en de helling van de raaklijn in B ligt. Het geeft een betere benadering dan wanneer het beginpunt van het deelinterval gekozen zou zijn. Er geldt dus $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_i \approx f'(t + \frac{1}{2}\Delta t) = f'(m_i)$. Voor $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ geldt eenzelfde benadering alleen dan voor functie $g(x)$. Invullen van de benaderingen geeft $L \approx \sqrt{(f'(m_i))^2 + (g'(m_i))^2} \cdot \Delta t$.

b $x = f(t) = \cos t \quad \Rightarrow \quad f'(t) = -\sin t$
$y = g(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad g'(t) = \cos t$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{1}\ \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = \big[t\big]_0^{2\pi} = 2\pi\ .$$

Ga na dat de kromme de eenheidscirkel is met omtrek $2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ als lengte.

24a $x = f(t) = 1 + 3t^2 \quad \Rightarrow \quad f'(t) = 6t$
$y = g(t) = 3 + 2t^3 \quad \Rightarrow \quad g'(t) = 6t^2$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2}\ \mathrm{d}t$$

b $$\int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{36t^2 + 36t^4}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{36t^2(1+t^2)}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{36t^2}\sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

c $$L = \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t = 6\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t = 6\int_0^1 t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}t = 6\left[\tfrac{2}{3}(1+t^2)^{1\frac{1}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}\right]_0^1 = 2\left[(1+t^2)^{1\frac{1}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[(2)^{1\frac{1}{2}} - (1)^{1\frac{1}{2}}\right] = 2\left[2\sqrt{2} - 1\right] = 4\sqrt{2} - 2\ .$$

25a Voor het snijpunt met de x-as geldt $y = 0$, dus
$y = \mathrm{e}^t \cdot \sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ of $t = \pi$. Invullen in $x = \mathrm{e}^t \cdot \cos t$ geeft
$x = \mathrm{e}^0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$ en $x = \mathrm{e}^{\pi} \cdot \cos\pi = \mathrm{e}^{\pi} \cdot -1 = -\mathrm{e}^{\pi} \approx -23{,}14$, dus de snijpunten
(1, 0) en (–23,14; 0).
Voor het snijpunt met de y-as geldt $x = 0$, dus
$x = \mathrm{e}^t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. Invullen in $y = \mathrm{e}^t \cdot \sin t$ geeft
$y = \mathrm{e}^t \cdot \sin t = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi} \cdot \sin\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi} \cdot 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi} \approx 4{,}81$ dus het snijpunten (0; 4,81).

b $x = f(t) = \mathrm{e}^t \cdot \cos t \quad \Rightarrow \quad f'(t) = \mathrm{e}^t \cdot \cos t + \mathrm{e}^t \cdot -\sin t = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t)$
$y = g(t) = \mathrm{e}^t \cdot \sin t \quad \Rightarrow \quad g'(t) = \mathrm{e}^t \cdot \sin t + \mathrm{e}^t \cdot \cos t = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t)$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sqrt{(\mathrm{e}^t(\cos t - \sin t))^2 + (\mathrm{e}^t(\sin t + \cos t))^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(\mathrm{e}^t)^2 \cdot (\cos t - \sin t)^2 + (\mathrm{e}^t)^2 \cdot (\sin t + \cos t)^2}\ \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(\mathrm{e}^t)^2} \cdot \sqrt{(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t) + (\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t)}\ \mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \cdot \sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \cdot \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \cdot \sqrt{2 \cdot 1}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t\ .$$

c $$L = \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\big[\mathrm{e}^t\big]_0^{\pi} = \sqrt{2}(\mathrm{e}^{\pi} - 1)\ .$$

6.5 Toepassingen van integreren

bladzijde 166

26a Door Δx steeds kleiner te nemen als x het interval $[a,b]$ doorloopt gaat de Riemann-som $W \approx \sum W_i = \sum f(x_i) \cdot \Delta x$ over in de integraal $W = \int_a^b f(x)\,dx$.

b Een veerlengte van 15 cm betekent een uitrekking met 15 – 10 = 5 cm = 0,05 m.
Volgens de wet van Hooke is de uitrekking evenredig met de kracht: $F(x) = c \cdot x$.
Invullen van $F = 40$ voor $x = 0{,}05$ geeft $40 = c \cdot 0{,}05 \Rightarrow c = 40 : 0{,}05 = 800$, dus $F(x) = 800x$.

c Voor een veerlengte van 18 cm is de veer 8 cm = 0,08 m uitgerekt. De benodigde arbeid is dus $W = \int_{0,05}^{0,08} 800x\,dx = \left[400x^2\right]_{0,05}^{0,08} = (2{,}56) - (1) = 1{,}56$ Nm.

27a Druk is kracht per oppervlakte. Op een diepte h is de druk gelijk aan het gewicht van een vloeistofkolom met lengte h rustend op een oppervlakte van 1 vierkante meter.
Het volume V van de vloeistofkolom is oppervlakte $\times$ hoogte = $1 \cdot h = h$ m^3. Volgens $\text{dichtheid} = \dfrac{\text{massa}}{\text{volume}} \Rightarrow \rho = \dfrac{m}{V}$ is de massa van de kolom $m = \rho V = \rho h$ kilogram.
Het gewicht van de vloeistofkolom is $F_Z = mg = \rho hg$ Newton, dus de druk is $\dfrac{\rho hg \text{ Newton}}{1 \text{ m}^2} = \rho gh$ N/m^2.

b Omdat druk gelijk is aan kracht per oppervlakte ($p = \dfrac{F}{A}$), is kracht gelijk aan druk maal oppervlakte ($F = p \cdot A$).
Een horizontale strook met hoogte Δh en breedte B heeft oppervlakte $B \cdot \Delta h$.
De druk op diepte h is ρgh, dus voor de kracht ΔF op de strook geldt $\Delta F = p \cdot A = \rho ghB \cdot \Delta h$.

c Door Δh steeds kleiner te nemen als h het interval $[0, H]$ doorloopt gaat de Riemann-som
$F \approx \sum \Delta F = \sum \rho ghB \cdot \Delta h$ over in de integraal $F = \int_0^H \rho ghB\,dh$.

d Alle verticale wanden hebben dezelfde afmetingen. De kracht op een verticale wand is

$$F = \int_0^H \rho ghB\,dh = \rho gB \int_0^2 h\,dh = \rho gB \cdot \left[\tfrac{1}{2}h^2\right]_0^2 = \rho gB \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 4 = 2\rho gB = 2 \cdot 840 \cdot 9{,}81 \cdot 3 \approx 49{,}4\text{kN}.$$

De oppervlakte van de wand is $2 \cdot 3 = 6$ m^2, dus de druk op de wand is $\dfrac{49{,}4}{6} \approx 8{,}23$ kN/m^2.

bladzijde 167

28a In de gegeven formule $A=\pi(R+r)a$ voor de oppervlakte A van de kegelmantel van een afgeknotte kegel komt straal R overeen met de afstand van P tot de x-as en straal r met de afstand van Q tot de x-as. De lengte a van de schuine zijde van de afgeknotte kegel komt overeen met de lengte van het lijnstuk PQ tussen P en Q.
De afstand van P tot de x-as is de y-waarde bij P dus $f(x_i)$.
De afstand van Q tot de x-as is de y-waarde bij Q dus $f(x_i+\Delta x)$.
De lengte van lijnstuk PQ is $|PQ|$.
Invullen in de formule $A=\pi(R+r)a$ geeft voor de oppervlakte
$A=\pi(f(x_i)+f(x_{i+1}))\cdot|PQ|$.

b PQ is de schuine zijde van een rechthoekige driehoek met zijden Δx en Δf.
Volgens de stelling van Pythagoras geldt dan

$$|PQ|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta f)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2\frac{1}{(\Delta x)^2}\cdot\left((\Delta x)^2+(\Delta f)^2\right)}=\sqrt{(\Delta x)^2\cdot\left(\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}+\frac{(\Delta f)^2}{(\Delta x)^2}\right)}=$$

$$\sqrt{\left(\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}+\frac{(\Delta f)^2}{(\Delta x)^2}\right)(\Delta x)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\cdot\sqrt{(\Delta x)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x\quad.$$

c Invullen van het resultaat bij opdracht b in de uitdrukking bij opdracht a geeft oppervlakte A_i bij het i-de deelinterval $A_i=\pi(f(x_i)+f(x_{i+1}))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$.

Voor kleine Δx geldt $f(x_i)\approx f(x_{i+1})$ en $\frac{\Delta f}{\Delta x}\approx f'(x_i)$ zodat
$A_i\approx\pi\cdot 2f(x_i)\cdot\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\cdot\Delta x$.

Door Δx steeds kleiner te nemen als x het interval $[a,b]$ doorloopt gaat de Riemann-som
$O\approx\sum A_i\approx\sum\pi\cdot 2f(x_i)\cdot\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\cdot\Delta x$ over in de integraal

$O=\int_a^b 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. De grafiek moet boven de x-as liggen anders telt de oppervlakte onder de x-as negatief mee in de integraal vanwege de factor $2\pi f(x)$.
Om te voorkomen dat oppervlakten (deels) tegen elkaar wegvallen geldt de voorwaarde $f(x)\geq 0$.

d $f(x)=2\sqrt{x}\geq 0$ op $[0,4]$ en $f'(x)=x^{-\frac{1}{2}}$. Het omwentelingsoppervlak heeft oppervlakte

$$O=\int_a^b 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^4 2\pi\cdot 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+(x^{-\frac{1}{2}})^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^4 2\pi\cdot 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=$$

$$4\pi\int_0^4\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x=4\pi\int_0^4\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=4\pi\left[\tfrac{2}{3}(x+1)^{1\frac{1}{2}}\right]_0^4=4\pi\cdot\tfrac{2}{3}\left[(5^{1\frac{1}{2}})-(1^{1\frac{1}{2}})\right]=4\pi\cdot\tfrac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)=$$

$2\tfrac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$ ($\approx 85{,}29$).

6.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 168

29 $A(p)=\int_1^p f(x)\,dx=\int_1^p \frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_1^p=\ln p-\ln 1=\ln p$. Als $p\to\infty$ dan $\ln p\to\infty$, dus de oppervlakte wordt oneindig groot.

$I(p)=\int_1^p \pi(f(x))^2\,dx=\int_1^p \pi(x^{-1})^2\,dx=\pi\int_1^p x^{-2}\,dx=\pi\left[-x^{-1}\right]_1^p=\pi\left[(-p^{-1})-(-1^{-1})\right]=\pi\left(-\frac{1}{p}+1\right)$.

Als $p\to\infty$ dan $\frac{1}{p}\to 0$, dus de inhoud wordt $\pi(0+1)=\pi$.

30a De inhoud van een cilinder met straal *r* en hoogte *h* is $\pi r^2 h$.
De inhoud van de cilinder met straal x en hoogte $f(x_i)$ is $\pi x^2\cdot f(x_i)$.
De inhoud van de cilinder met straal $x+\Delta x$ en hoogte $f(x_i)$ is $\pi(x+\Delta x)^2\cdot f(x_i)$.
De inhoud van de ring tussen de cilinders is dus
$\pi(x+\Delta x)^2\cdot f(x_i)-\pi x^2\cdot f(x_i)=\pi(x^2+2\cdot x\Delta x+(\Delta x)^2)\cdot f(x_i)-\pi x^2\cdot f(x_i)=$
$\pi\cdot f(x_i)\cdot(x^2+2\cdot x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2)=\pi\cdot f(x_i)\cdot(2\cdot x\Delta x+(\Delta x)^2)=\pi\cdot f(x_i)(2x+\Delta x)\cdot\Delta x$.
Voor kleine Δx geldt $2x+\Delta x\approx 2x$ zodat de benadering $\pi\cdot f(x_i)\cdot 2x\cdot\Delta x$ wordt.

b Door Δx steeds kleiner te nemen als *x* het interval [0, 2] doorloopt gaat de Riemann-som $\sum\pi\cdot f(x_i)\cdot(2x+\Delta x)\cdot\Delta x$ over in de integraal $\int_0^2 \pi\cdot f(x)\cdot 2x\,dx=$ $\int_0^2 2\pi\cdot x\cdot f(x)\,dx$.
De inhoud van het omwentelinglichaam wordt dus
$\int_0^2 2\pi\cdot x\cdot f(x)\,dx=\int_0^2 2\pi\cdot x\cdot(2x^2-x^3)\,dx=2\pi\int_0^2(2x^3-x^4)\,dx=2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2=$
$2\pi\left[(\tfrac{1}{2}\cdot 2^4-\tfrac{1}{5}\cdot 2^5)-(0)\right]=2\pi(8-\tfrac{32}{5})=3\tfrac{1}{5}\pi$.

31a De oppervlakte onder de grafiek van *f* met *x* in $[a,b]$ is $\int_a^b f(x)\,dx$.
De oppervlakte onder de grafiek van $g(x)=c$ met *x* in $[a,b]$ is de oppervlakte van de rechthoek met zijden $b-a$ en *c*, dus $(b-a)c$.
Voor gelijke oppervlakten moet dus gelden $(b-a)c=\int_a^b f(x)\,dx$.

b
- Op het interval $[0,1]$:
  de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)=x^2$ is $\int_0^1 x^2\,dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1=\tfrac{1}{3}$.
  De oppervlakte onder de grafiek van *g* is $(1-0)c$.
  De gemiddelde functiewaarde *c* volgt uit $(1-0)c=\tfrac{1}{3}\;\Rightarrow\; c=\tfrac{1}{3}$.
- Op het interval $[0,3]$:
  de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)=x^2$ is $\int_0^3 x^2\,dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3=9$.
  De oppervlakte onder de grafiek van *g* is $(3-0)c$.
  De gemiddelde functiewaarde *c* volgt uit $(3-0)c=9\;\Rightarrow\; c=3$.

c De oppervlakte onder de grafiek van $f(x)=x^2$ op het interval $[0,p]$ is
$\int_0^p x^2\,dx=\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^p=\tfrac{1}{3}p^3$.
Als de gemiddelde functiewaarde 12 is dan geldt $c=12$. De oppervlakte onder de grafiek van *g* is dus $(p-0)c=p\cdot 12$. De oppervlakten zijn gelijk voor $p>0$ en $p\cdot 12=\tfrac{1}{3}p^3\Rightarrow p^2=36\Rightarrow p=6$.

bladzijde 169

32a $f_k(x)=\dfrac{\ln(kx)}{x} \;\Rightarrow\; f_1(x)=\dfrac{\ln(1\cdot x)}{x}=\dfrac{\ln x}{x}= \;\Rightarrow\; f'_1(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Voor de top geldt $f'_1(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; 1-\ln x=0 \;\Rightarrow\; \ln x=1 \;\Rightarrow\; x=\mathrm{e}$.

De y-waarde is $f_1(\mathrm{e})=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-1}$. De coördinaten zijn dus $(\mathrm{e},\, \mathrm{e}^{-1})$.

b $f_k(x)=\dfrac{\ln(kx)}{x} \;\Rightarrow\; f'_k(x)=\dfrac{\frac{1}{kx}\cdot k\cdot x-\ln(kx)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln(kx)}{x^2}$

Voor een top geldt

$f'_k(x)=\dfrac{1-\ln(kx)}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; 1-\ln(kx)=0 \;\Rightarrow\; \ln(kx)=1 \;\Rightarrow\; kx=\mathrm{e} \;\Rightarrow\; x=k^{-1}\cdot\mathrm{e}$.

De y-waarde is $f_k\left(k^{-1}\cdot\mathrm{e}\right)=\dfrac{\ln\left(k\cdot k^{-1}\cdot\mathrm{e}\right)}{k^{-1}\cdot\mathrm{e}}=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{k^{-1}\cdot\mathrm{e}}=\dfrac{1}{k^{-1}\cdot\mathrm{e}}=\dfrac{1}{x}$. Voor de coördinaten

van de top geldt dus $(x,\frac{1}{x})$, dus de toppen voor elke waarde van k liggen op de

kromme $y=\dfrac{1}{x}$.

c Voor het snijpunt met de x-as geldt $y=0$, dus

$f_2(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x}=0 \;\Rightarrow\; \ln 2x=0 \;\Rightarrow\; 2x=1 \;\Rightarrow\; x=\tfrac{1}{2}$.

d Oplossen van $f_k(x)=\dfrac{\ln(kx)}{x}=0$ geeft $\ln kx=0 \;\Rightarrow\; kx=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{k}$.

e $f'_3(x)=\dfrac{1-\ln(3x)}{x^2} \;\Rightarrow\; f''_3(x)=\dfrac{-\frac{1}{3x}\cdot 3\cdot x^2-(1-\ln(3x))\cdot 2x}{(x^2)^2}=\dfrac{-x-2x+2x\cdot\ln 3x}{x^4}=$

$\dfrac{-3+2\ln 3x}{x^3}$. Voor het buigpunt geldt

$f''_3(x)=\dfrac{-3+2\ln 3x}{x^3}=0 \;\Rightarrow\; -3+2\ln 3x=0 \;\Rightarrow\; \ln 3x=1\tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; 3x=\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; x=\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}$.

De functiewaarde hierbij is

$f_3(\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}})=\dfrac{\ln(3\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}})}{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}}=\dfrac{\ln(3\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}})}{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}}=\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}})}{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}}=\dfrac{1\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}}=4\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1\frac{1}{2}}$.

De exacte coördinaten van het buigpunt zijn dus $(\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{1\frac{1}{2}}, 4\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1\frac{1}{2}})$.

f $F_k(x)=0{,}5(\ln(kx))^2+c$ differentiëren met de kettingregel geeft

$F_k\,'(x)=0{,}5\cdot 2\ln(kx)\cdot\dfrac{1}{kx}\cdot k+0=\ln(kx)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln(kx)}{x}=f(x)$, dus de functies $F_k(x)$ zijn

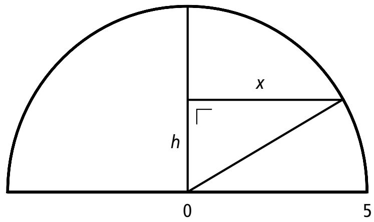
primitieven van f_k .

g $\displaystyle\int_{0{,}5\mathrm{e}}^{6} f_2(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0{,}5\mathrm{e}}^{6}\frac{\ln(2x)}{x}\,\mathrm{d}x=\left[F_2(x)\right]_{0{,}5\mathrm{e}}^{6}=\left[0{,}5(\ln(2x))^2\right]_{0{,}5\mathrm{e}}^{6}=0{,}5\left[(\ln 12)^2-(\ln \mathrm{e})^2\right]=$

$0{,}5\cdot(\ln 12)^2-0{,}5\;\; (\approx 2{,}587)$.

33a De voorkant is 10 meter breed en gelijk aan de middellijn van een van de cilinders. De straal van de cilinder is dus 5 meter. De hoogte van het kruisgewelf is gelijk aan de hoogte van een cilinder, dus 5 meter.

b Reken de hoogte h vanaf de grond. Als h toeneemt neemt de breedte van het vierkant af van 10 m tot 0. Voor de hoogte h en de halve breedte van het vierkant geldt de stelling van Pythagoras; zie de figuur hiernaast.



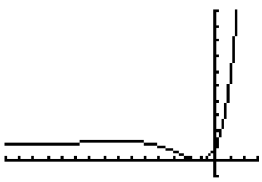
$5^2 = h^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{25 - h^2}$. De breedte van het vierkant is $2x$ en de oppervlakte van de doorsnede is dus:
$(2x)^2 = \left(2\sqrt{25-h^2}\right)^2 = 4(25-h^2) = 100 - 4h^2$.

c De inhoud van een blok met de doorsnede als oppervlak en hoogte Δh is $(100 - 4h^2) \cdot \Delta h$.
De inhoud benaderd door een Riemann-som geeft dus $\sum (100 - 4h^2) \cdot \Delta h$.
Door Δh steeds kleiner te nemen als h het interval [0, 5] doorloopt gaat de Riemann-som $\sum (100 - 4h^2) \cdot \Delta h$ over in de integraal $\int_0^5 (100 - 4h^2)\, \mathrm{d}h$.
De exacte inhoud is $\int_0^5 (100 - 4h^2)\, \mathrm{d}h = \left[100h - \frac{4}{3}h^3\right]_0^5 = (333\frac{1}{3}) - (0) = 333\frac{1}{3}$ m^3.

Test jezelf

bladzijde 172

T-1a $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} + x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} + 1 = xe^{\frac{1}{2}x}(2 + \frac{1}{2}x) + 1$



Plot
Invoer: Y1 = X*e^(X/2)*(2+X/2)+1
Venster: Xmin = –15 ; Xmax = 3
Ymin = –1 ; Ymax = 10

b 1) Voor een uiterste waarde is $f'(x) = 0$ een nulpunt. De grafiek heeft geen nulpunt dus er bestaat geen uiterste waarde.
2) De grafiek heeft wel een minimum waar de raaklijn horizontaal loopt, dus $f''(x) = 0$ en er bestaat een buigpunt.

c $f'(x) = xe^{\frac{1}{2}x}(2+\frac{1}{2}x)+1 = e^{\frac{1}{2}x}(2x+\frac{1}{2}x^2)+1 \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(2x+\frac{1}{2}x^2)+e^{\frac{1}{2}x}(2+x) =$

$e^{\frac{1}{2}x}(x+\frac{1}{4}x^2+2+x) = 0 \;\Rightarrow\; x+\frac{1}{4}x^2+2+x=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x^2+2x+2=0 \;\Rightarrow\; x^2+8x+8=0$

Oplossen met de *abc*-formule geeft $x = \dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1} = \dfrac{-8\pm\sqrt{32}}{2} = -4\pm2\sqrt{2}$.

De exacte x-coördinaten zijn dus $x=-4-2\sqrt{2}$ en $x=-4+2\sqrt{2}$.

d $f(x) = x^2\cdot e^{\frac{1}{2}x}+x$. Voor grote negatieve waarden van x wordt de term $x^2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\approx 0$. De functie wordt dan $f(x)\approx x$, dus $y = x$ is een vergelijking van de scheve asymptoot.

T-2a Noem de horizontale doorsnede $A'B'C'D'$ overeenkomstig het grondvlak $ABCD$ en de hoogte van de piramide H. Uit de gelijkvormigheid van driehoeken volgt voor de lange diagonaal:

$\Delta ACT \sim \Delta A'C'T \;\Rightarrow\; \dfrac{AC}{H} = \dfrac{A'C'}{H-h} \;\Rightarrow\; \dfrac{12}{12} = \dfrac{A'C'}{12-h} \;\Rightarrow\; A'C' = 12-h$,

en voor de korte diagonaal:

$\Delta BDT \sim \Delta B'D'T \;\Rightarrow\; \dfrac{BD}{H} = \dfrac{B'D'}{H-h} \;\Rightarrow\; \dfrac{6}{12} = \dfrac{B'D'}{12-h} \;\Rightarrow\; B'D' = \frac{1}{2}(12-h)$.

b Voor een ruit geldt: Oppervlakte = $\frac{1}{2}\times$ lengte lange diagonaal $\times$ lengte korte diagonaal.
De oppervlakte van de doorsnede is dus
$\frac{1}{2}\cdot A'C'\times B'D' = \frac{1}{2}\cdot(12-h)\cdot\frac{1}{2}(12-h) = \frac{1}{4}(12-h)^2$.

c De inhoud van de piramide kan worden benaderd door een groot aantal prisma's met ruit $A'B'C'D'$ als grondvlak en hoogte Δh .
Voor een prisma geldt: Inhoud = oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte. De inhoud van een prisma met ruit $A'B'C'D'$ als grondvlak en hoogte Δh is dus $\frac{1}{4}(12-h)^2\cdot\Delta h$.

De inhoud van de piramide wordt benaderd met de Riemann-som $\sum\frac{1}{4}(12-h)^2\cdot\Delta h$.

Door Δh steeds kleiner te nemen als h het interval [0, 12] doorloopt gaat de Riemann-som
$\sum\frac{1}{4}(12-h)^2\cdot\Delta h$ over in de integraal $\int_0^{12}\frac{1}{4}(12-h)^2\,\mathrm{d}h$. De inhoud van de piramide wordt daarmee

$\int_0^{12}\frac{1}{4}(12-h)^2\,\mathrm{d}h = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{3}(12-h)^3\cdot-1\Big]_0^{12} = -\frac{1}{12}\Big[(12-h)^3\Big]_0^{12} = -\frac{1}{12}\Big[(0^3)-(12^3)\Big] = 12^2 = 144.$

T-3a Het rode gebied grenst niet aan de x-as, dus de integraal $\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$ kun je niet direct gebruiken. De grafiek van $y=\sqrt[3]{x}$ snijdt de lijn $y=2$ voor $x=8$. De rode oppervlakte is het verschil tussen de rechthoek met verticale zijde 2 en horizontale zijde 8 – 2 = 6 en de oppervlakte onder de grafiek met x in [2, 8].
De inhoud van het omwentelinglichaam van het rode gebied is het verschil tussen de inhoud van het omwentelingslichaam van de rechthoek en het omwentelingslichaam van de oppervlakte onder de grafiek.
De inhoud van het omwentelingslichaam bij de rechthoek is een cilinder met straal 2 en hoogte 6. De inhoud is dus $\pi r^2 h=\pi\cdot 2^2\cdot 6=24\pi$.
De inhoud van het omwentelingslichaam bij de oppervlakte onder de grafiek is

$$\int_2^8 \pi(\sqrt[3]{x})^2\,dx=\int_2^8 \pi(x^{\frac{1}{3}})^2\,dx=\pi\int_2^8 x^{\frac{2}{3}}\,dx=\pi\left[\tfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_2^8=\tfrac{3}{5}\pi\left[(8^{\frac{5}{3}})-(2^{\frac{5}{3}})\right]\approx 54,33.$$

De inhoud van het omwentelingslichaam bij het rode gebied is dus
$24\,\pi - 54,33 \approx 21,06$.

b De y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de lijn $x=2$ is $f(2)=\sqrt[3]{2}$.
Voor het bepalen van de inhoud van het groene deel rondgewenteld om de y-as spiegel je de grafiek van f in de lijn $y=x$. De spiegeling van $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ is de functie $g(x)=x^3$.
De inhoud van de wenteling van het groene deel rond de y-as is gelijk aan de wenteling van een oppervlakte rond de x-as. Die oppervlakte is het verschil tussen de oppervlakte van de rechthoek met verticale zijde 2 en horizontale zijde $\sqrt[3]{2}$ en de oppervlakte onder de grafiek van g met x in $[0, \sqrt[3]{2}\,]$.
De inhoud van het omwentelingslichaam bij de rechthoek is een cilinder met straal 2 en hoogte $\sqrt[3]{2}$. De inhoud is dus $\pi r^2 h=\pi\cdot 2^2\cdot\sqrt[3]{2}=4\ \sqrt[3]{2}$ ≈ 15,83.
De inhoud van het omwentelingslichaam bij de oppervlakte onder de grafiek van g is

$$\int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi(x^3)^2\,dx=\int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi x^6\,dx=\pi\left[\tfrac{1}{7}x^7\right]_0^{\sqrt[3]{2}}=\tfrac{1}{7}\pi(\sqrt[3]{2})^7\approx 2{,}26.$$

De inhoud van het omwentelingslichaam bij het rode gebied is dus
15,83 – 2,26 ≈ 13,6.

T-4a $f(x)=\frac{1}{6}(x^2+4)^{1\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{6}\cdot 1\frac{1}{2}(x^2+4)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{1}{2}x(x^2+4)^{\frac{1}{2}}$.

b $L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{1+(\frac{1}{2}x(x^2+4)^{\frac{1}{2}})^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{1+\frac{1}{4}x^2(x^2+4)}\,dx=\int_0^3 \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4+x^2}\,dx$

c $\int_0^3 \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4+x^2}\,dx=\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{x^4+4x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{(x^2+2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3 (x^2+2)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^3=$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3)=\frac{1}{2}\cdot 15=7\frac{1}{2}$.

T-5a $x=f(t)=e^t+e^{-t} \;\Rightarrow\; f'(t)=e^t-e^{-t}$

$y=g(t)=5-2t \;\Rightarrow\; g'(t)=-2$

$(f'(t))^2+(g'(t))^2=(e^t-e^{-t})^2+(-2)^2=(e^t)^2-2e^te^{-t}+(e^{-t})^2+4=(e^t)^2-2\cdot 1+(e^{-t})^2+4=$

$(e^t)^2+2\cdot 1+(e^{-t})^2=(e^t)^2+2e^te^{-t}+(e^{-t})^2=(e^t+e^{-t})^2$.

b $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\ \mathrm{d}t == \int_0^1 \sqrt{(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 =$
$\left[(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}) - (1-1)\right] = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

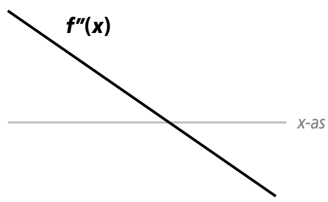
bladzijde 173

T-6a De compleet opgehesen kabel heeft een lengte van 10 m. Het bovenste stukje van de kabel moet daarvoor een weg van 10 m verticaal afleggen. Het laatste stukje blijft op de grond en legt 0 m af. Het stukje halverwege de kabel komt op een hoogte van 5 m te hangen en legt dus 5 m af.
Het stukje Δx op een afstand van x meter van het begin komt op een hoogte $10 - x$ meter te hangen dus moet $10 - x$ meter worden opgetild.
Het stukje Δx heeft een gewicht $15 \cdot \Delta x$. De arbeid ΔW die verricht moet worden is per definitie kracht × weg = $15 \cdot \Delta x \times (10 - x)$, dus $\Delta W = 15(10 - x)\Delta x$.

b $W = \int_0^{10} 15(10 - x)\,\mathrm{d}x = 15\left[10x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{10} = 15(100 - 50) = 750$ Nm.

c Het verplaatsen van Δx aan het begin van de kabel naar 10 m hoogte kost extra arbeid die evenveel is als de arbeid nodig voor het verplaatsen van Δx aan het eind van de kabel naar een hoogte van x meter. Laat Δx aan het eind van de kabel dus liggen en gebruik de arbeid die dat zou kosten voor de extra verplaatsing om Δx aan het begin van de kabel naar 10 m hoogte te brengen. Doe je dat voor alle stukjes Δx dan heb je alleen de stukjes in de helft van de kabel die aan het begin zit nodig. Omdat alle stukjes Δx in deze halve kabel verplaatst worden tot een hoogte van 10 m is dat gelijk aan het in zijn geheel verplaatsen van de halve kabel tot 10 m hoogte.

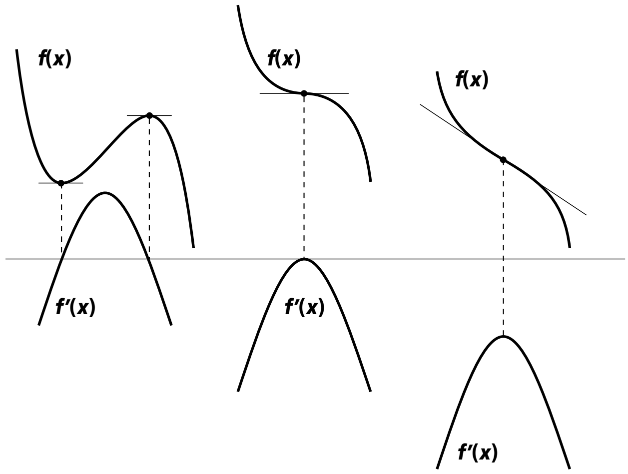
T-7a De afgeleide $f'(x)$ van de derdegraadsfunctie is een tweedegraadsfunctie. Als je de getekende grafiek als een deel van een bergparabool ziet dan is de tweede afgeleide $f''(x)$ een eerstegraadsfunctie, dus een lijn $y = ax + b$ met $a < 0$. De lijn snijdt de x-as daar waar de afgeleide $f'(x)$ een top heeft. Voor alle drie gevallen is de grafiek van $f''(x)$ bijvoorbeeld



b Een lijn $y = ax + b$ met $a \neq 0$ heeft altijd een snijpunt met de x-as, dus $f''(x) = 0$ bestaat en er is dus in alle gevallen een buigpunt.

c In het eerste geval zijn er twee extremen, omdat de afgeleide rond de nulpunten van teken wisselt (van – naar + en van + naar –).
In het tweede geval er wel een punt op de grafiek van f met een horizontale raaklijn, maar verder is de afgeleide steeds negatief. Er is dan geen extreme waarde.
In het derde geval is de afgeleide voor alle waarden van x negatief. De grafiek van f daalt steeds en er is geen extreme waarde.

d



– Voor het eerste geval is de afgeleide negatief, positief, negatief. De functie is dus dalend, stijgend, dalend. Waar de afgeleide de x-as snijdt heeft de functie een top. De functie heeft een buigpunt waar de afgeleide een top heeft.
– Voor het tweede geval is de afgeleide steeds negatief behalve in het nulpunt. De functie is dus steeds dalend met een horizontale raaklijn waar de afgeleide het nulpunt heeft.
– Voor het derde geval is de afgeleide steeds negatief. De functie is steeds dalend en heeft nergens een horizontale raaklijn.
– Voor alle gevallen: verschuiving van de grafiek van f in verticale richting geeft ook een mogelijke grafiek.

T-8a $I = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$ toepassen geeft $I = \int_0^{2\pi} \pi\cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$.

b Uit de goniometrie is de verdubbelingsformule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ bekend. Hieruit volgt $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$.

c $I = \pi\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\,dx = \frac{1}{2}\pi\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi\left[(\frac{1}{2}\cdot 0 + 2\pi) - (\frac{1}{2}\cdot 0 + 0)\right] = \pi^2.$

T-9a Uit de definitie $W = F\cdot u$ (arbeid = kracht × weg) volgt de Riemann-som $W = \sum \Delta W = \sum F\cdot\Delta u$ en de integraal $W = \int_0^{0,05} F\,du = \int_0^{0,05} c\cdot u\,du = \int_0^{0,05} 8500\,u\,du$.

b $W = \int_0^{0,05} 8500\,u\,du = 8500\cdot\frac{1}{2}\left[u^2\right]_0^{0,05} = 8500\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,05^2 = 10,62$ Nm.

c $W = \int_{0,05}^{0,10} 8500\,u\,du = 8500\cdot\frac{1}{2}\left[u^2\right]_{0,05}^{0,10} = 8500\cdot\frac{1}{2}\cdot(0,10^2 - 0,05^2) = 31,875$ Nm.

d De kracht die op de veer moet worden uitgeoefend wordt groter met toenemende indrukking. Voor een indrukking van 0 tot 5 cm is dus niet dezelfde kracht nodig als voor een indrukking van 5 tot 10 cm. De hoeveelheid arbeid bij gelijke weglengte van 5 cm is dus niet gelijk.